УДК 519.41/47

Ф. Н. Лиман, канд. физ.-мат. наук (Сум. пед. ин-т)

О группах, все бесконечные абелевы pd-подгруппы которых нормальны

Изучаются группы, в которых нормальны все бесконечные абелевы pd-подгруппы для некоторого простого числа p при условии существования таких подгрупп в группе (IH_p-группы). Получены необходимые и достаточные условия принадлежности группы классу IH_p-групп. Устанавливаются связи класса IH_p-групп с классом групп, у которых нормальны все бесконечные абелевы подгруппы, и классом групп, у которых нормальны все pd-подгруппы.

Вивчаються групи, в яких нормальні всі нескінченні абелеві pd-підгрупи для деякого простого числа p при умові існування таких підгруп у групі (IH_p-групи). Одержані необхідні і достатні умови належності групи класу IH_p-груп. Установлюються зв'язки класу IH_p-груп з класом груп, в яких нормальні всі нескінченні абелеві підгрупи, і класом груп, в яких нормальні всі pd-підгрупи.

Одно из наиболее плодотворных направлений современной теории групп связано с изучением групп, те или иные подгруппы или системы подгрупп которых удовлетворяют определенным ограничительным требованиям. При этом были выделены многие важные классы групп, в том числе и так называемые гамильтоновы группы — неабелевы группы, все подгруппы которых нормальны.

Между абелевыми и гамильтоновыми группами, с одной стороны, и простыми группами, с другой — располагаются все остальные группы с большей или меньшей насыщенностью нормальными подгруппами. Оставляя в качестве ограничительного условия нормальность подгрупп и сужая систему подгрупп, удовлетворяющих этому условию, можно получать различные классы групп, более или менее близкие по своим свойствам к гамильтоновым группам. Развернутая программа изучения групп с различными системами нормальных подгрупп сформулирована С. Н. Черниковым в работах [1—4].

Результаты настоящей статьи являются естественным продолжением исследований групп с различными системами бесконечных нормальных подгрупп, начатых С. Н. Черниковым, и исследований групп с различными системами нормальных pd-подгрупп (p — некоторое простое число), предпринятых в последние годы автором настоящей статьи [5—9].

В работах [1, 4] изучены так называемые IH-группы. Бесконечная неабелева группа, имеющая хотя бы одну нормальную бесконечную абелеву подгруппу, называется IH-группой, если в ней нормальны все ее бесконечные абелевы подгруппы. В работе [5] изучены группы, у которых нормальны все pd-подгруппы для некоторого простого числа p. Такие группы названы pdI-группами. Ниже рассматриваются бесконечные неабелевы группы, которые содержат бесконечные абелевы pd-подгруппы для некоторого простого числа p, и все такие подгруппы нормальны в содержащей их группе. Эти группы будем называть IH_p-группами.

Лемма 1. *Любая IH_p-группа содержит нормальную подгруппу порядка p.*

Доказательство. Пусть G—периодическая IH_p-группа и $A=A_p\times\times A_{p'}$ — ее бесконечная абелева нормальная pd-подгруппа. Если подгруппа $A_{p'}$ бесконечна, то для любого элемента $a\in A_p$ имеем $\langle a, A_{p'}\rangle\lhd G$ и потому $\langle a\rangle\lhd G$. Если подгруппа $A_{p'}$ конечна, то бесконечной будет подгруппа A_p. Если она содержит квазициклическую подгруппу P, то $P\lhd G$ и далее $\langle a\rangle\lhd G$ для любого элемента $a\in P$. Если A_p не содержит квазициклической подгруппы, то она не удовлетворяет условию минимальности. В этом случае для любого элемента $a\in A_p$ в A_p можно выделить такие две бесконечные подгруппы B_1 и B_2, что $B_1 \cap B_2 = 1$ и $\langle a \rangle \cap B_1, B_2 = 1$. Тогда $\langle a, B_1 \rangle \cap \langle a, B_2 \rangle = \langle a \rangle \lhd G$.

Пусть теперь G — непериодическая IH_p-группа и A— ее бесконечная абелева нормальная pd-подгруппа. По доказанному выше A содержит нормальную циклическую p-подгруппу, если она периодическая. Если же подгруппа A непериодическая, то $A \supset \langle a, x \rangle$, где $|a| = p$, $|x| = \infty$. Тогда $\langle a, x \rangle \lhd G$ и потому $\langle a \rangle \lhd G$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Любая непериодическая IH_p-группа содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу.*

Теорема 1. *Неабелева периодическая группа G, содержащая бесконечную абелеву pd-подгруппу, тогда и только тогда является IH_p-группой, но не IH-группой, когда она имеет такую истинную нормальную подгруппу C, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) *C — абелева группа или IH-группа;*

2) *$C = C_G(a)$, где $|a| = p$ и $\langle a \rangle \lhd G$;*

3) *C содержит любую бесконечную абелеву pd-подгруппу группы G;*

4) *любая бесконечная абелева подгруппа из C нормальна в G;*

5) *группа G имеет бесконечную абелеву p'-подгруппу, не содержащуюся в C.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость.

Пусть G — периодическая IH_p-группа, не принадлежащая IH-группам. Согласно лемме 1 она содержит нормальную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка p. Тогда подгруппа $C_G(a) = C$ — абелева или IH-группа, причем все ее бесконечные абелевы подгруппы нормальны в G. В самом деле, если B — бесконечна абелева подгруппа из C и если $p \in \pi(B)$, то $B \lhd G$ по определению IH_p-групп. Если $p \notin \pi(B)$, то $\langle a, B \rangle \lhd G$ и потому $B \lhd G$.

Пусть H — произвольная бесконечная абелева pd-подгруппа группы G. Если $a \in H$, то $H \subset C$. Если $a \notin H$, то $[a, H] \subset \langle a \rangle \cap H = 1$, так как $H \lhd G$. Значит, и в этом случае $H \subset C$. Следовательно, подгруппа C удовлетворяет условиям 1—5 теоремы. Теорема доказана.

Следствие 2. *Любая периодическая IH_2-группа является IH-группой.*

Переходим теперь к изучению непериодических IH_p-групп.

Теорема 2. *Непериодическая неабелева группа G, содержащая бесконечную абелеву pd-подгруппу, тогда и только тогда будет IH_p-группой, когда она является группой одного из следующих типов:*

1) *G — непериодическая IH-группа, содержащая бесконечную абелеву pd-подгруппу;*

2) *G — непериодическая неабелева pdI-группа;*

3) *$|G_p| = p \neq 2$, $G_p \subset Z(G)$ и G/G_p — непериодическая IH-группа;*

4) *$p = 2$, a — единственная центральная инволюция в G, содержащаяся в любой бесконечной абелевой $2d$-подгруппе из G, и $G/\langle a \rangle$ — непериодическая IH-группа;*

5) *$p \neq 2$, $G = C\langle b \rangle$, где C — непериодическая абелева pd-подгруппа, $b^4 = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$ и группа G имеет бесконечный центр;*

6) *$p \neq 2$, $G = \langle a \rangle \rtimes C_1 \langle b \rangle$, где $|a| = |G_p| = p$, C_1 — непериодическая абелева группа, $\langle a, C_1 \rangle$ — неабелева pdI-группа, являющаяся централизатором любой бесконечной циклической нормальной подгруппы группы G, $b^{2^n} = 1$, $n \geqslant 1$ и $b^2 \in C_1$; при этом любая абелева нециклическая pd-подгруппа группы G содержится в $C_G\langle a, x \rangle$, где $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \lhd G$ и любая pd-подгруппа из $C_G\langle a, x \rangle$ нормальна в G;*

7) *$G = (\langle a \rangle \times A\langle b \rangle)\langle d \rangle$, где $|a| = p \neq 2$, $\langle a \rangle = G_p \lhd G$, $C_G(a) = \langle a \rangle \times A\langle b \rangle$ и $A\langle b \rangle \lhd G$, $A\langle b \rangle$ — непериодическая IH-группа и все подгруппы из A нормальны в G, $d^n \in C_G(a)$ и n делит $p - 1$.*

Доказательство. Каждая из указанных в теореме групп является IH_p-группой. В леммах 2—8 содержится доказательство необходимости условий теоремы.

Лемма 2. *Если центр непериодической IH_p-группы G содержит нециклическую подгруппу порядка p^2, то $p = 2$ и G является IH-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — непериодическая IH_p-группа и $Z(G) \supset \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, где $|a_1| = |a_2| = p$. Пусть A — произвольная бесконечная абелева подгруппа группы G. Если $p \in \pi(A)$, то $A \lhd G$ по определению IH_p-групп. Если $p \notin \pi(A)$, то $\langle a_1, A \rangle \cap \langle a_2, A \rangle = A \lhd G$. Значит, G является IH-группой. Так как центр непериодической IH-группы конечен и не содержит элементов порядка больше двух [4], то $p = 2$. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Если в непериодической неабелевой группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы, то $G = C\langle b \rangle$, где C — непериодическая абелева группа, $b^4 = 1$ и $b^{-1}cb = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. Покажем, что централизатор C произвольного элемента x бесконечного порядка группы G абелев. Если $y \in C$, $z \in C$ и $|y| = |z| = \infty$, то $\langle y \rangle \lhd G$, $\langle z \rangle \lhd G$ и потому $[y, z] = 1$. Если $c \in C$ и $c < \infty$, то $|xc| = \infty$ и $1 = [y, xc] = [y, c]$. Если $c_1 \in C$, $c_2 \in C$ и $c_1 < \infty$, $|c_2| < \infty$, то $|c_1x| = |c_2x| = \infty$ и потому $1 = [c_1x, c_2x] = [c_1, c_2]$. Значит, подгруппа C абелева.

Очевидно, что подгруппа C содержит любой элемент бесконечного или конечного нечетного порядка. Поэтому $G = C\langle b \rangle$, $b^{2^n} = 1$, и элемент b не перестановочен ни с одним элементом бесконечного порядка. Следовательно, если $y \in C$ и $|y| = \infty$, то $b^{-1}yb = y^{-1}$. Если $c \in C$ и $|c| < \infty$, то $|cy| = \infty$ и потому $b^{-1}cyb = (cy)^{-1} = c^{-1}y^{-1}$. Отсюда $b^{-1}cb = c^{-1}$. Так как $b^{-1}(yb^2)b = (yb^2)^{-1} = y^{-1}b^2$, то $b^4 = 1$. Лемма доказана.

Л е м м а 4. *Если центр непериодической IH_p-группы G содержит подгруппу $\langle a \rangle$ порядка $p \neq 2$, которая не совпадает с силовской p-подгруппой группы G, то G является pdI-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. По следствию 1 группа G содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу $\langle x \rangle$. Если при этом $b \in G$, $|b| = p$, но $b \notin \langle a \rangle$, то $[b, x] = 1$ и потому $\langle b, x \rangle \lhd G$. Отсюда $\langle b \rangle \lhd G$. Тогда для любого элемента y бесконечного порядка имеем $[b, y] \in \langle b \rangle \cap \langle a, y \rangle = 1$. Значит, $\langle a, y \rangle \cap \langle b, y \rangle = \langle y \rangle \lhd G$. Следовательно, в группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы. Но по лемме 3 центр группы G не содержит элементов порядка $p \neq 2$. Таким образом, группа G содержит единственную подгруппу $\langle a \rangle$ порядка p.

По условию $G_p \neq \langle a \rangle$. Поэтому в G существует элемент h порядка p^2. Тогда $h \in C_G(x)$ и потому $\langle h \rangle \lhd G$. Предположим, что $C_G(x) \neq G$. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что $g^{-1}xg = x^{-1}$. Так как $\langle xh, a \rangle \lhd G$, то $\langle x^p h^p \rangle = \langle x^p a^k \rangle \lhd G$, причем $(k, p) = 1$. Отсюда $g^{-1}x^p a^k g = x^{-p}a^k$. Но $x^{-p}a^k \neq x^p a^k$ и $x^{-p}a^k \neq x^{-p}a^{-k}$, что невозможно. Значит, $C_G(x) = G$. Тогда в фактор-группе $G/\langle a \rangle$ нормальны все бесконечные циклические подгруппы и ее центр непериодический. По лемме 3 она абелева. Тогда в G нормальны все pd-подгруппы, т. е. она является pdI-группой. Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Если силовская p-подгруппа G_p непериодической IH_p-группы G имеет порядок $p \neq 2$ и содержится в ее центре, то G является либо pdI-группой, либо G/G_p — IH-группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы, но не является pdI-группой. Очевидно, что в фактор-группе $\overline{G} = G/G_p$ нормальны все бесконечные циклические подгруппы. Покажем, что $\overline{G}$ является IH-группой. Возьмем произвольную бесконечную абелеву подгруппу $\overline{A}$ из $\overline{G}$. Если подгруппа $\overline{A}$ непериодическая, то она порождается элементами бесконечного порядка и потому $\overline{A} \lhd \overline{G}$. Если $\overline{A}$ — периодическая группа, то ее прообраз A является периодической pdI-группой. Из описания pdI-групп в [5] следует, что G_p дополняема в A бесконечной абелевой или гамильтоновой группой. Тогда $A \lhd G$ и потому $\overline{A} \lhd \overline{G}$. Следовательно, $\overline{G}$ является IH-группой. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Подгруппа G_p непериодической IH_p-группы G, удовлетворяющей условиям леммы 5, может быть недополняемой в G. Соответствующим примером является группа $G = ((\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \rightthreetimes \langle c\rangle) \rightthreetimes \langle d\rangle$, где $|a| = p \neq 2$, $|b| = |c| = \infty$, $|d| = 2$, $[a, b] = [a, c] = [a, d] = 1$, $[b, c] = a$, $dbd = b^{-1}$, $dcd = c^{-1}$.

Лемма 6. *Если непериодическая IH_2-группа G содержит единственную центральную инволюцию a, то инволюция a содержится в любой бесконечной абелевой $2d$-подгруппе группы G и G является либо $2dI$-группой, либо $G/\langle a\rangle$ — IH-группа.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. Тогда любая бесконечная абелева $2d$-подгруппа группы G содержит инволюцию a, так как иначе в центре группы G окажется еще по крайней мере одна инволюция. Если G не является $2dI$-группой, то далее аналогично лемме 5 доказываем, что $G/\langle a\rangle$ — IH-группа. Лемма доказана.

Замечание. В лемме 6 от условия включения подгруппы $\langle a\rangle$ в любую бесконечную абелеву $2d$-подгруппу отказаться нельзя, так как из того, что $G/\langle a\rangle$ является IH-группой, не следует, что G — IH_2-группа. Подтверждением этого факта является группа $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \rightthreetimes \langle d\rangle$, где $|a| = |b| = |d| = 2$, $|c| = \infty$, $[a, d] = 1$, $[b, d] = a$, $dcd = c^{-1}$.

В дальнейшем через $\langle a\rangle$ обозначаем нормальную не центральную подгруппу порядка $p \neq 2$, через $\langle x\rangle$ — бесконечную циклическую нормальную подгруппу.

Лемма 7. *Если в непериодической IH_p-группе G централизатор $C_G(a)$ подгруппы $\langle a\rangle$ является pdI-группой (абелевой или неабелевой), то в G нормальны все абелевы нециклические pd-подгруппы и она является группой одного из типов* 1, 2, 5, 6 *теоремы* 2.

Доказательство. Покажем сначала, что в группе G, удовлетворяющей условиям леммы, централизаторы различных подгрупп порядка p (если они в группе имеются) совпадают. Пусть $\langle a_1\rangle \neq \langle a_2\rangle$ и $|a_1| = |a_2| = p \neq 2$. По следствию 1 группа G содержит нормальную бесконечную циклическую подгруппу $\langle x\rangle$. Так как $p \neq 2$, то любая p-подгруппа из G включается в $C_G(x)$ и потому нормальна в G. Значит, $\langle a_1\rangle \lhd G$, $\langle a_2\rangle \lhd G$, $\langle a_1a_2\rangle \lhd G$. Отсюда $C_G(a_1) = C_G(a_2)$.

Пусть теперь A — конечная абелева нециклическая pd-подгруппа. Тогда $A \subset C_G(a)$. Из описания непериодических pdI-групп в [5] следует, что $x^p \in Z(C_G(a))$. Тогда $\langle A, x^p\rangle \lhd G$ и потому $A \lhd G$. Значит, в G нормальны все абелевы нециклические pd-подгруппы, т. е. она является $pd\overline{HA}$-группой. Из описания $pd\overline{HA}$-групп в [9] следует, что в этом случае G является группой одного из типов 1, 2, 5, 6 теоремы 2. Лемма доказана.

Если $C_G(a)$ не является pdI-группой, то по лемме 4 $\langle a\rangle$ — силовская p-подгруппа группы $C_G(a)$ и по лемме 5 фактор-группа $C_G(a)/\langle a\rangle$ — IH-группа.

Лемма 8. *Если в непериодической IH_p-группе G фактор-группа $C_G(a)/\langle a\rangle$ является IH-группой, то G является группой типа 7 теоремы* 2.

Доказательство. Сначала покажем, что центр группы G, удовлетворяющей условиям леммы, периодический. Пусть $z \in Z(G)$ и $|z| = \infty$. Тогда для любой конечной абелевой pd-подгруппы F имеем $\langle F, z\rangle \lhd G$ и потому $F \lhd G$. Значит, в G нормальны все абелевы нециклические pd-подгруппы. Тогда по лемме 8 из [9] G является pdI-группой, что невозможно по условию.

Пусть теперь $x \in G$, $|x| = \infty$ и $\langle x\rangle \lhd G$. По доказанному выше $[G : C_G(x)] = 2$. Поэтому $C_G(x) \not\subset C_G(a)$. Значит, $a \notin Z(C_G(x))$. Так как в группе $C_G(x)$ нормальны все абелевы нециклические pd-подгруппы, то по лемме 8 из [9] $C_G(x)$ является неабелевой pdI-группой с дополняемой в ней силовской подгруппой $\langle a\rangle$ порядка p. Поскольку $p \neq 2$, то из каждого элемента подгруппы $\langle a\rangle$ однозначно извлекается корень степени $2 = [G : C_G(x)]$. Тогда по теореме 1 из [10] подгруппа $\langle a\rangle$ дополняема в G. Значит, она дополняема и в подгруппе $C_G(a)$. Так как $C_G(a)/\langle a\rangle$ является IH-группой, то в соответствии с [4] имеем $C_G(a) = \langle a\rangle \times A\langle b\rangle$, где A — непериодическая абелева группа, $b^4 = 1$, $b^{-1}cb = c^{-1}$ для любого элемента $c \in A$ и $|Z(A\langle b\rangle)| < \infty$.

Покажем теперь, что $(C_G(a))^p = A\langle b\rangle$. Если $|b| = 2$, то $|cb| = 2$ для любого элемента $c \in A$. Так как $p \neq 2$, то $b^p = b$ и $(cb)^p = cb$ для любого элемента $c \in A$. Следовательно, подгруппы $(C_G(a))^p$ и $A\langle b\rangle$ имеют одну и ту же систему образующих. Аналогичное утверждение получаем при $|b| = 4$. Так как $C_G(a) \lhd G$ и подгруппа $(C_G(a))^p = A\langle b\rangle$ характеристична в $C_G(a)$, то $A\langle b\rangle \lhd G$.

Покажем далее, что все подгруппы из A нормальны в G. По условию $G = (\langle a\rangle \times A\ \langle b\rangle)\ \langle d\rangle$, где $d^n \in (\langle a\rangle \times A\ \langle b\rangle)$ и n делит $p - 1$. Пусть H — бесконечная подгруппа из A. Тогда $[d, H] \subset A\ (b) \cap \langle a, H\rangle = H$. Значит, $H \lhd G$. Пусть $g \in A$ и $|g| < \infty$. Тогда для $x \in A$ и $|x| = \infty$ имеем $\langle a, g, x\rangle \lhd G$. Отсюда $\langle g\rangle \lhd G$. Значит, все подгруппы из A нормальны в G. Лемма доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР.— 1966.— **171**.— С. 806—809.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн.— 1967.— **19**, № 6.— С. 111—131.
3. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Там же.— 1969.— **21**, № 2.— С. 193—200.
4. *Черников С. Н.* Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 47—65.
5. *Лиман Ф. Н.* Группы с некоторыми системами инвариантных *pd*-подгрупп // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 100—118.
6. *Лиман Ф. Н.* О периодических группах, все разложимые *pd*-подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 58—61.
7. *Лиман Ф. Н.* Непериодические группы, все разложимые *pd*-подгруппы которых нормальны // Там же.— № 3.— С. 330—335.
8. *Лиман Ф. Н.* О бесконечных группах, все бесконечные *pd*-подгруппы которых нормальны // Изв. вузов. Математика.— 1990.— № 3.— С. 75—78.
9. *Лиман Ф. Н.* О группах, все абелевы нециклические *pd*-подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 78.— С. 974—980.
10. *Dixon I. D.* Complements of normal subgroups in infinite groups // Proc. London. Math. Soc.— 1967.— **17**, N 3.— P. 431—446.

Получено 15.11.91