УДК 513.8

В. Г. Чернов, канд. физ.-мат. наук (Коломен. пед. ин-т)

О преобразовании Фурье нормы Хамминга

Пусть $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и H — норма Хамминга на линейном пространстве F^n_q над конечным полем. F_q. Изучается преобразование Фурье степени λ нормы H. Результат прилагается к описанию оператора Римана — Лиувилля в пространстве $\mathbb{C}$-значных функций на пространстве F^n_q.

Нехай $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і H — норма Хаммінга на лінійному просторі F^n_q над скінченним полем F_q. Вивчається перетворення Фур'є степені λ норми H. Результат застосовується до опису оператора Рімана — Ліувілля в просторі всіх $\mathbb{C}$-значних функцій на просторі F^n_q.

Обобщения преобразований типа свертки, в частности, классического преобразования Римана— Лиувилля [1], неоднократно рассматривались в различных работах (см., например, [2, 3]). В последнее время преобразования такого типа активно изучаются в пространствах функций на конечных объектах [4—7]. Интерес к полученным результатам объясняется, в первую очередь, возможными приложениями их к задачам теории кодирования, комбинаторики и других разделов дискретной математики. Содержателен также их теоретико-числовой аспект.

Данная работа развивает указанную тематику. Основным результатом статьи является теорема, описывающая носитель преобразования Фурье нормы Хамминга, которое, в свою очередь, оказывается тесно связанным с известными полиномами Кравчука.

1. Основные понятия. Пусть F_q, $q = p^s$, $s \in \mathbb{N}$, p — простое, — конечное поле порядка q, F_q^n — n-мерное пространство над этим полем. Для каждого $x \in F_q^n$ обозначим через $H(x)$ число ненулевых координат вектора x. Тем самым определена функция $H: F_q^n \to \{0, 1, \ldots, n\}$. Очевидно, она является нормой на линейном пространстве F_q^n. Пространство F_q^n с заданной на нем нормой H будем называть *пространством Хамминга*, а саму норму H — *нормой Хамминга.*

© В. Г. ЧЕРНОВ, 1992

Рассмотрим группу $U_n = \Delta_n \odot W_n \subset \mathrm{GL}(n;\ F_q^n)$, где Δ_n — подгруппа невырожденных диагональных матриц порядка n над полем F_q, W_n — подгруппа Вейля (подгруппа перестановок) группы $\mathrm{GL}(n;\ F_q)$. Очевидно,

$$|U_n| = (q-1)^n \cdot n!$$

Пусть S_n — пространство всех комплекснозначных функций на F_q^n. Действие группы $\mathrm{GL}(n;\ F_q)$ на пространстве S_n определим левыми сдвигами, т. е. $g(f)(x) = f(g^{-1}x)$ для всех $g \in \mathrm{GL}(n;\ F_q)$. Функцию $f \in S_n$ назовем *U_n-инвариантной*, если $g(f) = f$, $\forall\, g \in U_n$. Далее пространство U_n-инвариантных функций будем обозначать S_{U_n}. Например $H \in S_{U_n}$.

2. Сферы в пространстве Хамминга. Везде далее символом I_n мы обозначаем множество $\{0, 1, \dots, n\}$. Для произвольного $k \in I_n$ и произвольного $a \in F_q^n$ положим

$$\Omega_a^n(k) = \{x \in F_q^n \mid H(x-a) = k\}$$

(сфера радиуса k с центром в точке a). Сферу радиуса k и с центром в точке $x = 0$ будем обозначать $\Omega^n(k)$. Заметим, что

$$\Omega_a^n(k) = \Omega^n(k) + a.$$

Подчеркнем, что сфера $\Omega^n(k)$ инвариантна относительно действия группы U_n. Нетрудно видеть, что $\forall a \in F_q^n$, $\forall k \in I_n$

$$|\Omega^n(k)| = |\Omega_a^n(k)| = (q-1)^k \binom{n}{k}.$$

Очевидно, множество $\{\Omega^n(k) \mid k \in I_n\}$ образует разбиение пространства F_q^n. Из этого факта следует «формула интегрирования в полярных координатах»

$$\sum_{x \in F_q^n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{x \in \Omega^n(k)} f(x), \quad f \in S_n. \tag{1}$$

В частности, если $f \in S_{U_n}$, то формула (1) принимает вид

$$\sum_{x \in F_q^n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k (q-1)^k \cdot \binom{n}{k},$$

где $f_k = f \mid \Omega^n(k)$.

Следующее утверждение почти очевидно.

Лемма 1. *Если $f \in S_{U_n}$, то $f = \varphi_f \circ H$, где φ_f — некоторая комплекснозначная функция на множестве I_n.*

Для доказательства достаточно заметить, что искомая функция $\varphi_f : I_n \to \mathbb{C}$ определяется правилом $\varphi_f(k) = f_k$.

В заключение этого пункта отметим следующее. Для каждого $k \in I_n$ положим $e_k = \{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0\} \in \Omega^n(k)$ и рассмотрим отображение $\rho_k : U_n \to \Omega^n(k)$, определив его правилом $\rho_k(u) = u(e_k)$. Стационарная подгруппа $U_{n,k} = \rho_k^{-1}(e_k) \subset U_n$ точки e_k имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline W_k & 0 \\ \hline 0 & U_{n-k} \\ \hline \end{array}$$

Таким образом, сфера $\Omega^n(k)$ интерпретируется как однородное пространство $U_n/U_{n,k}$. Элементарный подсчет показывает, что

$$|U_{n,k}| = (q-1)^{n-k}\, k!\, (n-k)!$$

3. Преобрзование Фурье и **свертка функций.** Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье на пространстве S_n, отвечающее некоторому нетривиальному характеру χ аддитивной группы поля F_q, который далее везде предполагается фиксированным:

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv \tilde{f}(\xi) = \sum_{x \in F_q^n} f(x)\,\chi(\langle \xi, x\rangle),$$

где $\xi,\ x \in F_q^n$, $\langle \xi, x\rangle = \xi_1 \cdot x_1 + \ldots + \xi_n \cdot x_n$. Несложные вычисления показывают, что $\mathcal{F}^2[f] = q^n (f \circ \sigma)$ $(*)$, где σ — симметрия пространства F_q^n относительно начала координат. Из формулы $(*)$, в частности, следует: а) $\mathcal{F}^{-1}[f] = q^{-n}\mathcal{F}[f \circ \sigma]$; б) $\mathcal{F}^{-1}|S_n^+ = q^{-n}\mathcal{F}$, где $S_{(n)}^+$ — подпространство «четных» функций на F_q^n (т. е. функций таких, что $f \circ \sigma = f$). Поскольку $S_{U_n} \subset S_n^+$, следовательно, $\mathcal{F}^{-1}|S_{U_n} = q^{-n}\mathcal{F}$ также.

Укажем некоторые необходимые для дальнейшего нзложения свойства преобразования Фурье:

1) $\mathcal{F}[1] = q^n\delta$, где δ — дельта-функция на F_q^n;

2) $\sum_{\xi \in F_q^n} \mathcal{F}[f](\xi) = q^n f(0), \quad \forall f \in S_n$;

3) $\mathcal{F}[S_{U_n}] = S_{U_n}$.

Если $f,\ g \in S_n$, то их свертка $f*g$ определяется, как известно формулой

$$(f*g)(\xi) = \sum_{x \in F_q^n} f(x)\,g(\xi - x).$$

Следует заметить, что если $f,\ g \in S_{U_n}$, то $f*g \in S_{U_n}$.

4. Функция $\varkappa_{n,k}$. Рассмотрим сферу $\Omega^n(k)$ и пусть $\delta_{n,k}$ — ее *характеристическая функция.* Ясно, что $\delta_{n,0} = \delta$ и $\delta_{n,k} \in S_{U_n}$ для $\forall k \in I_n$. Кроме того, заметим, что $\forall f \in S_n$ справедливо представление

$$f = \sum_{k=0}^{n} f_k \delta_{n,k},$$

где, как говорилось выше, $f_k = f\,|\,\Omega^n(k)$. Положим по определению [8]

$$\varkappa_{n,k} = \mathcal{F}[\delta_{n,k}]. \tag{2}$$

Предложение 1. *Для любого* $k \in I_n$ *выполняются соотношения:*

1) $\varkappa_{n,k} \in S_{U_n}$;

2) $\varkappa_{n,k}(0) = (q-1)^k \binom{n}{k}$;

3) $\sum_{k=0}^{n} \varkappa_{n,k} = q^n\delta$; 4) $\sum_{\xi \in F_q^n} \varkappa_{n,k}(\xi) = q^n\delta_n$;

где $\delta_n : I_n \to \mathbb{C}$ такая, что $\delta_n(0) = 1$, $\delta_n(k) = 0$ *для всех* $k > 1$;

5) $\varkappa_{n,k} * \varkappa_{n,l} = q^n \cdot \begin{cases} \varkappa_{n,k}, & k = l, \\ 0, & k \neq l; \end{cases}$

6) $\sum_{k,l=1}^{n} \varkappa_{n,k}\varkappa_{n,l} = q^{2n}\delta.$

Доказательство. 1) Это свойство — следствие того, что $\delta_{n,k} \in S_{U_n}$;

2) $\varkappa_{n,k}(0) = \sum_{x \in F_q^n} \delta_{n,k}(x) = \sum_{x \in \Omega^n(k)} 1 = |\,\Omega^n(k)|$;

3) так как $\sum_{k=0}^{n} \delta_{n,k} = 1$, то

$$\mathcal{F}[1] = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{F}[\delta_{n,k}] = \sum_{k=0}^{n} \varkappa_{n,k} = q^n \delta;$$

4) из свойств преобразования Фурье имеем

$$\sum_{\xi \in F_q^n} \varkappa_{n,k}(\xi) = q^{-n} \delta_{n,k} = \begin{cases} q^n, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0; \end{cases}$$

5) так как

$$\delta_{n,k} \cdot \delta_{n,l} = \begin{cases} \delta_{n,k}, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

то

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta_{n,k}] * \mathcal{F}^{-1}[\delta_{n,l}] = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}[\delta_{n,k}], & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

и, поскольку $\delta_{n,k} \in S_{U_n}$, то для всех $k \in I_n$

$$q^{-n} \mathcal{F}[\delta_{n,k}] * q^{-n} \mathcal{F}[\delta_{n,l}] = \begin{cases} q^{-n} \mathcal{F}[\delta_{n,k}], & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases}$$

т. е.

$$\varkappa_{n,k} * \varkappa_{n,l} = q^n \cdot \begin{cases} \varkappa_{n,k}, & k = l \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Для доказательства свойства 6 заметим, что

$$1 * 1 = \sum_{k=0}^{n} \delta_{n,k} * \sum_{l=0}^{n} \delta_{n,l} = \sum_{k,l=0}^{n} (\delta_{n,k} * \delta_{n,l}) = q^n.$$

Применяя к обеим частям этого равенства преобразование Фурье, получаем искомое, что и завершает доказательство.

Замечание 1. Легко видеть, что

$$(\delta_{n,k} * \delta_{n,l})(\xi) = |\Omega^n(k) \cap (\Omega^n(l) + \xi)|. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$Z_{k,l}^n(\xi) = |\Omega^n(k) \cap (\Omega^n(l) + \xi)|.$$

Очевидно, $Z_{k,l}^n \in S_{U_n}$, $Z_{k,l}^n = Z_{l,k}^n$ и $\sum_{k,l=0}^{n} Z_{k,l}^n = q^n$. Применим к обеим частям равенства (3) преобразование Фурье. Получим $\varkappa_{n,k} \cdot \varkappa_{n,l} = \mathcal{F}[Z_{k,l}^n]$, откуда немедленно вытекает

$$Z_{k,l}^n = q^{-n} \mathcal{F}[\varkappa_{n,k} \cdot \varkappa_{n,l}]. \tag{4}$$

Возвратимся к функции $\varkappa_{n,k}$. Из определения и того, что $\varkappa_{n,k} \in S_{U_n}$, имеем

$$\varkappa_{n,k}(\xi) = \sum_{x \in \Omega^n(k)} \chi(x_1 + \ldots + x_{H(\xi)}).$$

Несложными комбинаторными рассуждениями можно показать, что

$$\sum_{x \in \Omega^n(k)} \chi(x_1 + \ldots + x_{H(\xi)}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (q-1)^{k-i} \binom{H(\xi)}{i} \binom{n - H(\xi)}{k - i}.$$

Для каждого $\nu \in I_n$ обозначим

$$Q_{n,k}(\nu) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (q-1)^{k-i} \binom{\nu}{i} \binom{n-\nu}{k-i}.$$

Таким образом, функции $Q_{n,k}$, $k \in I_n$, есть не что иное, как ограничение на I_n известных *полиномов Кравчука*. Итак, из (5) следует $\varkappa_{n,k} = Q_{n,k} \circ H$.

Замечание 2. Рассмотрим формулу (4). Поскольку

$$\varkappa_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} Q_{n,k}(i)\, \delta_{n,i}, \qquad \forall\, k \in I_n,$$

то

$$\varkappa_{n,k} \cdot \varkappa_{n,l} = \sum_{i=0}^{n} Q_{n,k}(i)\, Q_{n,l}(i)\, \delta_{n,i}, \qquad \forall\, k, l \in I_n.$$

Отсюда получаем

$$\angle_{k,l}^{n} = q^{-n} \sum_{i=0}^{n} Q_{n,k}(i)\, Q_{n,l}(i)\, \varkappa_{n,i}. \tag{6}$$

Итак, формула (6) для каждого $\xi \in F_q^n$ дает число точек пересечения сфер $\Omega^n(k)$ и $\Omega_\xi^n(l)$.

Если вычислить значения обеих частей равенства (6) в точке 0, то получим следующее тождество для функций $Q_{n,k}$, $k \in I_n$:

$$\sum_{i=0}^{n} Q_{n,k}(i)\, Q_{n,l}(i)\, (q-1)^i \binom{n}{i} = \begin{cases} q^n (q-1)^k \binom{n}{k}, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

5. Функция H^λ и ее преобразование Фурье. Выше мы определили функцию $H\colon F_q^n \to I_n$ соответствием $F_q^n \ni x \mapsto H(x) \in I_n$. Для любого $\lambda \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ рассмотрим функцию H^λ. Очевидно,

$$H^\lambda = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \delta_{n,k}. \tag{7}$$

Здесь и далее полагаем $0^0 = 1$

Предложение 2. *Для любого* $\lambda \in \mathbb{N}_0$:

1) $\displaystyle\sum_{x \in F_q^n} H^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda (q-1)^k \binom{n}{k}$;

2) $\displaystyle\mathcal{F}[H^\lambda] = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \varkappa_{n,k}$;

3) $\displaystyle\sum_{\xi \in F_q^n} \mathcal{F}[H^\lambda](\xi) = \begin{cases} q^n, & \lambda = 0, \\ 0, & \lambda \neq 0. \end{cases}$

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Для доказательства свойства 2 используем представление (7). Получаем $\forall\, \lambda \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{F}[H^\lambda] = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \mathcal{F}[\delta_{n,k}] = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \varkappa_{n,k}.$$

3) В силу соответствующего свойства функции $\varkappa_{n,k}$ имеем

$$\sum_{\xi \in F_q^n} \mathcal{F}[H^\lambda](\xi) = \sum_{\xi \in F_q^n} \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \varkappa_{n,k}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \sum_{\xi \in F_q^n} \varkappa_{n,k}(\xi) = \begin{cases} q^n, & \lambda = 0, \\ 0, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Предложение 3. *Для всех* $\lambda \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{F}[H^\lambda] = \Gamma_q(n;\ \lambda) \quad (P_n \circ H),$$

где $\Gamma_q(n;\ \lambda) = (-1)^n q^n n^{\lambda-1}/(n-1)!$, *а* P_n — *некоторый унитарный полином степени* n *над полем* $\mathbf{Q}$.

Доказательство. Как известно, $\varkappa_{n,k} = Q_{n,k} \circ H$, где $Q_{n,k}$ — полином степени k над полем $\mathbf{Q}$. Без труда устанавливается, что этот полином имеет старший член, равный $(-1)^k q^k/k!$ Следовательно, $\mathcal{F}[H^\lambda]$ есть $P_n \circ H$, где P_n — некоторый полином степени n со старшим членом $(-1)^n q^n n^{\lambda-1}/(n-1)!$ над полем $\mathbf{Q}$.

Для описания носителя функции* $\mathcal{F}[H^\lambda]$ нам понадобятся некоторые комбинаторные понятия. Введем их. Пусть X и Y — два непустых множества порядка m и n соответственно. Обозначим через $D(n;\ m)$ число сюръекций из множества X на множество Y. Очевидно, если $m \leqslant n-1$, то $D(n;\ m)=0$. Если же $m \geqslant n$, то $D(n;\ m) > 0$. В частности, $D(n;\ n) = n!$. Справедлива следующая формула (см. например, [9]):

$$D(n;\ m) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i}\, i^m \binom{n}{i}. \tag{8}$$

Заметим, что функция D определена на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Удобно, однако, ее продолжить на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, полагая

$$D(n;\ 0) = D(0;\ m) = 0, \quad \forall\, n,\ m \in \mathbb{N}; \quad D(0,\ 0) = 1.$$

При таком доопределении формула (8) остается верной и на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ функцию D_k:

$$D_k(n;\ m) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} (i+k)^m \binom{m}{i}.$$

Очевидно, $D_0(n;\ m) = D(n,\ m)$.

Лемма 2. *Для всякого* $k \in \mathbb{N}_0$ *справедливо равенство*

$$D_k(n;\ m) = \sum_{j=0}^{m} k^j \binom{m}{j} \cdot D(n;\ m-j). \tag{9}$$

Доказательство.

$$D_k(n;\ m) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} (i+k)^m \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} i^{m-j} k^j \binom{n}{i} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} k^j \binom{m}{j} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i}\, i^{m-j} \binom{n}{i} = \sum_{j=0}^{m} k^j \binom{m}{j} \cdot D(n;\ m-j).$$

Следствие. *Для всякого* $k \in \mathbb{N}_0$ $D_k(n;\ m) = 0$, *если* $m \leqslant n-1$; $D_k(n;\ m) > 0$, *если* $m \geqslant n$.

Доказательство. Для $k=0$ это следует из того, что $D_0(n;\ m) = D(n;\ m)$. Если $k > 0$, то это — непосредственное следствие формулы (9).

Теорема 1. *Для каждого* $\lambda \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}[H^\lambda] = \{\xi \in F_q^n \mid H(\xi) \leqslant \lambda\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{F}[H^\lambda](\xi) = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \varkappa_{n,k}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k^\lambda \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i (q-1)^{k-i} \binom{H(\xi)}{i} \times \right.$$

* Как известно, носитель supp f функции f определяется как замыкание множества точек, в которых эта функция отлична от нуля. В случае, когда функция задана на конечном множестве, ее носитель есть в точности множество точек, в которых она отлична от нуля.

$$\times \binom{n-H(\xi)}{k-i}\Bigg) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{H(\xi)}{i}(q-1)^{-i}\times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n}(q-1)^k k^\lambda \binom{n-H(\xi)}{k-i} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{H(\xi)}{i}(q-1)^{-i}\times$$

$$\times \sum_{k=i}^{n}(q-1)^k k^\lambda \binom{n-H(\xi)}{k-i} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{H(\xi)}{i}\times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n-H(\xi)}(q-1)^s (i+s)^\lambda \binom{n-H(\xi)}{s} = \sum_{s=0}^{n-H(\xi)}(q-1)^s \binom{n-H(\xi)}{s}\times$$

$$\times \sum_{i=0}^{H(\xi)}(-1)^i (i+s)^\lambda \binom{H(\xi)}{i} =$$

$$= (-1)^{H(\xi)} \sum_{s=0}^{n-H(\xi)}(q-1)^s \binom{n-H(\xi)}{s} D_s(H(\xi);\ \lambda). \tag{10}$$

В соответствии со следствием из леммы 2 имеем: если $\lambda \leqslant H(\xi)-1$, то $\mathcal{F}[H^\lambda](\xi)=0$; если $\lambda \geqslant H(\xi)$, то $\mathcal{F}[H^\lambda](\xi)\neq 0$.

Следствие. $\forall \lambda \geqslant n$ $\operatorname{supp}\mathcal{F}[H^\lambda] = F_q^n$

Замечание 3. Если в формуле (10) положить $\lambda = H(\xi)$, то получаем

$$\mathcal{F}[H^{H(\xi)}](\xi) = (-1)^{H(\xi)} H(\xi)!\ q^{n-H(\xi)}.$$

Замечание 4. Из формулы (10) непосредственно следует, что для любого $\xi \in F_q^n$ и любого $\lambda \in \mathbb{N}_0$ $\mathcal{F}[H^\lambda](\xi) \in \mathbb{Z}$.

6. Преобразование Римана — Лиувилля. Для каждого $\lambda \in \mathbb{N}_0$ определим оператор Римана — Лиувилля $R_\lambda\colon S_n \to S_n$ формулой

$$R_\lambda f = f * H^\lambda. \tag{11}$$

Выясним, когда этот оператор обратим, и в этом случае найдем для него формулу обращения. Пусть $R_\lambda f = f_\lambda$. Переходя в (11) к Фурье-образам, получаем

$$\mathcal{F}(f_\lambda) = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[H^\lambda],$$

откуда заключаем, что если $\mathcal{F}[H^\lambda]$ не имеет нулей, то

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f_\lambda]/\mathcal{F}[H^\lambda],$$

и, таким образом,

$$f = f_\lambda * \mathcal{F}^{-1}[1/\mathcal{F}[H^\lambda]].$$

Из теоремы о носителе функции $\mathcal{F}[H^\lambda]$ окончательно получаем следующее: *для всех $\lambda \geqslant n$ оператор R_λ обратим: если $\lambda \leqslant n-1$, то функция f не может быть восстановлена в*

$$(q-1)^{\lambda+1}\binom{n}{\lambda+1} + \ldots + (q-1)^n \binom{n}{n}$$

точках (именно такое число нулей имеет в этом случае функция $\mathcal{F}[H^\lambda]$). Если теперь ввести в рассмотрение подпространство

$$S_n^\lambda = \{f \in S_n \mid \mathcal{F}[H^\lambda](\xi) = 0, \quad H(\xi) \leqslant \lambda\},$$

то, очевидно, $S_n^\lambda = \ker R_\lambda$.

В заключение приведем явное выражение f через f_λ для $\lambda \geqslant n$:

$$f(x) = q^{-n} \sum_{\xi \in F_q^n} f_\lambda (x - \xi) \sum_{s=0} \frac{Q_{n,s}(H(\xi))}{\sum\limits_{k=0}^{n} k^\lambda Q_{n,k}(s)} .$$

1. *Хилли Е., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
2. *Семянистый В. И.* Некоторые интегральные преобразования и интегральная геометрия в эллиптическом пространстве // Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу Моск. ун-та. — 1963.— Вып. XII.— С. 397—443.
3. *Чернов В. Г.* Преобразование Радона в аффинном пространстве над локально компактным несвязным непрерывным полем // Уч. зап. МОПИ.— 1985.— Вып. 262.— № 13.— С. 236—255.
4. *Kung J.* The Radon transform of a combinatorial geometry // J. Combin. Theory A.— 1974.— P. 97—102.
5. *Kung J.* Radon transform in combinatories and latice theory // Contemp. math.— 1986.— 57.— P. 33—74.
6. *Diaconis P., Graham R.* The Radon transform on Z_2^n // Pacif. J. math.— 1985.— 118.— N 2.— P. 323—345.
7. *Fraucl P., Graham R.* The Radon transform on Abelian Groups // J. Combin. Theory A.— 1987.— 4.— P. 168—171.
8. *Чернов В. Г.* О преобразовании Радона в пространствах Хамминга // Изв. выс. учеб. заведений. Математика.— 1990.— № 10.— С. 50—55.
9. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М. : Наука, 1982.— 384 с.

Получено 02.11.90