УДК 517.929.4

И. Г. Нечаева, канд. физ.-мат. наук, **Д. Я. Хусаинов**, д-р физ.-мат. наук (**Киев. ун-т**)

Исследование условий устойчивости стохастических возмущенных систем с запаздыванием

Рассматриваются линейные стохастические дифференциальные системы с одним запаздыванием. Получены достаточные условия равномерной (по запаздыванию) устойчивости в среднеквадратическом при постоянно действующих возмущениях.

Розглядаються лінійні стохастичні диференціальні системи з одним відхиленням. Одержані достатні умови рівномірної (по запізненню) стійкості в середньоквадратичному при постійно діючих збуреннях.

Рассмотрим систему стохастических дифференциально-разностных уравнений

$$dx(t) = [A_0x(t) + A_1x(t-\tau)]\,dt + [B_0x(t) + B_1x(t-\tau)]\,dw(t), \qquad (1)$$

где A_0, A_1, B_0, B_1 — постоянные матрицы, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс. Реальные технические системы описываются математическими моделями вида (1) с известной степенью точности, коэффициенты системы обычно неизвестны. Поэтому более адекватно рассматривать так называемую возмущенную систему

$$dx(t) = [A_0x(t) + A_1x(t-\tau) + Q_1(x(t),\ x(t-\tau))]\,dt +$$
$$+ [B_0x(t) + B_1x(t-\tau) + Q_2(x(t),\ x(t-\tau))]\,dw(t), \qquad (2)$$

где функции Q_1 и Q_2, вообще говоря, неизвестны и малы в каком-то смысле. Под решением системы (2) будем понимать решение интегрального уравнения

$$x_Q(t) = x_Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A_0x_Q(s) + A_1x_Q(s-\tau) + Q_1(x_Q(s),\ x_Q(s-\tau))]\,ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} [B_0 x_Q(s) + B_1 x_Q(s-\tau) + Q_2(x_Q(s),\ x_Q(s-\tau))]\, dw(s),$$

где второй интеграл понимается как интеграл Ито [1, 2]. Приведем определение устойчивости решений системы, учитывающее возмущения. В детерминированном случае это так называемая устойчивость при постоянно действующих возмущениях [3]. Различные определения для стохастических систем имеются в [4, 5].

Определение. *Решение $x(t) \equiv 0$ системы* (1) *называется устойчивым в среднеквадратическом при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$, $\eta_1 > 0$ и $\eta_2 > 0$ такие, что для произвольного решения $x_Q(t)$ системы* (2) *при $t > t_0$ будет выполняться $M\{|x_Q(t)|^2\} < \varepsilon$, лишь только $\|x_Q(t_0)\|_\tau^2 < \delta$ и $M\{|Q_1(x_Q(t), x_Q(t-\tau))|^2\} < \eta_1$, $M\{|Q_2(x_Q(t), x_Q(t-\tau))|^2\} < \eta_2$.*

Для простоты в качестве начальной берется любая непрерывная детерминированная функция $x_Q(t)$, $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$. Под векторными нормами понимаются.

$$|x(t)| = \Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\Big\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{t-\tau \leqslant s \leqslant t} \{|x(s)|\},$$

в качестве матричной нормы будем брать спектральную.

Исследование устойчивости будем проводить методом функций Ляпунова вида $v(x) = x^T H x$, где симметричная положительно определенная матрица H является решением уравнения Сильвестра — Ляпунова [6].

$$(A_0 + A_1)^T H + H(A_0 + A_1) + (B_0 + B_1)^T H (B_0 + B_1) = -C. \tag{3}$$

Известно, что если существуют положительно определенные матрицы H и C, удовлетворяющие уравнению (3), то система

$$dx(t) = (A_0 + A_1)\, x(t)\, dt + (B_0 + B_1)\, x(t)\, dw(t) \tag{4}$$

асимптотически устойчива в среднеквадратическом. А если система (4) асимптотически устойчива, то при определенных условиях это сохраняется и для системы (1). При этом асимптотическая устойчивость влечет за собой устойчивость при постоянно действующих возмущениях, равномерную по запаздыванию τ.

Лемма 1. *Пусть при $t > t_0$ для решения $x_Q(t)$ системы* (2) *выполняется $M\{v(x_Q(s))\} < M\{v(x_Q(t))\}$, $t_0 - \tau \leqslant s < t$. Тогда справедливо неравенство*

$$M\{x_Q^T(t)\, HA_1[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]\} < |HA_1|(3 + \varphi(H))\, M\{|x_Q(t)|^2\}, \tag{5}$$

где $\varphi(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы.

Доказательство. Для функции Ляпунова $v(x) = x^T H x$ справедливы неравенства квадратичных форм

$$\lambda_{\min}(H)\, |x|^2 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\, |x|^2. \tag{6}$$

Поэтому для решения $x_Q(t)$ системы (2), удовлетворяющего условию леммы, выполняется

$$\lambda_{\min}(H)\, M\{|x_Q(s)|^2\} \leqslant M\{v(x_Q(s))\} < M\{v(x_Q(t))\} \leqslant \lambda_{\max}(H)\, M\{|x_Q(t)|^2\}.$$

Отсюда получаем

$$M\{|x_Q(s)|^2\} < \varphi(H)\, M\{|x_Q(t)|^2\}, \quad \varphi(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H).$$

Проведем следующие преобразования:

$$M\{x_Q^T(t)\, HA_1[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]\} \leqslant M\{|HA_1|[|x_Q(t-\tau)| +$$

$$+ |x_Q(t)|]\, |x_Q(t)|\} \leqslant |HA_1|\, M\{|x_Q(t)|^2 + [|x_Q(t)|^2 + |x_Q(t-\tau)|^2]/2\} <$$

$$< |HA_1|(3 + \varphi(H))\, M\{|x_Q(t)|^2\}/2.$$

Лемма 2. *Пусть при $t > t_0$ для решения $x_Q(t)$ системы* (2) *выполняется* $M\{v(x_Q(s))\} < M\{v(x_Q(t))\}$, $t_0 - \tau \leqslant s < t$. *Тогда справедливо неравенство*

$$M\{[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]^T B_1^T H B_1 [x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]\} <$$
$$< 2|B_1^T H B_1| \cdot (1 + \varphi(H)) M\{|x_Q(t)|^2\}. \tag{7}$$

Доказательство. Справедливы следующие преобразования:

$$M\{[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]^T B_1^T H B_1 [x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]\} \leqslant |B_1^T H B_1| \times$$
$$\times M\{|x_Q(t-\tau) - x_Q(t)|^2\} \leqslant |B_1^T H B_1| M\{|x_Q(t-\tau)|^2 + 2x_Q^T(t) \times$$
$$\times x_Q(t-\tau) + |x_Q(t)|^2\} \leqslant 2|B_1^T H B_1|(1 + \varphi(H)) M\{|x_Q(t)|^2\}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\| x_Q(t_0)\|_\tau^2 < \delta$, *а при* $t > t_0$ *будет* $dM\{v(x_Q(t))\} < -\beta M\{|x_Q(t)|^2\}$, $\beta > 0$. *Тогда при* $t > t_0$ *справедливо*

$$M\{v(x_Q(t))\} < \lambda_{\max}(H)\,\delta. \tag{8}$$

Доказательство. Используя неравенства квадратичных форм (6), запишем

$$dM\{v(x_Q(t))\} < [-\beta/\lambda_{\max}(H)]\, M\{v(x_Q(t))\}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное неравенство:

$$M\{v(x_Q(t))\} < M\{v(x_Q(t_0))\} \exp\{-\beta(t - t_0)/\lambda_{\max}(H)\}.$$

Вновь используя (6) и учитывая, что $\beta > 0$, получаем (8).

Теорема. *Пусть существуют положительно определенные матрицы H и C, удовлетворяющие уравнению* (3), *при которых*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_1 = \lambda_{\min}(C) - [|HA_1| + |(B_0 + B_1)^T H B_1| \times$$
$$\times (3 + \varphi(H)) - 2|B_1^T H B_1|(1 + \varphi(H)). \tag{9}$$

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) *устойчиво в среднеквадратическом при постоянно действующих возмущениях. Причем для произвольного решения $x_Q(t)$ системы* (2) *при $t > t_0$ будет выполняться $M\{|x_Q(t)|^2\} < \varepsilon$, лишь только $\| x_Q(t_0)\|_\tau^2 < \delta(\varepsilon)$, и $M\{|Q_1(x_Q(t), x_Q(t-\tau))|^2\} < \eta_1(\varepsilon)$, $M\{|Q_2(x_Q(t), x_Q(t-\tau))|^2\} < \eta_2(\varepsilon)$, где функции $\delta(\varepsilon)$, $\eta_1(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon)$ имеют вид*

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\varphi(H), \tag{10}$$

$$\eta_1(\varepsilon) = (\zeta/2|H|)^2\, \varepsilon/\varphi(H), \tag{11}$$

$$\eta_2(\varepsilon) = (1-\zeta)^2 [\Delta_1 \{[\Delta_2^2 + \Delta_1(1-\zeta)|H|]^{1/2} + \Delta_2\}^{-1}]^2\, \varepsilon/\varphi(H), \tag{12}$$
$$\Delta_2 = |H(B_0 + B_1)| + |HB_1|\,(1 + \varphi(H)),$$

$0 < \zeta < 1$ — *произвольная фиксированная величина.*

Доказательство. Рассмотрим решение $x_Q(t)$ системы (2) с начальными условиями $\| x_Q(t_0)\|_\tau^2 < \delta$. Учитывая неравенства квадратичных форм (6), получаем

$$M\{v(x_Q(t))\} < \lambda_{\max}(H)\,\delta, \quad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0. \tag{13}$$

Покажем, что это неравенство сохранится и при $t > t_0$. Пусть, от противного, существует $T > t_0$, при котором (13) нарушается, т. е.

$$M\{v(x_Q(t))\} < M\{v(x_Q(T))\} = \lambda_{\max}(H)\,\delta. \tag{14}$$

В этом случае для момента $T > t_0$ выполняются условия лемм 1, 2 и становятся справедливыми неравенства (5), (7).

Найдем стохастический дифференциал функции Ляпунова $v(x) = x^T H x$. Применив формулу Ито стохастического дифференцирования, проинтегрировав полученное соотношение в пределах от t_0 до t и вычислив математическое ожидание от обеих частей его с учетом свойств стохастических интегралов Ито и вида уравнения и вновь продифференцировав, получаем следующее выражение:

$$dM\{v(x_Q(t))\} = M\{-x_Q^T(t)Cx_Q(t)\}dt + 2M\{x_Q^T(t)HA_1 \times$$
$$\times [x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]\}dt + 2M\{x_Q^T(t)(B_0+B_1)^T HB_1[x_Q(t-\tau) -$$
$$- x_Q(t)]\}dt + M\{[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]^T B_1^T HB_1[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]\}dt +$$
$$+ 2M\{x_Q^T(t)HQ_1(x_Q(t), x_Q(t-\tau))\}dt + 2M\{x_Q^T(t)(B_0+B_1)^T H \times$$
$$\times Q_2(x_Q(t), x_Q(t-\tau))\}dt + 2M\{[x_Q(t-\tau) - x_Q(t)]^T B_1^T H \times$$
$$\times Q_2(x_Q(t), x_Q(t-\tau))\}dt + M\{Q_2^T(x_Q(t), x_Q(t-\tau))HQ_2(x_Q(t), x_Q(t-\tau))\}dt.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых. Если справедливо допущение и при $t_0 - \tau \leqslant t < T$ выполняется $M\{v(x_Q(t))\} < M\{v(x_Q(T))\}$, то, как следует из лемм 1, 2, будет

$$2M\{x_Q^T(T)HA_1[x_Q(T-\tau) - x_Q(T)]\} < |HA_1|(3+\varphi(H))M\{|x_Q(T)|^2\},$$
$$2M\{x_Q^T(T)(B_0+B_1)HB_1[x_Q(T-\tau) - x_Q(T)]\} < |(B_0+B_1)^T HB_1| \times$$
$$\times (3+\varphi(H))M\{|x_Q(T)|^2\},$$
$$M\{[x_Q(T-\tau) - x_Q(T)]^T B_1^T HB_1[x_Q(T-\tau) - x_Q(T)]\} <$$
$$< 2|B_1^T HB_1|(1+\varphi(H))M\{|x_Q(T)|^2\}.$$

Со слагаемыми, содержащими возмущения, поступаем следующим образом. Пусть $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ — произвольные постоянные. Тогда

$$2M\{x_Q^T(T)HQ_1(x_Q(T), x_Q(T-\tau))\} \leqslant |H|[\alpha_1 M\{|x_Q(T)|^2\} +$$
$$+ M\{|Q_1(x_Q(T), x_Q(T-\tau))|^2\}/\alpha_1] < |H|[\alpha_1 M\{|x_Q(T)|^2\} + \eta_1/\alpha_1].$$

Для остальных слагаемых имеем

$$2M\{x_Q^T(T)(B_0+B_1)^T HQ_2(x_Q(T), x_Q(T-\tau))\} < |H(B_0+B_1)| \times$$
$$\times [\alpha_2 M\{|x_Q(T)|^2\} + \eta_2/\alpha_2],$$
$$2M\{[x_Q(T-\tau) - x_Q(T)]^T B_1^T HQ_2(x_Q(T), x_Q(T-\tau))\} < |HB_1| \times$$
$$\times (1+\varphi(H))[\alpha_3 M\{|x_Q(T)|^2\} + \eta_2/\alpha_3].$$

Для последнего получаем

$$M(Q_2^T(x_Q(T), x_Q(T-\tau))HQ_2(x_Q(T), x_Q(T-\tau))\} \leqslant$$
$$\leqslant |H|M\{|Q_2(x_Q(T), x_Q(T-\tau))|^2\} < |H|\eta_2.$$

Таким образом, для стохастического дифференциала функции Ляпунова будет выполняться

$$dM\{v(x_Q(T))\} < [-\lambda_{\min}(C)M\{|x_Q(T)|^2\} + (|HA_1| +$$
$$+ |(B_0+B_1)^T HB_1|)(3+\varphi(H))M\{|x_Q(T)|^2\} + 2|B_1^T HB_1|(1+\varphi(H)) \times$$
$$\times M\{|x_Q(T)|^2\} + \alpha_1|H|M\{|x_Q(T)|^2\} + |H|\eta_1/\alpha_1 + \alpha_2|H(B_0+B_1)| \times$$
$$\times M\{|x_Q(T)|^2\} + |H(B_0+B_1)|\eta_2/\alpha_2 + \alpha_3|HB_1|(1+\varphi(H))M\{|x_Q(T)|^2\} +$$
$$+ |HB_1|(1+\varphi(H))\eta_2/\alpha_3 + |H|\eta_2]\,dt,$$

или

$$dM\{v(x_Q(T))\} < -[\Delta_1 - \alpha_1|H| - \alpha_2|H(B_0+B_1)| -$$

$$-\alpha_3 |HB_1|(1+\varphi(H))] M\{|x_Q(T)|^2\} dt + [|H|\eta_1/\alpha_1 + \\ + (|H(B_0+B_1)|/\alpha_2 + |HB_1|(1+\varphi(H))/\alpha_3 + |H|)\eta_2] dt.$$

Если существует пара H, C, являющаяся решением уравнения Сильвестра — Ляпунова, при котором выполняется (9), то при достаточно малых $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ и выбранных исходя из них $\eta_1 > 0$ и $\eta_2 > 0$ стохастический дифференциал будет отрицательно определенным, что обеспечивает устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ системы (1). Найдем $\alpha_i > 0$, $\eta_j > 0$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 1, 2$, так, чтобы выполнялось

$$\Delta_1\varepsilon/\varphi(H) > [\alpha_1|H| + \alpha_2|H(B_0+B_1)| + \alpha_3|HB_1|(1+\varphi(H))] \times \\ \times \varepsilon/\varphi(H) + |H|\eta_1/\alpha_1 + |H(B_0+B_1)|\eta_2/\alpha_2 + \\ + |HB_1|(1+\varphi(H))\eta_2/\alpha_3 + |H|\eta_2. \qquad (15)$$

Для этого выберем их таким образом, чтобы по этим переменным правая часть была минимальной. Приравнивая производную от правой части по каждой из переменных к нулю, получаем

$$\alpha_1 = \sqrt{\eta_1\varphi(H)/\varepsilon}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\eta_2\varphi(H)/\varepsilon}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\eta_2\varphi(H)/\varepsilon}.$$

Поэтому неравенство (15) примет вид

$$\Delta_1\varepsilon/\varphi(H) > 2\sqrt{\eta_1}|H|\sqrt{\varepsilon/\varphi(H)} + 2[|H(B_0+B_1)| + \\ + |HB_1|(1+\varphi(H))]\sqrt{\varepsilon/\varphi(H)}\sqrt{\eta_2} + |H|\eta_2.$$

Возьмем произвольное фиксированное число ζ, $0 < \zeta < 1$, и будем выбирать η_1 и η_2 таким образом, чтобы выполнялась система неравенств

$$\zeta\Delta_1\varepsilon/\varphi(H) > 2\sqrt{\eta_1}|H|\sqrt{\varepsilon/\varphi(H)},$$
$$(1-\zeta)\Delta_1\varepsilon/\varphi(H) > 2\sqrt{\eta_2}\sqrt{\varepsilon/\varphi(H)}\Delta_2 + |H|\eta_2.$$

Для этого достаточно, чтобы

$$\eta_1 \leqslant (\zeta/2|H|)^2 \varepsilon/\varphi(H),$$
$$\eta_2 \leqslant (1-\zeta)^2[\Delta_1\{[\Delta_2^2 + \Delta_1(1-\zeta)|H|]^{1/2} + \Delta_2\}^{-1}]^2 \varepsilon/\varphi(H). \qquad (16)$$

Если будет выполняться неравенство (9), то для стохастического дифференциала функции Ляпунова справедливы условия леммы 4. И при $t = T$ выполняется неравенство (8), что противоречит допущению (14). Следовательно, оно неверно и при $t > t_0$ будет выполняться (13). Учитывая неравенства (6), получаем, что при $t > t_0$ справедливо $M\{|x_Q(t)|^2\} < \delta\varphi(H)$. Из неравенств (16) следует вид зависимостей (11), (12) для $\eta_1(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon)$. Теорема доказана.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 611 с.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 530 с.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 368 с.
5. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.
6. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии.— Киев: Наук. думка, 1989.— 208 с.

Получено 09.10.90