УДК 519.7

Вл. Д. Мазуров, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики и механики УрО АН России, Екатеринбург)

Метод свертывания и информативность пространства распознавания

Приведен краткий обзор применения линейных неравенств, в частности метода свертывания С. Н. Черникова, к различным задачам: распознавания образов, оценки информативности пространств признакового описания объектов классификации и др.

Наведено короткий огляд застосування лінійних нерівностей, зокрема методу згортання С. М. Чернікова, до різних задач: розпізнавання зображень, оцінки інформативності просторів ознакового опису об'єктів класифікації та ін.

1. Введение. Метод свертывания С. Н. Черникова для линейных неравенств [1] связан с двойственностью в оптимизации и классификации, причем этот метод позволяет анализировать и несобственные (в том числе противоречивые) модели в этой области. Среди многих следствий теории свертывания выделим те, которые относятся к двойственности в распознавании, к выбору признакового пространства и к интерпретации изображений.

Здесь имеется в виду следующая схема двойственности в распознавании образов.

Рассмотрим задачу аффинного дискриминантного анализа: для заданных конечных множеств A, $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ найти разделяющую их аффинную функцию $f(a) = (a, x) + y$ ((a, x) — скалярное произведение):

$$f(a) > 0, \quad a \in A, \quad f(b) < 0, \quad b \in B. \tag{1}$$

Если эта система несовместна, то можно (при $A \cap B = \varnothing$) найти ее комитет, т. е. такое множество $K = \{f_1, \ldots, f_q\}$, что каждому неравенству системы удовлетворяют более половины элементов множества K. Члены комитета можно найти как решения максимальных совместных подсистем системы (1), а чтобы найти такие подсистемы, достаточно определить минимальные несовместные подсистемы системы (1). Наконец, последние находятся при анализе системы, двойственной к (1):

$$\sum_{a \in A} u_a f(a) - \sum_{b \in B} u_b f(b) = 0 \qquad \forall f,$$

$$u_a \geqslant 0, \quad a \in A, \quad u_b \geqslant 0, \quad b \in B.$$

Двойственная система соответствует свертке системы (1). Поясним это подробнее.

Систему (1) можно привести к виду

$$(c_j, x) \equiv a_{j_1} x_1 + \ldots + a_{j_n} x_n > 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

а двойственная примет вид

$$\sum_1^m u_j c_j = 0, \quad u = [u_1, \ldots, u_m] \geqq 0.$$

Напомним результаты С. Н. Черникова по методу свертывания.

Пусть $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ — некоторое множество вещественных чисел. Каждой паре $h_p > 0$, $h_q < 0$ соотнесем неравенство

$$h_p (c_q, x) - h_q (c_p, x) > 0,$$

а каждому $h_s = 0$ — неравенство

$$(c_s, x) > 0.$$

Совокупность полученных при этом неравенств (которая может быть и пустой) называется результатом H-деформации системы.

Алгоритм фундаментального свертывания состоит в следующем.

1. Пусть P_1 — какой-либо столбец коэффициентов системы (2), например столбец при x_1. Проведем P_1-деформацию системы (2). Получим систему S_1, называемую фундаментальной U_1-сверткой. Каждому неравенству системы S_1 соотнесем его индекс, т. е. множество номеров тех неравенств из (2), комбинированием которых оно получено.

2. Пусть уже получена непустая фундаментальная $(U_1 + \ldots + U_k)$-свертка S_k системы (2) и пусть P_{k+1} — некоторый столбец ее коэффициентов, например, при x_{k+1}. Проводим P_{k+1}-деформацию системы S_k, не комбинируя тех пар неравенств, объединение индексов которых содержит индекс какого-либо третьего неравенства из S_k.

В результате получим S_{k+1}-фундаментальную $(U_1 + \ldots + U_{k+1})$-свертку системы (2). Каждому неравенству соотнесем его индекс.

3. Если $S_k = \varnothing$, то полагаем $S_{k+1} = \varnothing$.

Через n шагов этот процесс дает полную фундаментальную свертку S_n системы (2).

Теорема С. Н. Черникова. *Для всякой минимальной несовместной подсистемы системы* (2) *существует несовместное неравенство* $0 > 0$ *системы* S_n, *имеющее тот же индекс*; *для всякого несовместного неравенства из* S_n *существует минимальная несовместная подсистема системы* (2), *имеющая тот же индекс*.

Теперь поясним, что мы понимаем здесь под общей задачей интерпретации данных.

Данные D — это некоторый текст или изображение, представимые в виде массива чисел. Массиву D ставим в соответствие вектор x интерпретации этого массива, $x = [x_1, \ldots, x_n]$, x_i — i-й параметр интерпретации, трактуемый в соответствии с содержательной стороной задачи интерпретации. Отображение $D \to x$, вообще говоря, неоднозначно; известно лишь, что вектор $x \in \mathbb{R}^n$ должен удовлетворять условиям допустимости интерпретации: $f_j(x) \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Множество решений этой системы определяет множество эквивалентных интерпретаций. Если система несовместна, то данные противоречивы, и мы ставим задачу нахождения максимальных совместных подсистем этой системы. Каждая подсистема отвечает своему классу эквивалентных интерпретаций. Этот абстрактный подход применяется к анализу n-мерных сцен. Сцена — это совокупность множеств (обычно выпуклых многогранников) в $\mathbb{R}^n$, причем задана не сама сцена, а ее проекции на подпространства меньшей размерности. По проекциям нужно вывести описание сцены: из каких множеств она состоит и как эти множества могут быть расположены друг относительно друга.

Уже отмечалось [2], что метод фундаментального свертывания, применимый к не обязательно совместным системам линейных неравенств, имеет большое значение для метода комитетов в дискриминантном анализе [3]. Для метода комитетов важны алгоритмы нахождения минимальных по включению несовместных и максимальных по включению совместных подсистем, а также поиск признаков, эффективных для задачи дискриминации. Во всех этих случаях используется двойственная система неравенств, возникающая при U-свертывании.

При этом для системы неравенств

$$g_j(x) \leqslant 0, \quad j \in J, \quad x \in L, \tag{3}$$

моделирующей ту или иную задачу распознавания образов или задачу анализа и интерпретации изображений, где L — линейное пространство, U-двойственной к (3) (где U — линейное подпространство, $U \subset L$) является следующая система относительно переменных u_j:

$$\sum_{j \in J} u_j g_j(x) = 0 \qquad \forall\, x \in U,$$
$$u = [u_j\colon\ j \in J] \geqq 0. \tag{4}$$

Если $U = L$, то система (4) называется двойственной к системе (3).

Множество $C(U) = \{u : (4)\}$ — множество решений этой системы — позволяет судить об информативности пространства. Например, если $C(U) = \{0\}$, то U достаточно информативно.

Фундаментальная система решений системы (4) — в предположении афинности функций g и конечности множества J — составляет некоторое конечное множество $\tilde{C} \subset C(U)$. Множество $\tilde{C}$ определяет минимальные несовместные подсистемы (ν-подсистемы) и максимальные подсистемы (μ-подсистемы) исходной системы (3), что позволяет строить кусочно-линейные разделяющие функции (например, комитетные) и отыскивать «узкие места» в материале наблюдений.

С другой стороны, множество $\tilde{C}$ позволяет записать U-свертку системы (3), множество решений которой дает возможность оценить информативность подпространства U', дополнительного к U.

В задаче интерпретации двойственная система (4) позволяет найти непротиворечивые интерпретации сцен.

2. U-свертывание и информативность признаков. Рассмотрим задачу дискриминантного анализа, т. е. задачу нахождения разделяющей множества A и B функции F класса Φ:

$$F(y) \geqslant 0 \qquad \forall\, y \in A,$$

$$F(y) \leqslant 0 \qquad \forall y \in B, \tag{5}$$
$$y \in \mathbb{R}^s, \quad F \in \Phi.$$

Это задача разделения множеств, рассматриваемая в исходном пространстве признаков. На самом деле полезны вторичные признаки v_j как линейные комбинации

$$v_j = \sum_{i=1}^{p} z_{ji}\varphi_i(y), \quad y \in \mathbb{R}^s, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Положим $x = [v_1, \ldots, v_n]$. Задача (5) сводится к линейным неравенствам

$$f_1(x) = (c_1, x) \geqslant 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m(x) = (c_m, x) \geqslant 0.$$

Соотношения U-сплетенности имеют вид [1]

$$\sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x) = 0 \qquad \forall x \in U, \tag{6}$$

где U — линейное подпространство.

Положим $C(U) = \{u \geqslant 0 : (4)\}$. Пусть C — неотрицательный базис множества $C(U)$. Нахождение множества $\tilde{C}$ — это задача нахождения всех неотрицательных решений системы линейных уравнений как неотрицательных комбинаций фундаментальной системы решений. Для указанной задачи предложены и обоснованы алгоритмы [1, 4].

Фундаментальная U-свертка имеет вид

$$\sum_i u_i f_i(x) \geqslant 0, \quad u \in \tilde{C}.$$

Объем множества ее решений (заключенный в единичном шаре) характеризует информативность соответствующей системы признаков.

3. Д Н Ф д л я μ - п о д с и с т е м. В статье [5] приведен метод преобразования ДНФ для получения индексов μ-подсистем (максимальных совместных подсистем) из индексов ν-подсистем (минимальных несовместных; последние находятся, например, методом свертывания).

Рассматривается задача построения p-комитета с минимальным числом членов для системы множеств $D = \{D_j : j \in J\}$, т. е. p-комитеты системы $x \in \in D_j$, $j \in J$.

Метод состоит в следующем.

Вначале находим ν-подсистемы D, т. е. такие $S \subset J$, что $\bigcap_{j \in S} D_j \neq \varnothing$, но $\bigcap_{j \in S'} D_j \neq \varnothing$ при $S' \subset S$, $S' \neq S$. Множество S называется индексом подсистемы $\{D_j : j \in S\}$.

Пусть $\{S_i : i \in I\}$ — совокупность всех индексов ν-подсистем.

Затем находим μ-подсистемы системы D, т. е. такие $S \subset J$, что $\bigcap_{j \in S} D_j \neq \varnothing$, но $\bigcap_{j \in S'} D_j = \varnothing$ при $S' \supset S$, $S' \neq S$. Индекс S μ-подсистемы — это, очевидно, максимальное множество из J такое, что $S \neq S_i$ $(\forall i \in I)$.

Пусть $\{T_l : l \in L\}$ — индексы всех μ-подсистем. Индексу S_i отвечает дизъюнкция $U_i = z_{i_1} \vee \ldots \vee z_{i_r}$ (номера переменных составляют множество S_i). Строим функцию $U = \underset{i \in I}{\&} U_i$, из которой получаем сокращенную ДНФ $U_c = \bigvee_{l \in L} K_l$.

Пусть конъюнкцию K_l составляют переменные с номерами из множества $\mathbb{R}_l$. Тогда индексы всех μ-подсистем таковы: $T_l = J \setminus \mathbb{R}_l$, $l \in L$.

Построение минимального p-комитета из решений μ-подсистем представляет собой некоторую задачу дискретной оптимизации.

4. Двойственность и анализ сцен [6]. Неоднозначная интерпретация противоречивых сцен (т. е. проекций n-мерных изображений на подпространства меньшей размерности) использует соотношения двойственности, связанные с методом свертывания для линейных неравенств. Противоречивой сцене отвечает множество интерпретаций, связанных с μ-подсистемами несовместной системы линейных неравенств, моделирующей задачу интерпретации.

Пусть L, L_1, L_2 — вещественные линейные пространства, $L = L_1 \times \times L_2$ — декартово произведение пространств, $X \subset L$. Предположим, что известна проекция S сцены $Y \subset X$ на пространство L_1:

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{k} M^i = \pi_{L_1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} X^i\right).$$

Здесь π_{L_1} — оператор проектирования на подпространство L_1, M_1 — множество вершин сцены, M^2 — множество ребер и т. д. ($i = 1, \ldots, k$). Множество M в дальнейшем считаем упорядоченным.

Требуется найти сцену Y в виде $Y = \{q = [x, y_x] \in L : x \in M\}$, где $x \in L_1$, $y_x \in L_2$; здесь $y = [y_x \in L_2 : x \in M]$ — искомый вектор.

Предлагаемый метод заключается в следующем. Пусть $q_i = [x^i, y_{x^i}]$ и каким-либо образом задан предикат видимости:

$$P_{q_1 \ldots q_s}(y) = \begin{cases} 1, \text{ если грань } \{q_1, \ldots, q_s\} \text{ является} \\ \qquad \text{видимой в сцене } S; \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда интерпретации сцены Y являются максимальными совместными подсистемами системы

$$P_{q_1 \ldots q_s}(y) = 1 \quad \forall\, T = \{x^1, \ldots, x^s\} \subset S. \tag{7}$$

Способ задания предикатов видимости ограничен условием, согласно которому все грани меньшей размерности, принадлежащие видимой грани, также должны быть видимы. Наиболее удобным в связи с этим является индуктивное задание предикатов, начиная с предикатов видимости вершины.

Пусть пространства L, L_1, L_2 имеют конечную размерность и имеются разложения вершин по граням.

Покажем, что в этом случае возможна аппроксимация системы (7) системой линейных неравенств. Пусть q — некоторая вершина, x — ее проекция и $T(x)$ — множество проекций граней $T = \{x^1, \ldots, x^s\}$, ее содержащих, т. е. удовлетворяющих условию

$$x = \sum_{j=1}^{s(T)} \alpha_j(T)\, x^j \left(\alpha_j(T) \geqslant 0, \quad \sum_j \alpha_j(T) = 1\right).$$

Тогда вершину q можно считать видимой, если

$$y_x < \sum_{j=1}^{s(T)} \alpha_j(T)\, y_{x^j} \quad \forall\, T \subset T(x).$$

Эта система неравенств является линейной по системе переменных $y = = [y_x \in L_2 : x \in M]$. Способы задания предикатов видимости граней более высокого порядка определяются классом допустимых интерпретаций.

В заключение отметим, что связанная с методом свертывания двойственность позволяет:

разрешать противоречия в материале наблюдений и в постановке задачи распознавания;

оценивать информативность пространств признакового описания объектов классификации;

решать задачи оптимального пополнения материала наблюдений, выделения контрольной выборки;

оценивать устойчивость решающих правил распознавания и диагностики.

1. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М. : Наука, 1968.— 488 с.
2. *Астафьев Н. Н., Еремин И. И., Мазуров Вл. Д.* Системы линейных неравенств в математическом программировании и распознавании образов // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 3.— С. 288—297.
3. *Мазуров Вл. Д.* Метод комитетов в оптимизации и распознавании.— М. : Наука, 1990.— 248 с.
4. *Черникова Н. В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1965.— 5, № 2.— С. 334—337.
5. *Комитеты* в принятии решений / Вл. Д. Мазуров, А. И. Кривоногов, В. С. Казанцев и др. // Кибернетика.— 1984.— № 1.— С. 90—95.
6. *Мазуров Вл. Д., Смирнов А. И.* Об алгебраическом подходе к восстановлению объектов по их изображениям // Автоматизированные системы обработки изображений.— М. : Наука, 1986.— 154 с.

Получено 20.11.90