УДК 519.21

А. А. Шор, инж.-мат. (СКТБ Ин-та кибернетики АН Украины, Киев),
А. Э. Шор, мл. науч. сотр. (Ин-т кибернетики АН Украины, Киев)

Характеризация остаточных σ-алгебр

Посвящена поведению остаточных σ-алгебр. Для вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ на множестве всех под-σ-алгебр $\mathfrak{F}$ вводится новая топология. Получены необходимые и достаточные условия независимости событий от финальной σ-алгебры в терминах перемешивания.

Присвячена поведінці остаточних σ-алгебр. Для ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ на множині усіх під-σ-алгебр $\mathfrak{F}$ запроваджується нова топологія. Одержані необхідні та достатні умови незалежності подій від фінальної σ-алгебри у термінах перемішування.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и пространство $\mathfrak{X}$ σ-алгебр, содержащихся в $\mathfrak{F}$. Для любых $A, B \in \mathfrak{F}$ положим $\mu_A^P(B) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$, а для $x \in \mathfrak{X}$ $f_A^P(x) = \sup\limits_{B \in x} |\mu_A^P(B)|$.

На протяжении всей статьи будем отождествлять множества A и B, если $P(A \Delta B) = 0$.

Определим на $\mathfrak{X}$ минимальную топологию τ, относительно которой все функции $\{f_A^P : \mathfrak{X} \to \mathbb{R},\ A \in \mathfrak{F}\}$ непрерывны. Нетрудно показать, что сходимость обобщенной последовательности (сети) $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ эквивалентна сходимости обобщенной числовой последовательности $f_A^P(x_\alpha)$ к $f_A^P(x)$ для любого $A \in \mathfrak{F}$ [1, с. 107]). Для доказательства отделимости в смысле Хаусдорфа $(\mathfrak{X}, \tau)$ потребуется следующее утверждение.

Предложение 1. *Если для вероятностного пространства* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *σ-алгебра $\mathfrak{F}_0$ входит в $\mathfrak{F}$, то для любого A из $\mathfrak{F}$ имеет место неравенство*

$$\sup_{B \in \mathfrak{F}_0} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant P(A)(1 - P(A)),$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда A принадлежит $\mathfrak{F}_0$.

Предположим, что пространство $(\mathfrak{X}, \tau)$ не хаусдорфово, т. е. некоторая обобщенная последовательность $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ имеет два различных предела x_1 и x_2. Отсюда следует, что для любого $A \in \mathfrak{F}$ $f_A^P(x_1) = f_A^P(x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$, то существует A_0, принадлежащее $(x_1 \setminus x_2) \cup (x_2 \setminus x_1)$. Пусть, для определенности, A_0 принадлежит $x_1 \setminus x_2$. Согласно предложению 1

$$P(A_0)(1 - P(A_0)) = f_{A_0}^P(x_1) = f_{A_0}^P(x_2) < P(A_0)(1 - P(A_0)).$$

Из полученного противоречия следует хаусдорфовость $(\mathfrak{X}, \tau)$.

Так как пространство σ-аддитивных функций на $(\Omega, \mathfrak{F})$ является полной решеткой, то естественно задать вопрос о точной верхней грани семейства $\{\mu_B^P, B\in\mathfrak{F}\}$. Докажем, что $\sup\limits_{B\in\mathfrak{F}}\mu_B^P = P - \varkappa^P$, где

$$\varkappa^P(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^n P(E_i)^2 \,\Big|\, \bigcup_{i=1}^n E_i = A, E_i\cap E_j = \varnothing, i\neq j\right\}.$$

Согласно [2, с. 180]

$$(\sup_{B\in\mathfrak{F}}\mu_B^P)(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \mu_{B_i}^P(E_i)\,|\,B_i\in\mathfrak{F}, \bigcup_{i=1}^n E_i = A, E_i\cap E_j=\varnothing, i\neq j\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^n \mu_{E_i}^P(E_i)\,\Big|\,\bigcup_{i=1}^n E_i = A, E_i\cap E_j = \varnothing, i\neq j\right\} =$$

$$= P(A) - \inf\left\{\sum_{i=1}^n P(E_i)^2\,\Big|\,\bigcup_{i=1}^n E_i = A, E_i\cap E_j=\varnothing, i\neq j\right\},$$

что и требовалось доказать.

Пространство $\mathfrak{X}$ является полной решеткой (относительно упорядочения — включения своих элементов как σ-алгебр) с наименьшим элементом $x_* = \{\varnothing, \Omega\}$ и наибольшим элементом $x^* = \mathfrak{F}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_n = x_n, n\geqslant 1\}$ — монотонно убывающая последовательность, а $\{\mathfrak{F}_\alpha = y_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A}\}$ — монотонно возрастающее семейство σ-алгебр из $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

I. *Последовательность $\{x_n, n\geqslant 1\}$ сходится в топологии τ к x_* тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x_*$. Более того, множество $A\in\mathfrak{F}$ не зависит от $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ тогда и только тогда, когда последовательность $f_A^P(x_n)$ сходится к нулю.*

II. *Обобщенная последовательность $\{y_\alpha, \alpha\in\mathfrak{A}\}$ сходится в топологии τ к x^* тогда и только тогда, когда $\bigvee\limits_\alpha y_\alpha = x^*$.*

Доказательство. I. Пусть $x_n \xrightarrow{\tau} x_*$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x_n \neq x_*$, т. е. существует нетривиальное множество $A\in\mathfrak{F}$ такое, что для любого $n\geqslant 1$ A принадлежит x_n. Значит, $f_A^P(x_n) = P(A)(1-P(A))\neq 0$. Получили противоречие.

Пусть $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x_*$. Тогда для любого A из $\mathfrak{F}$ последовательность $\{E\{I_A\,|\,x_n\}, n\geqslant 1\}$ образует мартингал, который сходится в $L_1(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ к $E\{I_A\,|\,x_*\} = P(A)$ [3, с. 295]. Для любого $B_n\in x_n$ имеем

$$|P(A\cap B_n) - P(A)P(B_n)| = \Big|\int\limits_{B_n} I_A dP - \int\limits_{B_n} P(A)\,dP\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{B_n} E\{I_A\,|\,x_n\}\,dP - \int\limits_{B_n} E\{I_A\,|\,x_*\}\,dP\Big| \leqslant \int\limits_{B_n} |E\{I_A\,|\,x_n\} - E\{I_A\,|\,x_*\}|\,dP \leqslant$$

$$\leqslant \|E\{I_A\,|\,x_n\} - E\{I_A\,|\,x_*\}\|_{L_1}.$$

Отсюда

$$0\leqslant f_A^P(x_n)\leqslant \|E\{I_A\,|\,x_n\} - E\{I_A\,|\,x_*\}\|_{L_1}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Следовательно, $x_n \xrightarrow{\tau} x_*$.

Замечание. Из доказательства следует, что для сходимости $f_A^P(x_n)\to 0$,

$n \to \infty$, достаточно потребовать независимости A от $\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n$. Обратно, пусть $f_A^P(x_n) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $\mu_A^P(B) = 0$ для любого B из $\bigcap_{n=1}^{\infty} x_n$.

II. Пусть $y_\alpha \xrightarrow{\tau} x^*$, т. е. для любого A из $\mathfrak{F}$

$$\lim_\alpha f_A^P(y_\alpha) = P(A)(1 - P(A)).$$

Если A не принадлежит $\bigvee_\alpha y_\alpha$, то для любого α

$$f_A^P(y_\alpha) \leqslant f_A^P\Big(\bigvee_\alpha y_\alpha\Big) < P(A)(1 - P(A)).$$

Переходя к пределу, получаем противоречие.

Обратно, пусть $\bigvee_\alpha y_\alpha = x^*$. $\bigcup_\alpha y_\alpha$ вляется алгеброй и для любых $A \in x_*$, $\varepsilon > 0$ существуют α_0 и $B_{\alpha_0} \in y_{\alpha_0}$ такие, что $P(A \Delta B_{\alpha_0}) < \varepsilon$. Для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$ имеем

$$P(A)(1 - P(A)) - 2\varepsilon \leqslant |\mu_A^P(B_{\alpha_0})| \leqslant f_A^P(y_{\alpha_0}) \leqslant P(A)(1 - P(A)),$$

откуда $\lim_\alpha f_A^P(y_\alpha) = P(A)(1 - P(A))$.

Определение 1. *Пусть помимо вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ задано измеримое пространство (X, B). Будем говорить, что последовательность $\mathfrak{F} - \mathfrak{B}$ измеримых функций имеет свойство «нуля или единицы», если ее остаточная σ-алгебра тривиальна.*

Определение 2. *Сохраняющее меру измеримое преобразование вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ $T : \Omega \to \Omega$ будем называть равномерно перемешивающим, если для любого A из $\mathfrak{F}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B \in \mathfrak{F}} |P(A \cap T^{-n}(B)) - P(A)P(B)| = 0.$$

Это определение является усилением требований на перемешивающее преобразование [4, с. 55]. В отличие от этого определения близкое понятие φ-перемешивания [6, с. 230] характеризует равномерность по обеим аргументам и поэтому не может быть использовано в рассматриваемом случае.

Примером равномерно перемешивающего преобразования может служить диадическое преобразование, а перемешивающего, но не равномерно перемешивающего,— двусторонний сдвиг Бернулли [5, с. 15, 11].

Теорема 2. *Сохраняющее меру измеримое преобразование T вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ будет равномерно перемешивающим тогда и только тогда, когда последовательность $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}$ измеримых функций $\{T^k, k \geqslant 1\}$ имеет свойство «нуля или единицы».*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_n := \sigma(\{T^k, k \geqslant n\})$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой все T^k, $k \geqslant 1$, измеримы. Легко убедиться, что $\mathfrak{F}_n = \{T^{-n}(B) : B \in \mathfrak{F}\}$. Теперь утверждение следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть последовательность случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ слабо сходится к невырожденному закону и имеет свойство «нуля или единицы». Тогда пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ не имеет атомов.*

Доказательство. Существует $c \in \mathbb{R}$, что для $B_n = \{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) < c\}$ $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = p$ и $0 < p < 1$. Далее, $B_n \in \mathfrak{F}_n = \sigma(\{f_k, k \geqslant n\})$. По условию $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n = \{\varnothing, \Omega\}$, а значит, по теореме 1 для атома A

$$\lim_{n\to\infty} |P(A \cap B_n) - P(A)P(B_n)| = 0, \text{ или } \lim_{n\to\infty} P(A \cap B_n) = P(A)p.$$

Получили противоречие, так как для любого n $P(A \cap B_n)$ равно либо 0, либо $P(A)$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Рассмотрим последовательность одинаково распределенных случайных величин* $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ *с функцией распределения* $F(x)$ *и остаточной σ-алгеброй* $\mathfrak{F}^\infty$. *Положим* $A_n(x) := \{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) < x\}$, *а для* $B \in \mathfrak{F}$ $(P(B) > 0)$

$$F_n^B(x) := P(B \cap A_n(x))/P(B).$$

Если B *не зависит от* $\mathfrak{F}^\infty$, *то имеет место равномерная сходимость последовательности функций* $\{F_n^B(x), n \geqslant 1\}$ *к* $F(x)$.

Доказательство. Согласно теореме 1

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^B(x) - F(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |P(B \cap A_n(x)) - P(B) F(x)|/P(B) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{A_n \in \mathfrak{F}_n} |P(B \cap A_n) - P(B) P(A_n)|/P(B) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

1. *Келли Дж.* Общая топология.— М. : Наука, 1981.— 432 с.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
3. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 605 с.
4. *Холмош П. Р.* Лекции по эргодической теории.—М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 147 с.
5. *Биллингсли П.* Эргодическая теория и информация.— М. : Мир, 1969.— 238 с.
6. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.

Получено 12.03.91