УДК 517.956

Л. В. Фардигола, ассист. (Харьк. ун-т)

Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии

Получен критерий корректности в классе функций степенного роста краевой задачи в слое $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ для линейного дифференциального эволюционного уравнения с постоянными комплексными коэффициентами при двухточечном условии, содержащем два произвольных дифференциальных оператора по пространственным переменным (один из операторов может быть нулевым). Приведены примеры корректных и некорректных задач данного вида.

Одержано критерій коректності у класі функцій степеневого зростання крайової задачі у шарі $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ для лінійного диференціального еволюційного рівняння з постійними комплексними коефіцієнтами при двоточковій умові, яка містить два довільні диференціальні оператори відносно просторових змінних (один з операторів може бути нульовим). Наведено приклади коректних та некоректних задач даного вигляду.

В данной работе исследуется корректность в слое $\Pi(T) = \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $T \in \in \mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$, следующей краевой задачи:

$$\partial u(x, t)/\partial t = P(-iD_x)\, u(x, t), (x, t) \in \Pi(T), \tag{1}$$

$$A(-iD_x)\, u(x, 0) + B(-iD_x)\, u(x, T) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $P(\sigma)$, $A(\sigma)$, $B(\sigma)$— произвольные полиномы с постоянными комплексными коэффициентами, $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

Если $A(\sigma) \equiv A = \text{const}$, $B(\sigma) \equiv B = \text{const}$, то при $A = 0$ или $B = 0$ задача (1), (2) является задачей Коши, ее корректная разрешимость изучена в [1, 2], а при $AB \neq 0$ — нелокальной задачей, корректность которой исследована в [3]. Если $A(\sigma) \equiv \beta B(\sigma)$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то эта задача является частным случаем интегральной краевой задачи, критерий корректности которой получен в [4]. Задачи, близкие к (1), (2) изучались также в [5—7] и др.

В п. 1 данной работы получен критерий корректности задачи (1), (2) в классе функций степенного роста (теорема 1).

В п. 2, как следствия теоремы 1, получены достаточные условия корректности задачи (1), (2) в классе функций степенного роста в любом достаточно широком слое (следствия 2, 3). Приведены примеры краевых задач вида (1), (2) и для них найдены множества тех и только тех $T \in \mathbb{R}_+$, для которых эти задачи корректны. Выделены такие уравнения вида (1), для которых задача при условии (2) некорректна в некотором слое $\forall A(\sigma) \equiv \text{const}$ и $\forall B(\sigma) \equiv \text{const}$ в том и только том случае, когда в любом слое задача при условии (2) с любыми $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ некорректна.

1. Критерий корректности задачи (1), (2). Обозначим $H_{m,\gamma} = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,\gamma} = \max\limits_{|\alpha| \leqslant m} \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)| (1 + |x|)^{-\gamma} < +\infty\}$, $m \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant 0$. Здесь и ниже норма в $\mathbb{R}^k$ евклидова.

Определение 1. *Задача* (1), (2) *называется корректной в слое* $\Pi(T)$ *в классе функций степенного роста* $\gamma \geqslant 0$, *если* $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ $\exists C_{m,\gamma} > 0$ такие, что $\forall u_0(x) \in H_{m_1,\gamma}$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, t) \in H_{m,\gamma}$ ($\forall T \in [0, T]$), причем

$$\sup_{t \in [0,T]} \| u(x, t)\|_{m,\gamma} \leqslant C_{m,\gamma} \| u_0(x)\|_{m_1,\gamma}. \tag{3}$$

Обозначим $\Delta(\sigma) \equiv A(\sigma) + B(\sigma) \exp\{TP(\sigma)\}$; $R(\sigma, t) \equiv \equiv \exp\{tP(\sigma)\} / \Delta(\sigma)$; $N[H] = [\sigma \in \mathbb{R}^n : H(\sigma) = 0]$; $P_1(\sigma) \equiv \operatorname{Re} P(\sigma)$; $P_2(\sigma) \equiv \operatorname{Im} P(\sigma)$; $d(M, N) = \inf\{|\mu - \nu| : \mu \in M \wedge \nu \in N\}$, $M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 1. *Для того чтобы задача* (1), (2) *была корректна в слое* $\Pi(T)$ *в классе функций степенного роста* $\gamma \geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

$$\Delta(\sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\inf\{\operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in N[A]\} > -\infty, \tag{5}$$

$$\sup\{\operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in N[B]\} < +\infty. \tag{6}$$

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (4) *и хотя бы одно из условий* (5) *или* (6) *не выполнено. Тогда* $\exists u_0(x; \sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (*по* x $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$; σ — *параметр*) *такая, что* $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall m_1 \in \mathbb{N}$ $\forall t \in]0, T[$

$$\varlimsup_{|\sigma| \to \infty} [\| u(x, t; \sigma)\|_{m,\gamma} / \| u_0(x; \sigma)\|_{m_1,\gamma}] = +\infty, \tag{7}$$

где $u(x, t; \sigma)$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$ *является решением задачи* (1), (2) *с краевой функцией* $u_0(x; \sigma)$.

Доказательство. Обозначим $u_0(x;\sigma) \equiv \exp\{i(\sigma, x)\}$, тогда $u(x, t; \sigma) \equiv R(\sigma, t)\, u_0(x;\sigma)$ $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$ является решением задачи (1), (2). И если $\forall t \in]0, T[$ имеем $\varliminf\limits_{|\sigma|\to\infty} [\ln|R(\sigma, t)|/\ln|\sigma|] = r_0 = +\infty$, то получаем (7).

Пусть выполнено (4) и $\exists t_0 \in]0, T[$ такое, что $r_0 < +\infty$. Если множество $N[A]$ или $N(B]$ ограничено, то выполняется (5) или (6) соответственно. Если множество $N[A]$ неограничено, то при $\sigma \in N[A]$, $|\sigma| \to \infty$, имеем $\ln|R(\sigma, t_0)|/\ln|\sigma| \leqslant r_0 + 1$ и $\ln|B(\sigma)|/\ln|\sigma| \leqslant \deg B$. Значит, $\exists C \in \mathbb{R}$ такое, что

$$P_1(\sigma) > C\ln(2 + |\sigma|) \quad \forall \sigma \in N[A]. \tag{8}$$

Функция $\nu(r) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} : \exists \sigma \in \mathbb{R}^n [P_1(\sigma) = \mu \wedge A(\sigma) = 0 \wedge |\sigma| = r\}$ полуалгебраична и $\nu(r) = \xi r^\alpha(1 + o(1))$ при $r \to +\infty$, где $\xi \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [8, с. 424]. Из (8) получаем $\nu(r)/\ln(2 + r) = \xi[r^\alpha \ln(2 + r)](1 + o(1)) \geqslant C - 1 > -\infty$ при $r \to +\infty$, значит, либо $\xi \geqslant 0$ при $\alpha \in \mathbb{R}$, либо $\xi < 0$ и $\alpha \leqslant 0$, следовательно, выполнено (5). Аналогично, если множество $N[B]$ неограничено, то выполнено (6). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $N(r) = \{(\mu, \rho, \omega) : (\mu, \rho, \omega, r) \in N\}$, $M(r) = \{(\mu, \rho, \omega) : (\mu, \rho, \omega, r) \in M \wedge \mu = \exp(\rho)\}$ — *замкнутые множества, где* M *и* N — *некоторые полуалгебраические множества в* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{k+2}$ *и пусть*

$$N(r) \cap M(r) = \varnothing \; \forall r \geqslant 0. \tag{9}$$

Тогда $\exists C > 0$ *и* $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$d(N(r), M(r)) \geqslant C(1 + r)^\alpha \quad \forall r \geqslant 0, \tag{10}$$

и $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall r \geqslant 0$

$$\{(\mu, \rho, \omega) \in N(r) : |\rho| \geqslant \delta \wedge \exp(\rho - \varepsilon) \leqslant \mu \leqslant \exp(\rho + \varepsilon)\} = \varnothing. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим через M_0 пересечение проекции множества M на плоскость $(\mu; \rho)$ с множеством $\{(\mu, \rho): \mu = \exp(\rho)\}$, а через N_0 проекцию множества $N \cap M$ на ту же плоскость (N_0 — полуалгебраично [8, с. 421]). Числа компонент связности множеств $\partial N_0 \cap \partial M_0$ и M_0 конечны [9]. Отсюда с учетом (9) получаем, что множество $\bar{N}_0 \cap \bar{M}_0 = \partial N_0 \cap \partial M_0$ конечно (так как ∂N_0 — кусочно алгебраическая кривая, $\mu = \exp(\rho)$ — трансцендентная кривая, $M_0 \cap N_0 = \varnothing$, черта означает замыкание). Поскольку каждая из ветвей полуалгебраической функции, образующей ∂N_0, в любой точке $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ представима рядом Пюизе [8, с. 420], то, очевидно, выполняется (11).

Построим замкнутое полуалгебраическое множество L такое, что $L \supset M_0$ и $L \cap \bar{N}_0 = \partial N_0 \cap \partial M_0$. Используя упомянутое выше разложение в ряд Пюизе ветвей ∂N_0 в достаточно малой односторонней окрестности произвольной точки ρ^*, $(\mu^*, \rho^*) \in \partial N_0 \cap \partial M_0$ и разложение в ряд Тейлора в окрестности этой же точки функции $\mu = \exp(\rho)$, учитывая то, что эти ряды различны, строим замкнутое полуалгебраическое множество, обладающее всеми свойствами L при ρ, принадлежащих рассматриваемой односторонней окрестности. Такое же построение можно провести и при $\rho^* = +\infty$ и $\rho^* = -\infty$ (здесь мы учитываем то, что при достаточно большом $C > 0$ $\partial N_0 \cap \{(0, \rho) : \rho \leqslant -C\} = \varnothing$, поскольку $M_0 \cap N_0 = \varnothing$ и $\mu > 0$ $\forall (\mu, \rho) \in N_0$ по условию леммы). Осталось рассмотреть ρ, принадлежащие объединению конечного числа замкнутых конечных отрезков, не содержащих таких ρ^*, что $(\mu^*, \rho^*) \in \partial N_0 \cap \partial M_0$. На каждом таком отрезке легко построить замкнутый многоугольник, обладающий всеми свойствами L при ρ, принадлежащих этому отрезку. Таким образом, множество L с указанными выше свойствами построено.

В силу (9) имеем ($L(r) = \{(\mu, \rho, \omega) : (\mu, \rho) \in L \wedge (\mu, \rho, \omega, r) \in M\}$)

$$0 < d(N(r), L(r) \leqslant d(N(r), M(r)) \qquad \forall r \geqslant 0. \tag{12}$$

Поскольку $d(N(r), L(r) = \Gamma r^\beta(1 + o(1))$ при $r \to +\infty$, где $\Gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ [8, с. 424], то, учитывая (12), получаем (10). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $L = \{\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus (N[A] \cup N[B]: |A(\sigma)| = |B(\sigma)| \times \exp\{TP_1(\sigma)\}\}$ *и выполнено условие* (4). *Тогда множество* $P_2(L)$ *ограничено.*

Доказательство. Число компонент связности множества $L \cap \cap \{\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus (N[A] \cup N[B]) : \nu \operatorname{Im}[A(\sigma)/B(\sigma)] = \lambda \operatorname{Re}[A(\sigma)/B(\sigma)]\}$ конечно и не превышает N, где N не зависит от $(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^2$ [9].

Покажем, что для любой компоненты связности L^* множества L имеем $\operatorname{diam}\{TP_2(L^*)\} \leqslant 2\pi(N+3)$, где diam — диаметр множества. Предположим, что это не так и $\exists \xi, \eta \in L^*$ такие, что $TP_2(\xi) - TP_2(\eta) > 2\pi(N+3)$. Пусть $\Gamma \subset L^*$ —непрерывная самонепересекающаяся кривая, соединяющая точки ξ и η, а функция $g(z)$ непрерывна на кривой $-A(\Gamma)/B(\Gamma)$ и в каждой точке z этой кривой совпадает с одним из значений $\operatorname{Arg} z$. Ясно, что $\operatorname{diam}\{g(-A(\Gamma)/B(\Gamma))\} \leqslant 2\pi(N+2)$. Отсюда сразу видно, что $\exists \sigma_0 \in \Gamma$, для которого $\Delta(\sigma_0) = 0$, что противоречит (4). Таким образом, на любой связной компоненте множества L функция $P_2(\sigma)$ ограничена, а поскольку L имеет конечное число компонент связности [9], то множество $P_2(L)$ ограничено. Лемма доказана

Лемма 4. *Если выполнены условия* (4)—(6), *то* $\exists C > 0$, $\exists \rho \in \mathbb{R}$, *для которых верна оценка*

$$|\Delta(\sigma)| \geqslant C(1+|\sigma|)^\rho \qquad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим $\Omega(H, S, \theta) = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : d(\sigma, N[H]) < < S(1+|\sigma|^2)^{\theta/2}\}$, где $H(\sigma)$ — полином, $S \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{Z}$. Из (4) получаем $\eta(r) = d[N[A] \cap W(r), N[B] \cap W(r)] > 0$, где $W(r)$ — сфера радиуса r с центром в 0, значит, $\eta(r) \geqslant Lr^\xi$ $\forall r \geqslant 0$, здесь $L > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ [8, с. 424]. Пусть $\sigma \in \Omega(B, L/3, \varkappa)$, здесь $\varkappa < \xi$ будет выбрано ниже. Тогда [10].

$$|A(\sigma)| \geqslant A(1+|\sigma|)^{\alpha+\xi\beta}, \tag{14}$$

где $A > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta > 0$, если $N[A] \neq \varnothing$, и $\beta = 0$, если $N[A] = \varnothing$ Применяя теорему Лагранжа, с учетом (6) имеем $P_1(\sigma) \leqslant B$, $|B(\sigma)| \leqslant \leqslant B^*(1+|\sigma|)^{b-1+\varkappa}$, если $\varkappa < \min\{0, 1 - \deg P_1, \xi\}$. Здесь $B \in \mathbb{R}$, $B^* > 0$— некоторые константы, $b = \deg B$. Отсюда, учитывая (14), получаем $\forall \sigma \in \in \Omega(B, L/3, \varkappa)$ $|\Delta(\sigma)| \geqslant A(1+|\sigma|)^{\alpha+\xi\beta} - B^* \exp\{TB\}(1+|\sigma|)^{b-1+\varkappa}$. Учитывая непрерывность $\Delta(\sigma)$ и условие (4), получаем оценку вида (13) $\forall \sigma \in \in \Omega(B, L/3, \varkappa)$ при достаточно малом $\varkappa < 0$. Аналогично доказываем, что оценка вида (13) верна при достаточно малом $\varkappa < 0$ $\forall \sigma \in \Omega(A, L/3, \varkappa)$.

Обозначим $W = \mathbb{R}^n \setminus \{\Omega(A, L/3, \varkappa) \cup \Omega(B, L/3, \varkappa)\}$, где $\varkappa < 0$ достаточно мало, и оценим $|\Delta(\sigma)|$ снизу на множестве W. Множество

$$\Phi = \{\varphi = (\mu, \rho, \eta, \nu, \lambda, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^5 : \exists \sigma \in W \ [|A(\sigma)|/|B(\sigma)| = \mu \wedge TP_1(\sigma) = \\ = \rho \wedge TP_2(\sigma) = \eta \wedge -\operatorname{Re}[A(\sigma)/B(\sigma)] = \nu \wedge -\operatorname{Im}[A(\sigma)/B(\sigma)] = \lambda \wedge \\ \wedge |\sigma| = r \geqslant 0\}$$

полуалгебраично [8, с. 421]. Учитывая оценки $|A(\sigma)|$ и $|B(\sigma)|$, полученные выше, получаем, что если верна оценка

$$|1 - \exp\{g(\varphi)\}| \geqslant C(1+r)^\alpha \qquad \forall \varphi \in \Phi, \tag{15}$$

то $\forall \sigma \in W$ верна оценка вида (13). Здесь $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(\varphi) = \rho - - \ln \mu + i[\eta - \arg(\nu + i\lambda)]$, $\arg z \in [-\pi, \pi[$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно доказать (15).

Обозначим $S_0 = \{\varphi \in \Phi : \mu = \exp(\rho)\}$, $S(V, \beta) = \{\varphi \in \Phi : \exists \varphi_0 \in S_0 | \varphi - \varphi_0| < < V(1+r)^\beta\}$, $V > 0$, $\beta < 0$. При некотором $\delta > 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ имеем

$$|1 - \exp(z)| \geqslant |z - 2\pi ki|/2 \text{ при } |z - 2\pi ki| \leqslant \delta, \tag{16}$$

$$|1 - \exp(z)| \geqslant C(\delta) > 0 \text{ при } |z - 2\pi ki| \geqslant \delta. \tag{17}$$

Если $S_0 = \varnothing$, то выполняются (10) и (11) (см. лемму 2). Поскольку на любом компакте $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$|\rho - \ln \mu| \geqslant C\{d[(\mu, \rho), \{(\mu, \rho) : \rho = \ln \mu\}]\}^\omega \quad \forall (\mu, \rho) \in K,$$

где $C > 0$, $\omega > 0$ [11], то с учетом (16) и (17) получаем (15).

Пусть теперь $S_0 \neq \varnothing$. Если $\varphi \notin S(V, \beta)$ ($V > 0$ и $\beta > 0$ будут выбраны ниже), то, используя (16) и (17), непосредственно получаем (15). Пусть $\varphi \notin \notin S(V, \beta)$. Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$|1 - \exp\{g(\varphi)\}| \geqslant |1 - \exp\{i \operatorname{Im} g(\varphi_0)\}| - \exp\{V\} V (1 + r)^\beta. \qquad (18)$$

Оценим снизу $|1 - \exp\{g(\varphi)\}|$ при $\varphi \in S_0$. Найдем $M > 0$ такое, что $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|k| > M$, выполняется (см. лемму 3)

$$|g(\varphi)/i - 2\pi k| > 2\pi \quad \forall \varphi \in S_0, \qquad (19)$$

и обозначим $K = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \leqslant M\}$.

Далее мы будем доказывать оценку

$$|g(\varphi)/i - 2\pi k| \geqslant C'(1 + r)^{\alpha'} \qquad \forall \varphi \in S_0, \quad \forall k \in K, \qquad (20)$$

где $C' > 0$, $\alpha' \in \mathbb{R}$. Множество $\Phi_i = \{\psi = (\mu, \rho, \eta, \xi, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [-1, 1] \times \mathbb{R} : \exists \varphi \in \Phi \ [h_i(\nu, \lambda, \xi) = 0 \wedge H_i(\nu, \lambda) > 0]\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, полуалгебраично [8, с. 421]. Здесь $h_1 = h_3 = \lambda - \xi\nu$, $h_2 = h_4 = \nu - \xi\lambda$, $H_1 = -H_3 = \nu$, $H_2 = -H_4 = \lambda$.

Пусть сначала $i = 1$ и зафиксировано $\forall k \in K$, $\Xi(k) = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \leqslant 1 \wedge \eta = \operatorname{arctg} \xi + 2\pi k\}$, $\Sigma(r) = \{(\mu; \rho, \eta, \xi) : \mu = \exp \rho \wedge \psi \in \in \Phi_1\}$. Из (4) и леммы 2 получаем ($\forall (\eta, \xi) \in \Xi(k)$)

$$d[\mathbb{R}^2 \times \{(\eta, \xi)\}, \Sigma(r)] \geqslant C(\eta, \xi)(1 + r)^{\alpha(\eta, \xi)} \ \forall r \geqslant 0, \qquad (21)$$

где $C(\eta, \xi) > 0$, $\alpha(\eta, \xi) \in \mathbb{R}$. Ясно, что $d[\mathbb{R}^2 \times \{(\eta, \xi)\}, \Sigma(r)] = d[(\eta, \xi), \Theta(r)]$ $\forall r \geqslant 0$, где $\Theta(r)$ — проекция на плоскость (η, ξ) множества $\Sigma(r)$. Обозначим

$$f(\eta, \xi, r) \equiv \ln\{d[(\eta, \xi), \Theta(r)]\}/\ln(1 + r), \quad \omega(\eta, \xi) \equiv \varliminf_{r \to +\infty} f(\eta, \xi, r).$$

Покажем, что $\inf\{\omega(\eta, \xi) : (\eta, \xi) \in \Xi(k)\} > -\infty$. Если это не так, то выберем последовательность $\{(\eta_j, \xi_j)\} \subset \Xi(k)$ так, чтобы $(\eta_j, \xi_j) \to (\eta^*, \xi^*) \in \in \Xi(k)$, $j \to \infty$ и $\omega(\eta_j, \xi_j) < -j$ и последовательность $\{r_m\}$ так, чтобы $r_m \to +\infty$ и $f(\eta_j, \xi_j, r_m) \to \omega(\eta_j, \xi_j)$, $m \to \infty$. Легко видеть, что $f(\eta_j, \xi_j, r) \rightrightarrows f(\eta^*, \xi^*, r)$ при $j \to \infty$, $r \geqslant 1$. Но тогда выбор последовательностей $\{(\eta_j, \xi_j)\}$ и $\{r_m\}$ противоречит (21).

Итак, $\inf\{\omega(\eta, \xi) : (\eta, \xi) \in \Xi(k)\} \geqslant \omega > -\infty$, где $\omega < 0$.

Заменяя в проведенных выше выкладках функцию $f(\eta, \xi, r)$ на $h(\eta, \xi, r) \equiv -(1 + r)^\omega / d[(\eta, \xi), \Theta(r)]$, получаем

$$\Gamma = \inf\{\Gamma(\eta, \xi) : (\eta, \xi) \in \Xi(k)\} > 0, \text{ где } \Gamma(\eta, \xi) \equiv \varliminf_{r \to +\infty} [-h(\eta, \xi, r)]^{-1}.$$

Таким образом, в (21) постоянные $C > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ можно считать не зависящими от $(\eta, \xi) \in \Xi(k)$. Согласно [11]

$$|\eta - \operatorname{arctg} \xi - 2\pi k| \geqslant E\{d[(\eta, \xi), \Xi(k)\}^\zeta \qquad \forall (\eta, \xi) \in D,$$

где $E > 0$, $\zeta > 0$, $D = [-\pi/4, \pi/4] \times [-1,1]$. Учитывая (21) с постоянными α и C, отсюда получаем оценку вида (20) $\forall \psi \in \Phi_1$, $\forall k \in K$.

Аналогично оценки такого же типа получаем для множеств Φ_i при $i = = 2, 3, 4$. Тем самым, оценка (20) доказана. Из (19) и (20) с учетом (16) и (17) получаем $|1 - \exp\{i \operatorname{Im} g(\varphi)\}| \geqslant M(1 + r)^\omega$ $\forall \varphi \in \Phi$, где $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Отсюда, продолжая оценку (18), получаем, что при достаточно малых $V > > 0$ и $\beta < 0$ $\forall \varphi \in S(V, \beta)$ верна оценка вида (15). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (4)—(6). *Тогда для любого мультииндекса* α $\exists C(\alpha) > 0$, $\exists r(\alpha) \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$|D_\sigma^\alpha R(\sigma, t)| \leqslant C(\alpha)(1 + |\sigma|)^{r(\alpha)} \qquad \forall (\sigma, t) \in \Pi(T). \qquad (22)$$

Доказательство. Из легко проверяемой формулы

$$D_\sigma^\alpha R(\sigma, t) \equiv \sum_{j=1}^{|\alpha|} H_{j\alpha}(\sigma, t) \exp\{(t + jT) P(\sigma)\}/[\Delta(\sigma)]^{|\alpha|+1},$$

где α — произвольный мультииндекс, $H_{j\alpha}(\sigma, t)$ — полином по всем переменным, сразу следует (22) (при этом если $P_1(\sigma) \leqslant 0$, используем оценку (13) для $\Delta(\sigma)$, а если $P_1(\sigma) \geqslant 0$,— ту же оценку для $\Delta_1(\sigma) \equiv A(\sigma) \times \times \exp\{-TP(\sigma)\} + B(\sigma)$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Рассматривая функцию $u(x, t) \equiv \exp\{tP(\sigma_0) + i(\sigma_0, x)\}$, где $\Delta(\sigma_0) = 0$, убеждаемся в необходимости условия (4). Необходимость условий (5) и (6) непосредственно следует из леммы 1.

Докажем достаточность условий (4)—(6). Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим следующую «двойственную» задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$dv(\sigma, t)/dt = P(\sigma)\, v(\sigma, t), \quad (\sigma, t) \in \Pi(T),$$

$$A(\sigma)\, v(\sigma, 0) + B(\sigma)\, v(\sigma, T) = v_0(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

Ее решение $v(\sigma, t)$ при $\Delta(\sigma) \neq 0$ имеет вид $v(\sigma, t) \equiv R(\sigma, t)\, v_0(\sigma)$. В [3] при исследовании некоторой краевой задачи в слое $\Pi(T)$ решение соответствующей «двойственной» задачи представлялось в таком же виде (разумеется, с некоторой другой функцией $R^*(\sigma, t)$ вместо $R(\sigma, t)$). При этом была установлена разрешимость рассматриваемой в ней задачи из пространства $H_{m_1,\gamma}$ в пространство $H_{m,\gamma}$ в смысле определения 1 в предположении, что функция $R^*(\sigma, t)$ удовлетворяет оценкам вида (22). Поскольку (см. лемму 5) оценки (22) для $R(\sigma, t)$ выполнены, то этот факт (разрешимость) имеет место и для задачи (1), (2). Единственность задачи (1), (2) в классе $H_{m,\gamma}$ (m — произвольно) доказана в [12]. Теорема доказана.

2. Следствия теоремы 1. Примеры. В [13] было введено понятие квазирегулярности краевых условий: краевое условие является квазирегулярным, если для всякого уравнения (1) из единственности решения краевой задачи в некотором классе функций следует ее корректность в этом же классе. Из теоремы 1 и [12] следует, что краевые условия вида (2), вообще говоря, не являются квазирегулярными; исключение составляют лишь те случаи, когда полиномы $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ таковы, что множества $N[A]$ и $N[B]$ ограничены (при $n = 1$ это верно при всех $A(\sigma)\, B(\sigma) \not\equiv 0$).

Поскольку, как видно из теоремы 1, наличие свойства корректности задачи (1), (2) не зависит от выбора $\gamma \geqslant 0$, то ниже γ будем считать произвольным фиксированным неотрицательным числом и слова «в классе функций степенного роста γ» будем опускать.

Следствие 1. *Если для уравнения вида* (1) *с* $\deg P = 1$ *в некотором слое* $\Pi(T)$ $\forall A(\sigma)$, $B(\sigma)$ *таких, что* $A(\sigma) = \mathrm{const}$ *и* $B(\sigma) \equiv \mathrm{const}$, *задача* (1), (2) *некорректна, то ни при каких* $A(\sigma)$ *и* $B(\sigma)$ *ни в одном слое не существует корректной краевой задачи вида* (1), (2).

Доказательство. Если для уравнения (1) с $\deg P = 1$ в некотором слое $\Pi(T)$ не существует корректной задачи вида (1), (2) с $A(\sigma) \equiv \equiv \mathrm{const}$ и $B(\sigma) \equiv \mathrm{const}$, то (см. [14] и теорему 1) полиномы $P_1(\sigma) - P_1(0)$ и $P_2(\sigma) - P_2(0)$ линейно независимы ($n \geqslant 2$). Поэтому при изучении условий (4)—(6) без ограничения общности можно считать $P_1(\sigma) \equiv \sigma_1$, $P_2(\sigma) \equiv \sigma_2$.

Пусть $A(\sigma) \not\equiv 0$ и $B(\sigma) \not\equiv 0$. Тогда множество $L = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : |A(\sigma)| = = |B(\sigma)| \exp\{TP_1(\sigma)\} \setminus \{N[A] \cup N[B]\}$ неограничено по σ_2. Значит, $P_2(L)$ неограничено, следовательно, задача (1), (2) некорректна в любом слое (см. лемму 3 и теорему 1). Если $A(\sigma) \equiv 0$ или $B(\sigma) \equiv 0$, то не выполнено (5) или (6) соответственно, значит, задача (1), (2) некорректна ни в одном слое (см. теорему 1). Следствие доказано.

Из теоремы 1 сразу получаем следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть полином* $\mathrm{Re}\, P(\sigma)$ *ограничен снизу положительной постоянной и его старшая однородная компонента положительно определена, полином* $A(\sigma)$ *произволен, а* $B(\sigma)$ *таков, что* $N[B] = \varnothing$. *Тогда задача* (1), (2) *корректна в любом достаточно широком слое.*

Ниже использованы понятия гипоэллиптичности и сравнения дифференциальных операторов. Соответствующие определения см. в [8, с. 75, 39].

С л е д с т в и е 3. *Пусть полином* $\mathrm{Re}\,P(\sigma)$ *ограничен снизу положительной постоянной, операторы* $|A(-iD_x)|^2 u \mid B(-iD_x)|^2$ *гипоэллиптичны,* $|A(-iD_x)|^2$ *слабее, чем* $|B(-iD_x)|^2$ *и* $N[B] = \varnothing$. *Тогда задача* (1), (2) *корректна в любом достаточно широком слое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [8, с. 81] получаем $|A(\sigma)| / |B(\sigma)| \leqslant C$ $\forall \sigma \in R^n$, где $C > 0$. Отсюда сразу следует требуемое. Следствие доказано.

Обозначим через $\tau(P, A, B)$ множество тех и только тех $T \in \mathbb{R}_+$, для которых задача вида (1), (2) корректна в слое $\Pi(T)$.

Приведенный ниже пример 1 показывает, что условие $\deg P = 1$ в следствии 1 существенно. Из приведенных ниже примеров видно также, что условие ограниченности снизу полинома $\mathrm{Re}\,P(\sigma)$ в следствиях 2, 3 существенно (пример 3), но не является необходимым (пример 2).

П р и м е р ы. 1. Для краевой задачи

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + b^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] u(x, t), \quad (x, t) \in \Pi(T),$$

$$\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) u(x, 0) - u(x, T) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

($b \in \mathbb{R}$ — параметр) при $0 \leqslant b^2 < \pi/c$ $\tau(P, A, B) = \mathbb{R}_+$, при $b^2 \geqslant \pi/c$ $\tau(P, A, B) = \varnothing$; здесь $c = \sup\{\ln(1 + s^2)/s : s \in \mathbb{R}\}$. Отметим, что для данного уравнения ни в одном слое невозможна постановка корректной задачи вида (1), (2) с $A(\sigma) \equiv \mathrm{const}$ и $B(\sigma) \equiv \mathrm{const}$ (см. лемму 3 и теорему 1).

2. Для краевой задачи

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i\left[e^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - e\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right] u(x, t), \quad (x, t) \in \Pi(T),$$

$$-u(x, 0) + \left(e - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) u(x, T) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{23}$$

имеем $\tau(P, A, B) =]1/(2\pi), +\infty[$.

3. Краевая задача с условием (23) для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left\{i\left[1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - e\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right] + e\frac{\partial}{\partial x_2}\right\} u(x, t), \quad (x, t) \in \Pi(T),$$

имеет $\tau(P, A, B) = \bigcup\limits_{k=\overline{0, +\infty}} [2\pi k, 2\pi(k+1) - 1[\setminus \{0\}$.

1. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А.— 1938.— **1**, № 7.— С. 1—72.
2. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук.— 1955.— **10**, № 4.— С. 89—100.
3. *Борок В. М.* Критерий абсолютной $\bar{c}$-устойчивости уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения.— 1988.— **24**, № 3.— С. 438—444.
4. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 11.— С. 1546—1552.
5. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения.— 1981.— **17**, № 2.— С. 320—324.
6. *Савченко Г. Б.* О корректности одной нелокальной краевой задачи // Там же.— 1985.— **21**, № 8.— С. 1450—1453.
7. *Павлов Л. А.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Мат. сб.— 1977.— **103**, № 3.— С. 367—391.
8. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: В 4-х т.— М. : Мир, 1986.— Т. 2.— 456 с.
9. *Хованский А. Г.* Об одном классе систем трансцендентных уравнений // Докл. АН СССР. — 1980.— 255, № 4.— С. 804—807.
10. *Хермандер Л.* О делении обобщенных функций на полиномы // Математика: Сб. пер.— 1959.— 3, № 5.— С. 117—130.

11. *Lojasiewicz S.* Division d'une distribution par une fonction analytique des variables réelles// Comptes Rendus.— 1958.— **246**, N 5.— P. 683—686.
12. *Виленц И. Л.* Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН УССР. Секц. А.— 1974.— № 3.— С. 195—197.
13. *Борок В. М.* Квазирегулярные краевые задачи в полосе // Изв. вузов. Математика.— 1989.— № 11.— С. 3—9.
14. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности краевой задачи в слое для уравнений первого и второго порядка // Вестн. Харьк. ун-та. Динам. системы.— 1989.— № 334.— С. 55—65.

Получено 12.11.90