УДК 519.41/47

В. А. Крекнин, канд. физ.-мат. наук,
В. Ф. Малик, ст. преп. (Херсон. пед. ин-т)

Конечные p-группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами

Дано описание конечных p-групп указанного класса для $p > 2$.

Дано опис скінченних p-груп указаного класу для $p > 2$.

Одним из направлений в развитии теории групп является исследование групп с определенной системой дополняемых подгрупп. Этому вопросу посвящено немало работ (см., например, [1—5]). В данной статье изучается строение конечных p-групп (p — простое число, $p > 2$), в которых дополняемы все максимальные циклические подгруппы. Под максимальной циклической подгруппой конечной группы G понимается циклическая подгруппа $\langle g \rangle$, $g \in G$, которая удовлетворяет условию: если $\langle g \rangle \subset \langle h \rangle$ для некоторого $h \in G$, то $\langle h \rangle = \langle g \rangle$. Близкие к этому вопросы рассматривались в работах [6—8]. В частности, из результатов работы [8] можно получить описание конечных регулярных p-групп с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами. В данной работе задача о строении таких групп для случая $p > 2$ решается без предположения об их регулярности. В работе [9] установлено, что в конечной абелевой группе дополняемы все максимальные циклические подгруппы тогда и только тогда, когда она является прямым произведением циклических подгрупп одного и того же порядка p^k, или порядков p^k и p^{k+1}. Отсюда вытекает, что свойство дополняемости максимальных циклических подгрупп не переносится ни на подгруппы, ни на фактор-группы. В самом деле, пусть $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, причем порядок элемента a равен p^3, а порядок элемента b — p^2. В группе G дополняемы все максимальные циклические подгруппы, но ни подгруппа $H = \langle a \rangle \times \langle b^p \rangle$, ни фактор-группа $G/\langle b^p \rangle$ указанного свойства уже не имеют.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы в конечной p-группе G, $p > 2$, были дополняемы все максимальные циклические подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы в группе G существовала система циклических подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $A_iA_j = A_jA_i$ *для любых* $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$;

2) $G = A_1A_2 \ldots A_n$;

3) $A_i \cap (A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

4) *если порядок подгруппы* A_i *равен* p^{m_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, *то* $\max\{|m_i - m_j|\} \leqslant 1$.

Доказательству этой теоремы фактически посвящена вся работа, однако в процессе доказательства будут получены многие интересные свойства изучаемых групп.

Приведем вначале некоторые обозначения и термины, используемые в дальнейшем. Конечную p-группу, в которой дополняемы все максимальные циклические подгруппы, для краткости будем называть DM-группой. Члены нижнего центрального ряда группы G будем обозначать через $L_k(G)$; $L_1(G) = G$; ..., $L_{k+1}(G) = [L_k(G); G]$. Кроме того, пусть $|M|$ — число элементов в множестве M; если H — группа, то $|H|$ — ее порядок; если a — элемент группы G, то $|a|$ — порядок элемента a; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

1. Предварительные результаты. Лемма 1. *Если G является DM-группой, то любой элемент $y \in \Phi(G)$ представим в виде $y = x^p$ для некоторого $x \in G$.*

Доказательство. По условию леммы $y \in \Phi(G)$ и поэтому не является образующим элементом группы G. Следовательно, циклическая подгруппа $\langle y\rangle$ не имеет дополнения в G и, значит, не является максимальной в G. Таким образом, в группе G существует такой элемент x, что $y = x^p$. Лемма доказана.

Леммы 2 и 3 справедливы для любой конечной группы и легко могут быть доказаны методом математической индукции.

Лемма 2. *Если $H = \langle a; b\rangle$, где a и b — произвольные элементы группы G, то $a^p b^p = c^p u$, где $c \in H$ и $u \in L_3(H)$.*

Лемма 3. *Если a и b — произвольные элементы группы G и $H = \langle a; b\rangle$, то $[a; b^p] = c^p u$, где $c \in L_2(H)$, $u \in L_3(H)$.*

Из леммы 1 следует, что если y — образующий максимальной циклической подгруппы в группе G, то $y \notin \Phi(G)$. Будем такой элемент y называть базисным элементом группы G. В леммах 4—6 конечная p-группа G удовлетворяет условию: любой элемент $y \in \Phi(G)$ представим в виде $y = x^p$ для некоторого $x \in G$.

Лемма 4. *Любой элемент $y \in L_k(G)$, $k \geqslant 2$, представим в виде $y = c^p u$, где $c \in L_{k-1}(G)$, $u \in L_{k+1}(G)$.*

Лемма 5. *Любой элемент $y \in L_k(G)$, $k \geqslant 1$, представим в виде $y = z^p$ для некоторого $z \in L_{k-1}(G)$.*

Лемма 6. *Для произвольного элемента $y \in L_k(G)$, $k \geqslant 1$, в группе G найдется такой элемент x, что $y = x^t$, где $t = p^{k-1}$.*

Леммы 4 — 6 также легко можно доказать методом математической индукции. Приведем для примера доказательство леммы 5. Докажем индукцией по s, что любой элемент $y \in L_k(G)$, $k \geqslant 2$, представим в виде $y = x^p w$, $x \in L_{k-1}(G)$, $w \in L_{k+s}(G)$. При $s = 1$ данное утверждение следует из леммы 4. Предположим, что это утверждение справедливо для некоторого $s \geqslant 1$. Тогда если $y \in L_k(G)$, то $y = x^p w$, где $x \in L_{k-1}(G)$, $w \in L_{k+s}(G)$. Согласно лемме 4 $w = u^p v$, где $u \in L_{k+s-1}(G)$, $v \in L_{k+s+1}(G)$. Так как $x \in L_{k-1}(G)$, $u \in L_{k+s-1}(G)$, то подгруппа $H = \langle x; u\rangle \subset L_{k-1}(G)$, $L_2(H) \subset L_{k+s}(G)$, $L_3(H) \subset L_{k+s+1}(G)$. Поэтому $y = x^p w = x^p u^p v = c^p w_1 v$, где w_1 и v принадлежат $L_{k+s+1}(G)$, т. е. $w_1 v = w_2 \in L_{k+s+1}(G)$. Следовательно, $y = c^p w_2$, где $c \in L_{k-1}(G)$, $w_2 \in L_{k+s+1}(G)$. Предположение индукции оправдано. Если класс нильпотентности группы G равен n, то при $s = n + 1 - k$ получим, что всякий элемент $y \in L_k(G)$, $k \geqslant 2$, представим в виде $y = x^p w_2$, $x \in L_{k-1}(G)$, $w_2 \in L_{n+1}(G) = \{1\}$, т. е. $y = x^p$, $x \in L_{k-1}(G)$, что и требовалось доказать.

Так как DM-группа удовлетворяет условиям лемм 4—6, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если экспонента DM-группы G равна p^m, то класс нильпотентности группы G не превышает m.*

Пусть H — дополнение к максимальной циклической подгруппе $\langle a\rangle$ в группе G. Докажем утверждение о том, что всякий базисный элемент подгруппы H является базисным элементом в группе G. С этой целью рассмотрим ряд подгрупп DM-группы G:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_{s-1} \supset G_s = \{1\}, \tag{1}$$

где $G_i = \langle a^{p^i}\rangle H$, p^s — порядок элемента a. Ряд (1) является нормальным рядом группы G, потому что G_m — максимальная подгруппа в группе G_{m-1}. Из максимальности подгруппы G_m в G_{m-1} следует $\Phi(G_{m-1}) \subset G_m$. Кроме того, $\Phi(G_{m-1}) \lhd G_{m-2}$, так как $\Phi(G_{m-1})$ — характеристическая подгруппа группы G_{m-1}. Из включений $L_2(G_m) \subset \Phi(G_{m-1}) \subset G_{m+1}$ следует, что коммутант фактор-группы $G_m/\Phi(G_{m+1})$ является элементарной абелевой группой. Отметим, что $a^{p^m} \in \Phi(G_{m-1})$, так как $a^{p^{m-1}} \in G_{m-1}$.

Лемма 7. *Если $u \in G_m$, $u = a^{ti}h$, где $h \in H$, $i = p^m$, $0 \leqslant m \leqslant s-1$, то $u^p = a^{tip} g v$, где $g \in \Phi(G_{m+1})$, $v \in L_3(G_m)$.*

Доказательство. Так как $p > 2$, то в силу леммы 2.2.2 [10], $u^p = a^{tip} h^p w^p v$, где $w \in L_2(G_m)$, $v \in L_3(G_m)$. Так как $h \in H \subset G_{m+1}$, то $h^p \in \Phi(G_{m+1})$; кроме того, $w \in L_2(G_m) \subset \Phi(G_m) \subset G_{m+1}$. Поэтому $w^p \in \Phi(G_{m+1})$. Обозначив через g произведение $h^p w^p$, получим $u^p = a^{tip} g v$, где $g \in \Phi(G_{m+1})$, $v \in L_3(G_m)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Фактор-группа $G_0/\Phi(G_1)$ имеет класс нильпотентности, не превышающий 2; если $y \in \Phi(G_1)$, то в G_1 существует такой элемент x, что $y = x^p$.*

Доказательство. По лемме 6 каждый элемент из $L_3(G_0)$ представим в виде x^{p^2}, где $x \in G$. Поэтому $L_3(G_0) \subset \Phi(G_1)$. Отсюда получаем, что если $\bar{G}_0$ — фактор-группа $G_0/\Phi(G_1)$, то $L_3(\bar{G}_0) = \{\bar{1}\}$. Первая часть утверждения доказана. Если $y \in \Phi(G_1)$, то $y \in \Phi(G_0)$. Тогда в силу леммы 1 в G_0 существует такой элемент x, что $y = x^p$. Запишем элемент x в виде $x = a^t h$, $h \in H$. Согласно лемме 7 $x^p = a^{tp} g v$, где $g \in \Phi(G_1)$, $v \in L_3(G_0)$. По доказанному $L_3(G_0) \subset \Phi(G_1)$, т. е. $v \in \Phi(G_1)$ и $x^p = a^{tp} g_1$, где $g_1 = gv \in \Phi(G_1)$. Отсюда $a^{tp} = x^p g_1^{-1} \in \Phi(G_1) \subset \langle a^{p^2} \rangle H$. В силу соотношения $\langle a \rangle \cap H = \{1\}$ получаем $a^{tp} = a^{jp^2}$, или $t = jp$. Таким образом, $x = a^{jp} h \in G_1$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Класс нильпотентности фактор-группы $G_{m-1}/\Phi(G_m)$ не превышает 2; если $y \in \Phi(G_m)$, то в G_m существует такой элемент x, что $y = x^p$.*

Доказательство. При $m = 1$ доказываемое утверждение следует из леммы 8. Предположим по индукции, что это утверждение справедливо для некоторого m, $1 \leqslant m \leqslant s - 1$. Докажем сначала, что класс нильпотентности фактор-группы $G_m/\Phi(G_{m+1})$ не превышает двух. Для этого достаточно установить, что $L_2(\bar{G}_m) \subset \bar{Z} L_3(\bar{G}_m)$, где $\bar{G}_m = G_m/\Phi(G_{m+1})$, $\bar{Z}$ — центр группы $\bar{G}_m$. Так как фактор-группа $G_{m+1}/\Phi(G_{m+1})$ — элементарная абелева, элемент $a^{p^{m+1}} \in G_{m+1}$ и $G_m = \langle a^{p^m} \rangle G_{m+1}$, то образ элемента $a^{p^{m+1}}$ в $\bar{G}_m$ принадлежит $\bar{Z}$. С другой стороны, если u и w — произвольные элементы подгруппы G_m, то коммутатор $[u; w] \in L_2(G_m) \subset \Phi(G_m)$. По предположению индукции в G_m существует такой элемент x, что $[u; w] = x^p$. Запишем x в виде $x = a^{tp^m} h$, $h \in H$. В силу леммы 7 $x^p = a^{tp^{m+1}} g v$, где $g \in \Phi(G_{m+1})$, $v \in L_3(G_m)$. Отсюда следует, что коммутатор $[u; w] \in \langle a^{p^{m+1}} \rangle L_3(G_m) \Phi(G_{m+1})$, а его образ в фактор-группе $\bar{G}_m$ принадлежит $\bar{Z} L_3(\bar{G}_m)$. В силу произвольности элементов u, $v \in G_m$, $L_2(\bar{G}_m) \subset \bar{Z} L_3(\bar{G}_m)$. Первая часть индуктивного предположения доказана. Вторая часть этого предположения доказывается аналогично части из леммы 8, если заменить G_0 на G_m, а G_1 — на G_{m+1}.

Теорема 2. *Если y — базисный элемент подгруппы H, то y — базисный элемент во всей группе G.*

Доказательство. Докажем, что если $y \in H \cap \Phi(G_m)$, то $y \in H \cap \Phi(G_{m+1})$, $0 \leqslant m \leqslant s - 1$. Пусть $y \in H \cap \Phi(G_m)$. Тогда $y \in \Phi(G_m)$ и в силу леммы 9 $y = x^p$ для некоторого $x \in G_m$, $x = a^{tp^m} h$, где $h \in H$. Поэтому на основании лемм 7 и 9 $y = (a^{tp^m} h)^p = a^{tp^{m+1}} g$, $g \in \Phi(G_{m+1})$. Так как $y \in H$, то $a^{tp^{m+1}} = y g^{-1} \in \Phi(G_{m+1}) H = G_{m+2}$. Отсюда получаем $a^{tp^{m+1}} = a^{jp^{m+2}}$, или $t = jp$, т. е. $x = a^{tp^{m+1}} h$; $x \in G_{m+1}$, $x^p = y \in H \cap \Phi(G_{m+1})$. Из доказанного факта вытекает, что если $y \in H \cap \Phi(G)$, то $y \in H \cap \Phi(G_m)$, $0 \leqslant m \leqslant s$. При $m = s$ получим утверждение теоремы.

Следствие. *Дополнение H к циклической подгруппе $\langle a \rangle$ в DM-группе G также является DM-группой.*

Лемма 10. *Пусть a — базисный элемент DM-группы G и H — дополнение к циклической подгруппе $\langle a \rangle$ в группе G. Если $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — минимальная система образующих подгруппы H, то $\{a, b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — минимальная система образующих группы G.*

Доказательство. Если система образующих $\{a, b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ не является минимальной, то один из образующих содержится в подгруппе, порожденной остальными. Так как $a \in H$, то таким образующим может быть только один из элементов b_i. Нетрудно показать, что в этом случае $b_i \in \Phi(G)$. Так как $b_i \in H$, то $b_i \in H \cap \Phi(G)$ и в силу теоремы 2 $b_i \in \Phi(H)$, что невозможно. Лемма доказана.

2. Доказательство необходимого условия теоремы. Вначале покажем существование в DM-группе G системы циклических подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условиям 1—3 из основной теоремы. С этой целью рассмотрим в группе G минимальную систему образующих $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Очевидно любой элемент b_i будет базисным элементом группы G. Пусть F_i — дополнение к циклической подгруппе $\langle b_i \rangle$ в группе G. Положим $H_i = \bigcap F_j$, где пересечение берется по всем $j \leqslant i$. Покажем, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует такая система базисных элементов $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ группы G и система их дополнений $F_1, F_2, \ldots, F_i$, что $b_j \in H_{j-1}$, $j \leqslant i$, и любой базисный элемент подгруппы H_i является базисным элементом во всей группе G. Пусть для некоторого $i < n$ такая система базисных элементов уже построена. В качестве b_{i+1} возьмем произвольный базисный элемент подгруппы H_i. По предположению b_{i+1} — базисный элемент в группе G. Если F_{i+1} — дополнение к $\langle b_{i+1} \rangle$ в группе G, то $H_{i+1} = F_{i+1} \cap H_i$ — дополнение к $\langle b_{i+1} \rangle$ в H_i. В силу следствия к теореме 2 любой базисный элемент из H_{i+1} будет базисным в подгруппе H_i, а значит, и в группе G. Предположение индукции оправдано. Итак, система образующих $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ и система их дополнений $F_1, F_2, \ldots, F_n$ с требуемыми свойствами существуют. Пусть M — некоторое непустое подмножество индексов из множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Рассмотрим подгруппу $U = \bigcap F_j$, где пересечение берется по всем $j \in M$. С помощью математической индукции нетрудно доказать, что $|U| = |G| (\Pi |b_j|)^{-1}$, причем произведение в правой части равенства берется по всем $j \in M$. Из самого способа построения системы образующих $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ вытекает равенство $|G| = |b_1||b_2| \ldots |b_n|$. Поэтому $\bigcap F_j = \{1\}$; здесь пересечение берется по всем индексам $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Положим теперь $A_i = \bigcap F_j$, где j — любой номер, отличный от i; если $i \neq j$, то пусть $V_{ij} = \bigcap F_k$, причем пересечение берется по всем k, $k \neq i$, $k \neq j$. Имеем $|A_i| = |G| (\Pi |b_j|)^{-1} = |b_i|$. Аналогично можно показать, что $|V_{ij}| = |b_i||b_j| = |A_i||A_j|$. Очевидно $A_i \subset V_{ij}$, $A_j \subset V_{ij}$. Так как пересечение всех F_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, равно $\{1\}$, то $A_i \cap F_i = \{1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $A_i \cap A_j = \{1\}$ для любых i, j. $i \neq j$. Учитывая равенство $|V_{ij}| = |A_i||A_j|$, получаем $A_iA_j = V_{ij}$. Поэтому $A_iA_j = A_jA_i$. В силу произвольности индексов i и j подгруппа D_i, порожденная всеми подгруппами A_j, $j \neq i$, равна их произведению: $D_i = A_1 \ldots A_{i-1} \cdot A_{i+1} \ldots A_n$. Так как $A_j \subset F_i$, $j \neq i$, то $D_i \subset F_i$. Учитывая соотношение $A_i \cap F_i = \{1\}$, получаем $A_i \cap (A_1 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n) = \{1\}$. Наконец, подгруппа, порожденная всеми подгруппами $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равна их произведению $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а ее порядок равен $\Pi |A_i| = \Pi |b_i| = |G|$. Следовательно, $G = A_1A_2 \ldots A_n$. Из полученной факторизации группы G вытекает, что в качестве системы образующих группы G можно взять объединение систем образующих для подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Так как минимальное число образующих конечной p-группы есть инвариант этой группы (см. [11], теорема 12.2), то каждая из подгрупп A_i является циклической. Из доказанного ранее следует, что циклические подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ удовлетворяют условиям 1—3 основной теоремы. Отметим, что группа G является равномерным произведением указанных циклических подгрупп. Для доказательства условия 4 установим два вспомогательных утверждения.

Лемма 11. *Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ DM-группы равна $\Phi(G) = B_1B_2 \ldots B_n$, где $B_i = \langle a_i^p \rangle$.*

Доказательство. Очевидно $B_i \subset \Phi(G)$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $B_iB_j = B_jB_i$ (см. [11], следствие 3.7), то $B_1B_2 \ldots B_n$ — подгруппа, содержащаяся в $\Phi(G)$. С другой стороны, любой элемент, не принадлежащий $B_1B_2 \ldots B_n$, является образующим группы G и, следовательно, не принадлежит $\Phi(G)$. Таким образом, $\Phi(G) \subset B_1B_2 \ldots B_n$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Подгруппа Фраттини DM-группы G также является DM-группой.*

Доказательство. Пусть y — базисный элемент подгруппы $\Phi(G)$. В силу леммы 1 $y = x^p$, $x \in G$. Нетрудно показать, что x — базисный элемент в группе G. Поэтому подгруппа $\langle x \rangle$ имеет в G дополнение H; $G = \langle x \rangle H$. Очевидно $\langle x^p \rangle \Phi(H) \subset \Phi(G)$. С другой стороны, если $g \in \Phi(G)$, то $g \in \langle x^p \rangle H$; тогда в силу теоремы 2 $g \in \langle x^p \rangle \Phi(H)$, или $\Phi(G) \subset \langle x^p \rangle \times \times \Phi(H)$, т. е. $\Phi(G) = \langle x^p \rangle \Phi(H)$. Ясно, что $\Phi(H)$ — дополнение к $\langle y \rangle$ в группе $\Phi(G)$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что циклические подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ удовлетворяют условию 4 основной теоремы. Предположим противное. Пусть G — минимальный контрпример. В силу следствия к теореме 2 $G = A_1 A_2$, причем $|A_1| = p^r$, $|A_2| = p^s$, $r - s \geqslant 2$. Если $s \neq 1$, то по лемме 12 DM-группа $\Phi(G) = B_1 B_2$, где B_i — подгруппа индекса p в группе A_i, $i = 1, 2$. Следовательно, $|B_1| = p^{r-1}$, $|B_2| = p^{s-1}$ и $(r-1)-(s-1) \geqslant 2$. Это противоречит минимальности группы G. Следовательно, $s = 1$. Положим $b = a_1^{p^{r-2}}$, $|b| = p^2$, и рассмотрим элемент ba_2. Этот элемент очевидно является базисным в группе G. В силу следствия 3.7 [12] подгруппы $\langle b \rangle$ и $\langle a_2 \rangle$ перестановочны. Так как $|b| = p^2$, $|a_2| = p$, то подгруппа $\langle b; a_2 \rangle$ имеет порядок p^3. Отсюда следует $(ba_2)^p = b^p$. Пусть H — дополнение в DM-группе G к циклической подгруппе $\langle ba_2 \rangle$. По доказанному $b^p \in \langle ba_2 \rangle$. С другой стороны, $|a_1| > p^2$, и, значит, $b = a^{p^{r-2}} \in \in \Phi(G)$. Поэтому по лемме 12 $b \in \langle b^p \rangle \Phi(H)$, т. е. $b = b^{tp} h$, $h \in H$. Тогда $h = b^{1-tp}$, $h^p = b^p$ и $b^p \in \langle ba_2 \rangle \cap H$, причем $b^p \neq 1$. Полученное противоречие доказывает, что условие 4 основной теоремы выполняется. Необходимое условие основной теоремы полностью доказано.

3. Доказательство достаточного условия теоремы. Пусть в конечной p-группе G существует система циклических подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющая условиям 1—4 основной теоремы. Образующий элемент циклической подгруппы A_i обозначим через a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Положим $B_i = \langle a_i^p \rangle$. Так как при доказательстве леммы 11 были использованы только общие свойства конечных p-групп и условия 1—3 основной теоремы, то подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G факторизуется подгруппами B_i, $\Phi(G) = B_1 B_2 \ldots B_n$. В силу леммы 2 любой элемент из $\Phi(G)$, а следовательно, и любой элемент коммутанта $L_2(G)$ представим в виде $x^p u$, где $x \in G$, $u \in L_3(G)$. Отсюда следует справедливость лемм 4—6 для изучаемой в данном разделе p-группы G.

Рассмотрим ряд подгрупп группы G:

$$G = \Phi_0(G) \supset \Phi_1(G) \supset \ldots \supset \Phi_{m-1}(G) \supset \Phi_m(G) = \{1\}, \tag{2}$$

где $\Phi_{k+1}(G) = \Phi(\Phi_k(G))$, p^m — экспонента группы G. Так как $\Phi_{k+1}(G)$ — характеристическая подгруппа группы $\Phi_k(G)$, то $\Phi_{k+1}(G) \triangleleft G$.

Лемма 13. *Подгруппа $\Phi_k(G)$ совпадает с множеством всех элементов вида x^{p^k}, где $x \in G$.*

Доказательство этой леммы получается из леммы 5 с помощью математической индукции.

Лемма 14. *Ряд* (2) *является центральным рядом, т. е.* $[G; \Phi_k(G)] \subseteq \Phi_{k+1}(G)$.

Доказательство. Докажем сначала лемму для группы G, которая имеем экспоненту p^2. В силу леммы 5 подгруппа $L_3(G) = 1$. Следовательно, группа G — регулярная p-группа $(p > 2)$. Кроме того, коммутант группы G содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ и по лемме 13 является элементарной абелевой группой. Поэтому для любых элементов $a, b \in G$, $(ab)^p = a^p b^p$. Если $x \in G$, $y \in \Phi_1(G)$, то $y = v^p$, $v \in G$ и $[x; y] = [x; v^p] = x^{-1} v^{-p} x v^p = (x^{-1} v^{-1} x)^p v^p = (x^{-1} v^{-1} x v)^p = [x; v]^p = 1$. Для группы, имеющей экспоненту p^2, лемма доказана. Предположим по индукции, что лемма справедлива для группы экспоненты p^k. Рассмотрим группу G экспоненты p^{k+1}. Переходя к фактор-группе $\overline{G} = G/\Phi_k(G)$, получаем $[\overline{G}: \Phi_r(\overline{G})] \subseteq \Phi_{r+1}(\overline{G})$, $r < k$. Следовательно $[G; \Phi_r(G)] \subseteq \Phi_{r+1}(G)$, $r < k$. С другой стороны, если $x \in G$, $y \in \Phi_k(G)$, то $y = v^p$, $v \in \Phi_{k-1}(G)$. Поскольку $\Phi_{k-1}(G)$ имеет экспоненту p^2, то $[x; y] = [x; v^p] = (x^{-1} v^{-1} x v)^p = [x; v]^p = 1$. Таким образом, $[G; \Phi_k(G)] = \{1\} \subseteq \Phi_{k+1}(G)$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть в p-группе G существует система циклических* *подгрупп* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *удовлетворяющая условиям* $1-3$ *основной теоремы. Если* $H = A_2A_3\ldots A_n$, $g = a_1^t h$, *где* a_1 — *образующий подгруппы* A_1, $h \in H$, t *не делится на* p *и* $g_1^{p^m} \in H$, *то* $a^{p^m} = 1$.

Доказательство. Для группы G, имеющей экспоненту p, утверждение леммы справедливо, так как такая группа является элементарной абелевой. Предположим, что лемма справедлива для группы, экспонента которой меньше, чем p^k. Пусть G — группа экспоненты p^k. Из доказательства леммы 14 вытекает $g^p = a_1^{tp}h^pv$, где $v \in \Phi_2(G)$. Тогда $g^p = a_1^{tp}wh^p$, где $w = h^pvh^{-p}$; $w \in \Phi_2(G)$. Так как $w \in \Phi_2(G)$, то элемент w можно представить в виде $w = (a_1^p)^{rp}h_1 = a_1^{rp^2}h_1$, где $h_1 \in \Phi_2(H)$. Поэтому $g^p = a_1^{tp}a_1^{rp^2}h_2$, где $h_2 = h_1h^p \in \Phi_1(H)$ или $g^p = a_1^{(t+rp)p}h_2 = a_1^{dp}h_2$, причем $d = t + rp$ не делится на p. Очевидно, подгруппы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ удовлетворяют условиям $1-3$ основной теоремы, причем $g^p \in \Phi_1(G)$. По условию леммы $(g^p)^{p^{m-1}} = 1$. С другой стороны, $(g^p)^{p^{m-1}} \in \Phi_1(G)$, а тогда в силу теоремы 2 $(g^p)^{p^{m-1}} \in \Phi_1(H) = B_2B_3\ldots B_n$. Так как группа $\Phi(G)$ имеет экспоненту p^{k-1} и $a_1^p \in B_1$, то $(a_1^p)^{p^{m-1}} = 1$, и, следовательно, $a_1^{p^m} = 1$. Лемма доказана.

Докажем, наконец, достаточное условие основной теоремы. Пусть G — p-группа, в которой существует система циклических подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удовлетворяющих условиям $1-4$ основной теоремы и x — базисный элемент этой группы. Тогда $x = u_1u_2\ldots u_n$, где $u_i \in A_i$, причем хотя бы один из элементов u_i является образующим циклической подгруппы A_i. Так как подгруппы A_i перестановочны, то их можно занумеровать произвольным образом. Выберем нумерацию так, чтобы элемент u_i при $i \leqslant k$ был образующим подгруппы A_i; при $i > k$ элемент u_i не является образующим A_i. Кроме того, можно предположить, что элемент u_1 имеет максимальный порядок p^m среди элементов $u_1, u_2, \ldots, u_k$. В силу условия 4 основной теоремы $|A_j| \leqslant |A_1|$ при $j > k$. Кроме того, $|A_1| \geqslant |A_j|$, $j \leqslant k$, согласно выбору нумерации. Положим $W_i = \langle u_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В силу следствия 3.7 [11] подгруппы W_i удовлетворяют условиям $1-3$ основной теоремы. Поэтому по лемме 13 подгруппа $U = W_1W_2\ldots W_n$ имеет экспоненту p^m. Следовательно, $x^{p^m} = 1$. С другой стороны, если $H = A_2A_3\ldots A_n$, то в силу леммы 15 $x^{p^{m-1}} \notin H$, в частности $x^{p^{m-1}} \neq 1$. Значит, $|x| = |A_1|$, $\langle x \rangle \cap H = \{1\}$. Поэтому $|\langle x \rangle H| = |\langle x \rangle|\,|H| = |A_1|\,|H| = |G|$, т. е. H — дополнение к циклической подгруппе $\langle x \rangle$ в группе G. В силу произвольности базисного элемента x группа G является DM-группой. Достаточное условие теоремы доказано.

1. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб.— 1954.— **35**, № 1.— С. 93—128.
2. *Черников С. Н.* О дополняемости силовских p-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп // Там же.— 1955.— 37, № 4.— С. 557—566.
3. *Зайцев Д. И.* К теории нормально факторизуемых групп // Группы с заданными свойствами подгрупп.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 78—104.
4. *Hall Ph.* Complemented grops // J. London Math. Soc.— 1937.— **12**, N 47.— P. 201—204.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
6. *Тузов А. Н.* О дополняемости подгрупп в черниковских A-группах // X Всесоюзн. симп. по теории групп.— Минск, 1986.— С. 232.
7. *Тузов А. Н.* Об абелевых группах, слабо сервантные подгруппы которых m-дополняемы // XIX Всесоюзн. алгебр. конф.— Львов, 1987.— С. 283.
8. *Тузов А. Н.* О дополняемости сервантных подгрупп в регулярных p-группах.— Киев, 1981.— 58 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.53).
9. *Кляцкая Л. М.* Абелевы группы, в которых дополняемы все максимальные подгруппы фиксированного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1971.— С. 159—184.
10. *Gorenstein D.* Finite groups.— New York etc: Harper & Row., 1973.— 530 p.
11. *Холл М.* Теория групп — М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 486 с.
12. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. — Киев : Наук. думка, 1987.— 206 с.

Получено 03.04.91