УДК 512.547.21

А. В. Романовский, д-р физ.-мат. наук,
А. В. Сементовский, мл. науч. сотр.
(Гомел. отд-ние Ин-та математики АН Беларуси)

О существовании нормального дополнения к холловской подгруппе

Получено достаточное условие существования нормального дополнения к холловской подгруппе в зависимости от степеней определенного множества неприводимых характеров группы.

Одержана достатня умова існування нормального доповнення до холовської підгрупи в залежності від степенів визначеної множини незбіжних характерів групи.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными и все характеры соответствуют представлениям над полем комплексных чисел.

Для группы G ее коммутант обозначим через G', а подгруппу Фраттини — через $\Phi(G)$. Множество всех неприводимых компонент характера χ группы G обозначим $\mathrm{Irr}(\chi)$. Для характера χ и фиксированного множества простых чисел π запись $\chi(1)_\pi$ означает наибольший делитель числа $\chi(1)$, являющийся π-числом.

Группа называется π-обособленной, если она имеет нормальный ряд, каждый фактор которого является либо π-, либо π'-группой.

Неприводимый характер χ π-обособленной группы G называется π-специальным [1], если $\chi(1)$ — π-число и для любых субнормальной подгруппы N группы G и характера ψ из $\mathrm{Irr}(\chi_N)$ детерминантный порядок ψ есть π-число. Множество всех π-специальных характеров группы G обозначается через $\mathfrak{X}_\pi(G)$. Характер, являющийся произведением π- и π'-специального характеров группы, называется π-разложимым характером этой группы [1].

Пусть группа G π-обособлена. Для нее будем рассматривать пары вида (H, θ), где H — подгруппа группы G, а $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$. Запись $(H, \theta) \subset (R, \chi)$ означает $H \subset R$ и $\theta \in \mathrm{Irr}(\chi_H)$. Пара (S, θ), где $S \lhd\lhd G$ и θ — π-разложимый характер S, называется π-разложимой субнормальной парой группы G [2]. Множество π-разложимых субнормальных пар группы G обозначим через $\mathfrak{F}(G)$, а множество максимальных элементов $\mathfrak{F}(G)$ — через $\mathfrak{F}^*(G)$ [2].

В силу теоремы 3.2 [2] для произвольного неприводимого характера χ группы G можно выбрать $(S, \eta) \in \mathfrak{F}^*(G)$ так, чтобы $\eta \in \mathrm{Irr}(\chi_s)$. Подгруппу группы G, максимальную среди подгрупп G, нормализующих S и стабилизирующих η, обозначим через T. Теорема 4.4 из [2] утверждает, что существует неприводимый характер ξ группы T такой, что $\eta \in \mathrm{Irr}(\xi_s)$ и $\xi^G = \chi$. Пара (T, ξ) называется стандартной индуцирующей парой для χ [2]. В § 4 [2] доказано, что (T, ξ) единственна с точностью до сопряженности. Теперь для данного характера χ можно построить цепь пар

$$(T, \xi) = (T_0, \xi_0) \supset (T_1, \xi_1) \supset \ldots \supset (T_k, \xi_k) = (T_{k+1}, \xi_{k+1}), \qquad (*)$$

в которой пара (T_i, ξ_i) является стандартной индуцирующей парой для ξ_{i-1}. Из § 4 [2] следует, что цепь $(*)$ стабилизируется на паре (T_k, ξ_k) точно тогда, когда характер ξ_k π-разложим.

Множество таких неприводимых характеров χ группы G, для которых в цени (*) характер ξ_k является π-специальным, обозначается [2] через $B_\pi(G)$.

Неприводимый характер α S_π-подгруппы H π-обособленной группы G называется характером Фонга [2], если существует характер $\chi \in B_\pi(G)$ такой, что $\alpha \in \mathrm{Irr}(\chi_H)$ и $\alpha(1) = \chi(1)_\pi$.

В остальной терминологии работы будем следовать [3].

Хорошо известная теорема Томпсона [4] утверждает, что группа имеет нормальное дополнение к силовской p-подгруппе, если степени всех ее нелинейных неприводимых характеров делятся на простое число p. Оказывается, для π-обособленной группы G можно утверждать даже о нормальном дополнении к определенной S_π-подгруппе, сохранив требование к степеням нелинейных неприводимых характеров только из $B_\pi(G)$.

Теорема. *Пусть для S_π-подгруппы H конечной π-обособленной группы G будет $H' \subseteq \Phi(H)$. Если среди степеней нелинейных неприводимых характеров из $B_\pi(G)$ нет π'-чисел, то G имеет нормальное дополнение к H.*

Доказательство. Определим $\mathfrak{G} = \{\chi \mid \chi \in B_\pi(G),\ \chi(1) = 1\}$ и $N = \bigcap \{\mathrm{Ker}\,\chi \mid \chi \in \mathfrak{G}\}$. Из леммы 5.4 [2] следует $\mathfrak{G} = \{\chi \mid \chi \in X_\pi(G),\ \chi(1) = 1\} = \{\chi \mid \chi \in X_\pi(G),\ \mathrm{Ker}\,\chi \supseteq G'\}$.

По лемме 2.22 [3] между множествами характеров $\{\chi \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G),\ \mathrm{Ker}\,\chi \supseteq G'\}$ и $\{\bar\chi \mid \bar\chi \in \mathrm{Irr}(G/G')\}$ существует взаимно однозначное соответствие $\chi \leftrightarrow \bar\chi$ по правилу: $\chi(g) = \bar\chi(gG')$ для всех g из G. Легко убедиться, что ядра соответствующих при этом характеров связаны соотношением $\mathrm{Ker}\,\bar\chi = \mathrm{Ker}\,\chi/G'$.

Докажем, что аналогичное соответствие существует между множествами $\{\chi \mid \chi \in X_\pi(G),\ \mathrm{Ker}\,\chi \supseteq G'\}$ и $\{\bar\chi \mid \bar\chi \in X_\pi(G/G')\}$.

Пусть $\chi \in X_\pi(G)$ и $\mathrm{Ker}\,\chi \supseteq G'$. Определим $\bar\chi \in \mathrm{Irr}(G/G')$ по правилу $\bar\chi(gG') = \chi(g)$ для всех $g \in G$. Чтобы установить, что $\bar\chi \in X_\pi(G/G')$, достаточно доказать, что для произвольной субнормальной подгруппы M/G' группы G/G' детерминантный порядок характера $\bar\chi_{M/G'}$ есть π-число. Итак, $o(\bar\chi_{M/G'}) = |M/G'|/|\mathrm{Ker}\,\bar\chi_{M/G'}| = |M/G'|/|\mathrm{Ker}\,\chi \cap M/G'| = |M|/|\mathrm{Ker}\,\chi \cap M| = |M\,\mathrm{Ker}\,\chi|/|\mathrm{Ker}\,\chi| \,|\, |G|/|\mathrm{Ker}\,\chi| = o(\chi)$. Так как $o(\chi)$ — π-число, то и $o(\bar\chi_{M/G'})$ также является π-числом.

Пусть теперь $\bar\chi \in X_\pi(G/G')$. Определим $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ по правилу $\chi(g) = \bar\chi(gG')$ для всех g из G. Пусть $M \lhd\lhd G$. Покажем, что $o(\chi_M)$ — π-число: $o(\chi_M) = |M|/|\mathrm{Ker}\,\chi_M| = |M|/|\mathrm{Ker}\,\chi \cap M| = |M\,\mathrm{Ker}\,\chi|/|\mathrm{Ker}\,\chi| \,|\, |G|/|\mathrm{Ker}\,\chi| = |G/G'|/|\mathrm{Ker}\,\bar\chi| = o(\bar\chi)$ — π-число. Значит, $\chi \in X_\pi(G)$.

Таким образом, доказано, что между множествами характеров $\{\chi \mid \chi \in X_\pi(G),\ \mathrm{Ker}\,\chi \supseteq G'\}$ и $\{\bar\chi \mid \bar\chi \in X_\pi(G/G')\}$ существует определенное выше взаимно однозначное соответствие. Из этого соответствия следует, что $N/G' = \bigcap \{\mathrm{Ker}\,\bar\chi \mid \bar\chi \in X_\pi(G/G')\}$. Так как группа G/G' абелева, то ее $S_{\pi'}$-подгруппа нормальна в G/G' и в силу следствия 4.2 [1] принадлежит ядру всякого характера из $X_\pi(G/G')$. Отсюда следует $G = HN$.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ множество всех линейных характеров группы H. В силу теоремы В [5] всякий характер α из $\mathfrak{H}$ является характером Фонга. Это значит, что для α существует характер $\chi \in B_\pi(G)$ такой, что $\alpha \in \mathrm{Irr}(\chi_H)$. По теореме 8.1 [2] $\chi(1)_\pi = \alpha(1)$, поэтому $\chi(1)$ — π'-число. Следовательно, $\chi(1) = 1$ и $\chi_H = \alpha$.

Итак, мы получили, что всякий линейный характер группы H является ограничением на H некоторого характера из $\mathfrak{G}$. С другой стороны, очевидно, что ограничение произвольного характера из $\mathfrak{G}$ на H принадлежит $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим $N \cap H$: $N \cap H = \bigcap \{\mathrm{Ker}\,\chi_H \mid \chi \in \mathfrak{G}\} = \bigcap \{\mathrm{Ker}\,\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{H}\} = H' \subseteq \Phi(H)$.

Итак, $N \lhd G$, $NH = G$ и $N \cap H \subseteq \Phi(H)$. Применяя теорему 4.4.6 [6], получаем, что группа N имеет нормальное дополнение к своей S_π-подгруппе. Следовательно, и группа G обладает нормальным дополнением к S_π-подгруппе. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа, где p — простое число. Если степень всякого нелинейного характера из $B_p(G)$ делится на p, то G имеет нормальное дополнение к силовской p-подгруппе.*

Для простого числа q и группы G через $\mathrm{IBr}_q(G)$ обозначим множество неприводимых брауэровских характеров группы G, соответствующих неприводимым модулярным представлениям группы G над полем характеристики q.

С л е д с т в и е 2. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа и q — простое число, отличное от p. Если для всякого брауэровского характера $\varphi \in \mathrm{IBr}_q(G)$ справедливо $\varphi(1) = 1$ либо $p \mid \varphi(1)$, то G имеет нормальное дополнение к силовской p-подгруппе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 11.1 [2] существует инъективное отображение $B_p(G) \to \mathrm{IBr}_q(G)$ по правилу $\chi \to \chi^*$, где звездочка означает ограничение на q'-элементы группы G. Остается применить теорему.

С л е д с т в и е 3. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа, H — ее $S_{p'}$-подгруппа и $H' \subseteq \Phi(H)$. Если для всякого брауэровского характера $\varphi \in \mathrm{IBr}_p(G)$ из $\varphi(1) = p^\alpha$ следует $\alpha = 0$, то G имеет нормальную силовскую p-подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы и следствия 10.3 [2].

1. *Gajendragadkar D. A.* Characteristic Class of Characters of Finite π-Separable groups // J. Algebra.— 1979.— 59.— P. 237—259.
2. *Isaacs I. M.* Characters of π-separable groups // Ibid.— 1984.— 86.— P. 98—128.
3. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups.— New York : Acad. press, 1976.— 303 p.
4. *Thompson J. G.* Normal p-complements and irreducible characters // J. Algebra.— 1970.— 14.— P. 129—134.
5. *Isaacs I. M.* Fong characters in π-separable groups // Ibid.— 1986.— 99.— P. 89—107.
6. *Huppert B.* Endliche Gruppen.— Berlin etc.: Springer, 1967.— Bd. 1.— 793 p.

Получено 12.11.91