УДК 519.44/45

В. М. Левчук, д-р физ.-мат. наук (Краснояр. ун-т)

Коммутаторное строение некоторых подгрупп групп Шевалле

Приведено решение вопроса 6.34 из «Коуровской тетради»: на группы Шевалле и вместе с тем на ортогональные и унитарные группы переносится известная теорема Ю. И. Мерзлякова о взаимном коммутанте ковровых подгрупп.

Наведено розв'язок питання 6.34 з «Коуровського зошита»: на групи Шевалле і разом з тим на ортогональні та унітарні групи переноситься відома теорема Ю. І. Мерзлякова про взаємний комутант килимових підгруп.

Коммутаторные и нижние центральные ряды различных конгруэнц-подгрупп и близких с ними подгрупп групп $GL_n(K)$ строятся в работах Ф. Холла [1], Ю. И. Мерзлякова [2], Д. А. Супруненко [3] и других авторов. В [2] предложен единообразный способ их построения с помощью ковров идеалов; в частности, он позволил исследовать коммутаторное строение силовских p-подгрупп групп $GL_n(Z_{p^m})$ (см. также [4]).

Его суть заключается в следующем. Зафиксируем квазирегулярный идеал J ассоциативного коммутативного кольца K с единицей и определим последовательность идеалов соотношением $J_0 = K$, $J_{n+1} = J_n J$, $n \geqslant 0$. Последовательность ковров идеалов $\{J_{f(i,j,k)} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, $k = k_0$, $k_0 + 1$, ..., выделяется в [2] с помощью определенной функции $f(i, j, k)$. Основная теорема в [2] показывает при достаточно общих условиях, что в группах $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ взаимный коммутант подгрупп, которые определяются k- и m-м коврами, есть подгруппа, определяемая $(k+m)$-м ковром такого же вида.

Для симплектических групп аналог основной теоремы из [2] доказал Ю. В. Сосновский [5] (см. также [6—8]). Ю. И. Мерзляков поставил в «Коуровской тетради» [9] вопрос 6.34: доказать аналогичную теорему для: а) ортогональных групп, б) унитарных групп. Ниже теорема Ю. И. Мерзлякова переносится на группы Шевалле и, таким образом, на ортогональные и унитарные группы.

Результаты статьи анонсированы в [10, 11].

1. Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $p(\Phi) = \max\{(r, r)/(s, s) \mid r, s \in \Phi\}$.

(Элементарная) группа Шевалле $E(\Phi, K)$ нормального типа Φ над K, как и в [12] (§ 3), порождается корневыми элементами $x_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in K$. Пространство представления соответствующей алгебры Ли фиксируем произвольно. Оно допускает автоморфизм $h(\chi)$ с условием $h(\chi)^{-1} x_r(t)\, h(\chi) = x_r(\chi(r)\, t)$ для всевозможных гомоморфизмов χ аддитивной группы $L_0(\Phi)$, порожденной всеми корнями, в мультипликативную группу $K^\#$ кольца K.

Пусть f — функция, определенная для натуральных чисел $k \geqslant k_0$ и $r \in \Phi \cup \{0\}$, принимающая неотрицательные целочисленные значения с условиями:

F1) $f(0, k) > 0$;

F2) $f(r, k) \leqslant f(r, k+1)$;

F3) $f(q, k+m) \leqslant f(r, k) + f(q-r, m)$, $q, r, q-r \in \Phi \cup \{0\}$,

причем для любых фиксированных q, k, m существует r, при котором равенство достигается.

Пару $k, m \geqslant k_0$ назовем неособенной относительно f, если решетка дуальной к Φ системы $\Phi' = \{h_r \mid r \in \Phi\}$ порождается ко-корнями $h_r = 2r/(r,r)$ такими, что в условии F3 при $q = 0$ выполняется равенство.

Выберем в коммутативном кольце K последовательность идеалов J_n, $n \geqslant 0$, с условием:

$$J_1 \text{ — квазирегулярный идеал,} \quad J_n J_m = J_{n+m}. \tag{1}$$

В группе Шевалле типа Φ над K диагональные элементы $h(\chi)$ для всевозможных K-характеров χ решетки корней $L_0(\Phi)$, у которых все значения равны 1 по модулю $J_{f(0,k)}$, и множества $x_r(J_{f(r,k)})$, $r\in\Phi$, порождают подгруппу $G^{(k)}$. Ее пересечение с $E(\Phi, K)$ обозначим через $S^{(k)}$.

Пару Φ, K назовем неособенной, если $p(\Phi)!\,K=K$ или $\Phi=A_1$ $(=C_1)$, $2K=K$. Аналогом теоремы Ю. И. Мерзлякова [2] для групп Шевалле нормальных типов является следующая теорема.

Теорема 1. 1) $[G^{(k)}, G^{(m)}]\subset S^{(k+m)}$; 2) *если* k, m *и* Φ, K — *неособенные пары, то* $[S^{(k)}, S^{(m)}]=S^{(k+m)}$.

Доказательство. а). Положим $\mathfrak{A}_r^{(k)}=J_{f(r,k)}$. Пусть r, $s\in\Phi$, $a\in\mathfrak{A}_r^{(k)}$, $b\in\mathfrak{A}_s^{(m)}$. Коммутатор $[x_r(a), x_s(b)]$ при $r+s\in\Phi$ разложим в произведение сомножителей вида $x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-a)^i b^j)$, где $i,j\geqslant 1$, $ir+js\in\Phi$, а $C_{ij,rs}$ — делитель числа $p(\Phi)!$, определяемый коммутаторной формулой Шевалле. Аргумент сомножителя лежит в $\mathfrak{A}_{ir+js}^{(ik+jm)}$ в силу условия F3 и того, что корень $ir+js$ можно получить, прибавляя к $r+s$ корень r или s, быть может, несколько раз, но всякий раз оставаясь в пределах Φ. С учетом условия F2 имеем включение коммутатора в $S^{(k+m)}$. Аналогичное включение при $s=-r$ получаем из соотношений

$$[x_r(a),\ x_{-r}(b)]=x_r(c^{-1}a^2b)\,h_r(c)\,x_{-r}(-c^{-1}ab^2), \tag{2}$$
$$a,b\in K,\quad c=1-ab\in K^{\#},\quad r\in\Phi,\quad [u,v]=u^{-1}v^{-1}uv,$$

которые вытекают из соответствующих соотношений в группе $SL_2(K)$ При $h(\chi)\in G^{(m)}$ находим

$$[x_r(a), h(\chi)]=x_r((1-\chi(r))\,a)\in S^{(k+m)}.$$

Утверждение 1 теоремы непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* M_i — *непустые подмножества некоторой группы* G, $G_i=\text{гр}\,(M_i)$, $i=1,2,3$ *причем* $M_1\cap M_2\supset M_3$. *Если* $[g_1,g_2]\in G_3$ *при всех* $g_1\in G_1$, $g_2\in G_2$, *то* $[G_1,G_2]\subset G_3$ *и* $G_3\lhd G_i$.

Справедливость утверждения леммы вытекает из соотношений (15) леммы 3.2.2 [4].

б). Для произвольного $q\in\Phi$, учитывая условие F3, можно найти r, $s\in\Phi\cup\{0\}$ с условием $r+s=q$, $\mathfrak{A}_r^{(k)}\mathfrak{A}_s^{(m)}=\mathfrak{A}_q^{(k+m)}$. Допустим, что r, $s\in\Phi$. По доказанному взаимный коммутант $[S^{(k)}, S^{(m)}]$ лежит в $S^{(k+m)}\subset S^{(k)}\cap S^{(m)}$ и, следовательно, замкнут относительно коммутирований с $S^{(k)}$ и с $S^{(m)}$. Поскольку Φ, K — неособенная пара, то взаимный коммутант должен содержать

$$x_{ir+js}((\mathfrak{A}_r^{(k)})^i\,(\mathfrak{A}_s^{(m)})^j),\quad ir+js\in\Phi,\quad i>0,\quad j>0,$$

и, следовательно, содержит $x_q(\mathfrak{A}_q^{(k+m)})$.

Рассмотрим случай, когда $r=0$. Для любого элемента $h(\chi)\in S^{(k)}$ имеем $[h(\chi),\ x_q(G_q^{(m)})]=x_q((\chi(q)-1)\,\mathfrak{A}_q^{(m)})$. При $\Phi\neq C_n$, $n\geqslant 1$, значение $\chi(q)$ может быть любым элементом из $\mathfrak{A}_0^{(k)}+1$ в силу условия F1 и леммы 12 из [13]. Если же $\Phi=C_n$, $n\geqslant 1$, то $\chi(q)$ пробегает, вообще говоря, квадраты элементов $1+t\in\mathfrak{A}_0^{(k)}+1$, но здесь $\mathfrak{A}_0^{(k)}+2\subset K^{\#}$ в силу неособенности пары Φ, K и поэтому $[(1+t)^2-1]\,\mathfrak{A}_q^{(m)}=t\mathfrak{A}_q^{(m)}$. Таким образом, для всех типов Φ получаем

$$x_q(\mathfrak{A}_q^{(k+m)})=x_q(\mathfrak{A}_0^{(k)}\mathfrak{A}_q^{(m)})\subset[S^{(k)}, S^{(m)}].$$

в). Заметим, что группа $S^{(k+m)}$ порождается корневыми элементами и элементами $h(\chi_{s,t})=h_s(t)$, $s\in\Phi$, $t\in 1+\mathfrak{A}_0^{(k+m)}$ (см. [14], § 7.1). Используя свойства F1, F3 и соотношения (2), при любом $r\in\Phi$ находим

$$h_r(1+\mathfrak{A}_r^{(k)}\mathfrak{A}_{-r}^{(m)})\subset\text{гр}\,\langle x_a(\mathfrak{A}_a^{(k+m)})\,(a\in\{r,-r\}),\quad [x_r(\mathfrak{A}_r^{(k)}),\ x_{-r}(\mathfrak{A}_{-r}^{(m)})]\rangle.$$

В случае $\mathfrak{A}_r^{(k)}\mathfrak{A}_{-r}^{(m)} = \mathfrak{A}_0^{(k+m)}$, учитывая п. б), получаем включения $h(\chi_{r,t}) = h_r(t) \in [S^{(k)}, S^{(m)}]$, $t \in 1 + \mathfrak{A}_0^{(k+m)}$. Для неособенной пары k, m существует семейство корней r_i с указанным свойством, для которых ко-корни h_{r_i} порождают решетку дуальной системы корней. Следовательно, для всякого $s \in \Phi$ существуют целые числа m_i такие, что $h_s = \sum\limits_i m_i h_{r_i}$. Поскольку

$$\prod_i \chi_{r_i,t}^{m_i}(a) = \prod_i t^{(h_{r_i},a)m_i} = t^{(h_s,a)}, \quad a \in L_0(\Phi), \tag{3}$$

то $h_s(t)$ — произведение элементов $h_{r_i}(t)^{m_i}$. Отсюда получаем равенство $[S^{(k)}, S^{(m)}] = S^{(k+m)}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Ограничение на равенства в условии F3 используется (см. п. б)) только при доказательстве утверждения 2 теоремы 1 и лишь для фиксированной пары k, m. Требование неособенности пары k, m в утверждении 2, как показывает доказательство, можно опустить при $\mathfrak{A}_0^{(k+m)} = 0$.

Теореме Ю. И. Мерзлякова [2] соответствует случай $\Phi = A_n$ теоремы 1, а симплектическому аналогу, установленному Ю. В. Сосновским [5],— случай $\Phi = C_n$. Применяемые в [2] функции естественно переносятся и на рассматриваемую здесь ситуацию.

П р и м е р 1. Функция $f(r, k) = k$ очевидно удовлетворяет условиям F1—F3 (неравенство в условии F3 здесь превращается в равенство), а особенных пар k, m для нее нет. Подгруппа $S^{(k)}$ здесь является конгруэнц-подгруппой уровня J_k элементарной группы Шевалле типа Φ над K. Из теоремы 1 вытекает, что для любой неособенной пары Φ, K нижний центральный ряд конгруэнц-подгруппы уровня J_1 состоит из подгрупп $S^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, а коммутаторный ряд — из подгрупп $S^{(2^i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, на группы Шевалле распространяются результаты Д. А. Супруненко [3].

П р и м е р 2. Другую важную функцию f получаем, полагая $f(r, k) = -[(\mathrm{ht}\, r - k)/h]$, $k \geqslant 1$, $r \in \Phi \cup \{0\}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа, h — число Кокстера системы корней Φ (см. [15], табл. I—IX), $\mathrm{ht}\, r$ — высота корня r, $\mathrm{ht}\, 0 = 0$. Неравенства в условиях F1—F3 здесь очевидно выполняются. Отметим также, что равенство в условии F3 не достигается, например, если $\Phi = G_2$, $q = 3a + b$, $k = m = 2$. С другой стороны, если $k = 1$, то при любых фиксированных q, m равенство в условии F3 достигается. Особенные пары k, m для f существуют и для них числа $k + m$, $2k$ кратны h, а числа $k - 1$, $m - 1$ не кратны h.

Построенную функцию f при $\Phi = A_n$ использовал Ю. И. Мерзляков (в терминологии [2]) для получения из теоремы о взаимном коммутанте результатов Ф. Холла [1], а также для исследования коммутаторного строения силовских p-подгрупп общей и специальной линейных групп над кольцом Z_{p^m} классов вычетов целых чисел по модулю p^m, p — простое число. (Для случаев $\Phi = C_n$, D_n см. также [5, 6].)

Кольцевой гомоморфизм $K = Z_{p^m} \to K/pK \simeq Z_p$ индуцирует гомоморфизм $\psi : E(\Phi, K) \to E(\Phi, K/pK)$. Известно (см., например, [16]), что ядро $\mathrm{Ker}\, \psi$ разложимо в произведение пересечений ядра с верхней и нижней унипотентными подгруппами и диагональной подгруппой. В частности, ядро является нормальной p-подгруппой; если $E(\Phi, K)$ построена как универсальная группа Шевалле, имеем $|\mathrm{Ker}\, \psi| = p^T$, $T = (m - 1)(|\Phi| + |\Pi(\Phi)|)$. Поэтому силовская p-подгруппа группы $E(\Phi, K)$ совпадает с произведением $U(\Phi, K) \cdot \mathrm{Ker}\, \psi$ и, следовательно, совпадает с подгруппой $S^{(1)}$, построенной по функции f из примера 2 и последовательности идеалов $J_k = p^k K$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. С учетом замечания 1 из теоремы 1 вытекает такое следствие.

С л е д с т в и е 1. *Пусть $S^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, — подгруппы группы Шевалле $E(\Phi, K)$, $K = Z_{p^m}$, построенные по функции f из примера 2 и* *последовательности идеалов* $J_n = p^n K$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Тогда* $S^{(1)}$ — *силовская* p-*подгруппа и ее нижний центральный ряд при условии* $p > p(\Phi)$, *а если* $\Phi = A_1$, *и при* $p > 2$ *совпадает с рядом* $S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset S^{(3)} \supset \ldots \ldots \supset S^{(mh)} = 1$.

Отметим, что порядок силовской p-подгруппы универсальной группы Шевалле $E(\Phi, Z_{p^m})$ в силу замечаний перед следствием 1 равен p^M, $M = (m-1)(|\Phi| + |\Pi(\Phi)|) + |\Phi^+|$. Для классических типов Φ имеем

$$M = m(n^2-1) - n(n+1)/2 + 1 \text{ при } \Phi = A_{n-1},$$

$$M = n(2mn + m - n - 1) \text{ при } \Phi = B_n \text{ или } C_n,$$

$$M = mn(2n-1) - n^2 \quad \text{при } \Phi = D_n.$$

Если k, m или Φ, K — особенная пара, утверждение 2 теоремы 1, как показывают примеры Ю. И. Мерзлякова [2], вообще говоря, неверно. Коммутаторное строение силовских p-подгрупп группы $GL_n(Z_{p^m})$ в исключительных случаях ($n = p = 2$ и $n = 2^t > 2$) исследовал Ю. Е. Вапнэ [17]. (см. также [18]).

Другого характера функцию с условиями F1—F3 получим, зафиксировав корень $s \in \Phi$ и положив

$$f(r, k) = k + 2(r, s)/(s, s), \quad k \geqslant \max\{2, p(\Phi)\}.$$

Она имеет неотрицательные целочисленные значения, поскольку все числа Картана системы корней есть целые числа и по модулю они не превышают $p(\Phi)$ или 2.

2. Рассматриваемые в теоремах Ю. И. Мерзлякова [2] и Ю. В. Сосновского [5] подгруппы определяются ковром идеалов, у которого все диагональные идеалы квазирегулярны (см. также [7, 8]). Оказывается, все такие подгруппы, как и подгруппы из теоремы 1, допускают факторизацию, аналогичную известному разложению конгруэнц-подгруппы по модулю квазирегулярного идеала.

Напомним, что элементарным ковром типа Φ над K называется (см. [9], вопрос 7.28, и [13]) всякий набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ аддитивных подгрупп кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subset \mathfrak{A}_{ir+js}, \; r, \; s, \; ir + js \in \Phi, \quad i > 0, \quad j > 0.$$

Ему соответствует подгруппа $E(\mathfrak{A}) = \text{гр}(x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi)$ группы Шевалле. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — *элементарный ковер типа* Φ *аддитивных подгрупп коммутативного кольца* K, *удовлетворяющий условиям*:

1) *множество* $1 - \mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}$ *лежит в* $K^{\#}$, *порождая подгруппу* Δ_r, $r \in \Phi$;

2) $\Delta_r\mathfrak{A}_r \subset \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$;

3) $\Delta_r^{(h_r, s)}\mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_s$, r, s, $r + s \in \Phi$.

Тогда $E(\mathfrak{A}) = Y^+Y_0Y^-$, *где* $Y_0 = \text{гр}(h_r(\Delta_r) \mid r \in \Phi)$, *а подгруппы* Y^+, Y^- *порождаются подгруппами* $x_r(\mathfrak{A}_r) = Y_r$ *для всех* $r \in \Phi^+$ *и соответственно* $r \in \Phi^-$.

Доказательство. В силу условий 1, 2 и соотношений (2) выполняются разложения

$$\text{гр}(Y_r, Y_{-r}) = Y_r h_r(\Delta_r) Y_{-r}, \quad r \in \Phi.$$

Они доказывают теорему, если ранг $\Phi = 1$. В случае, когда ранг $\Phi > 1$, условие 3 и соотношения

$$h_r(t)\, x_s(b)\, h_r(t)^{-1} = x_s(t^{(h_r, s)} b)$$

обеспечивают Y_0-инвариантность подгрупп Y_s. Для фиксированного $r \in \Phi^+$

имеем $\Phi^-\setminus\{-r\}=\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ и

$$Y_0Y^+Y^-Y_r\subset Y_0Y^+[Y_r, Y_{s_1}]Y_{s_1}\ldots[Y_r, Y_{s_N}]Y_{s_N}Y_{-r}. \qquad (4)$$

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно установить включение

$$Y_0Y^+Y^-Y_r\subset Y_0Y^+Y^-. \qquad (5)$$

Так как $\mathfrak{A}$ — элементарный ковер, то взаимный коммутант $[Y_r, Y_s]$ лежит в произведении подгрупп Y_{jr+is_k}, $i>0$, $j>0$, $ir+js_k\in\Phi$. Если r — простой корень, то взаимный коммутант лежит в Y^- и включение (5) вытекает из (4). Далее проведем индукцию по высоте $h(r)$ корня r. Пусть $m=m(r)$ обозначает число корней s с условием

$$s\in\Phi^+,\quad s\neq r, \qquad (*)$$

и существует корень $ir-js$, $i>0$, $j>0$, имеющий высоту $h(r)$.

Ясно, что здесь $i>j>0$ и если $\Phi\neq G_2$, то s и $2r-s=ir-js$ — длинные, а r, $r-s$ — короткие корни из Φ^+. При $p(\Phi)=1$ должны иметь $m(r)=0$. С другой стороны, при $m(r)=0$ индукция по $h(r)$ и (4) доказывают включения (5).

При $m(r)>0$ можно считать, не теряя общности, что корни s с условием $(*)$ — это в точности s_k, где $1\leqslant k\leqslant m$. Тогда включения $[Y_r, Y_{-s_1}]\subset Y^+Y^-$ и (4) позволяют заключить справедливость (5) и при $m(r)=1$. Если $\Phi=C_l$, $l\geqslant 2$, и $m(r)>0$, то в обозначениях табл. III из [15] корень r имеет вид $\varepsilon_i+\varepsilon_j$, $1\leqslant i<j\leqslant l$, корень s с условием (*) определяется для него однозначно, $s=2\varepsilon_j$, и поэтому $m(r)=1$. Легко убедиться, что для системы корней Φ типа G_2 неравенство $m(r)\leqslant 1$ нарушается лишь для одного корня r из Φ^+, а именно для $r=2a+b$, где $\{a, b\}$ — база Φ. В исключительном случае доказательство включения (5) получаем непосредственно:

$$Y_0Y^+Y^-Y_{2a+b}\subset Y_0Y^+Y_{-a}(Y_{-a}Y_bY_{a+b}Y_{3a+2b})Y_{-3a-b}[Y_{2a+b}, Y_{-a-b}]Y_{-a-b}\times$$
$$\times[Y_{2a+b}, Y_{-3a-2b}]Y_{-3a-2b}Y_{-b}Y_{-2a-b}\subset Y_0Y^+Y_{-a}Y_{-3a-b}(Y_{3a+b}Y_aY_{-b})Y_{-a-b}\times$$
$$\times(Y_{3a+b}Y_a)Y^-\subset Y_0Y^+Y_{-a}Y_{-3a-b}Y_{3a+b}Y_aY^-\subset Y_0Y^+Y^-.$$

Рассмотрим оставшиеся случаи $\Phi=F_4$ и $\Phi=B_l$, $l\geqslant 3$. Условие $(*)$ для пары корней r, $s\in\Phi^+$ здесь равносильно требованию $r-s$, $2r-s\in\Phi^+$ и поэтому $[Y_r, Y_s]\subset Y_{r-s}Y_{2r-s}\subset Y^+$. Заметим также, что в представлении системы корней Φ, указанном в табл. II и VIII из [15], должны иметь $r=\varepsilon_i$, $s=\varepsilon_i-\varepsilon_j$, $i<j$; если $\Phi=F_4$, возможен еще случай $s=\varepsilon_i\pm\varepsilon_j$, $r=(\varepsilon_1+\varepsilon_k+s)/2$, где $\{i, j, k\}=\{2, 3, 4\}$, $i<j$. В исключительном случае неравенство $m(r)\leqslant 1$ нарушается только при $r=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+c\varepsilon_4)/2$, $c=\pm 1$; здесь $m(r)=3$ и $\{s_1, s_2, s_3\}=\{\varepsilon_2+\varepsilon_3, \varepsilon_2+c\varepsilon_4, \varepsilon_3+c\varepsilon_4\}$. Нетрудно убедиться, что во всех случаях для различных корней s, s' с условием $(*)$ $r-s-s'$ корнем не является, а $2r-s-s'=(r-s)+(r-s')$ есть положительный корень. Все корни $(2r-s)-s'$, $2r-s$, s' имеют одинаковую длину и поэтому

$$Y_{-s'}[Y_r, Y_{-s}]\subset[Y_r, Y_{-s}]Y_{2r-s-s'}Y_{-s'}.$$

Если s'' — третий корень с условием $(*)$, то $2r-s-s'-s''\in\Phi$ и, следовательно, подгруппы $Y_{-s''}$ и $Y_{2r-s-s'-s''}$ перестановочны. Отсюда вытекает включение

$$[Y_r, Y_{-s_1}]Y_{-s_1}\ldots[Y_r, Y_{-s_m}]Y_{-s_m}\subset Y^+Y_{-s_1}Y_{-s_2}\ldots Y_{-s_m}\subset Y^+Y^-.$$

Произведя соответствующую замену в (4), мы вновь индукцией по $h(r)$ получаем (5). Теорема доказана.

Очевидно, условия 1—3 теоремы выполняются, когда все $\mathfrak{A}_i$, $r\in\Phi$, есть идеалы и $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}$ — квазирегулярные идеалы. Утверждение теоремы, известно, когда $\mathfrak{A}$ — сеть идеалов типа Φ с квазирегулярными идеалами $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi^-$ (Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин [19], теорема 2).

3. Далее теорема Ю. И. Мерзлякова переносится на группы Шевалле скрученных типов $^2\Phi$ с $p(\Phi) = 1$, т. е. типов $^2E_6$, ^2A_n, ^2D_n. Указанная скрученная группа выделяется как централизатор автоморфизма π порядка 2 группы Шевалле типа Φ над кольцом K с инволюцией $\sigma : t \to \bar{t}$, $t \in K$, при котором

$$x_r(t) \to x_{\bar{r}}(\pm \bar{t}), \quad h(\chi) \to h(\bar{\chi})$$

$(r \in \Phi,\ t \in K,\ \chi \in \mathrm{Hom}(L_0(\Phi), K^{\#}))$. Здесь $r \to \bar{r}$, $r \in \Phi$, — подстановка системы корней Φ, изометрично продолжающая симметрию 2-го порядка графа Кокстера, $\bar{\chi}(\bar{r}) = \overline{\chi(r)}$. В определении автоморфизма π, как показывают, например, Р. Картер [14] (теорема 13.6.2) и Е. Абэ [20], можно взять знак плюс для всех корней $r \in \Phi$, за исключением случая $\Phi = A_{2n}$, $r = \bar{r}$, в котором берется знак минус.

Рассмотрим функцию f с условиями F1—F3 и дополнительным условием

$$\text{F4)}\ f(r, k) = f(\bar{r}, k), \quad r \in \Phi \cup \{0\}, \quad k \geqslant k_0.$$

Неособенность пары k, m относительно f при $p(\Phi) = 1$ всегда равносильна тому, что множество

$$\{r \in \Phi \mid f(r, k) + f(-r, m) = f(0, k + m)\tag{6}$$

порождает решетку корней $L_0(\Phi)$. Известно (см. [13], лемма 7), что система корней Φ каждого из типов E_6, D_n, A_{2n-1}, A_{2n} допускает отображение ζ на систему корней соответственно типа F_4, B_{n-1}, C_n, BC_n, продолжаемое до гомоморфизма решетки корней, при котором $\zeta(r) = \zeta(\bar{r})$. Если решетка системы, дуальной к $\zeta(\Phi)$, порождается множеством, которое дуально к ζ-образу множества (6), то k, m называем ζ-неособенной парой относительно f.

Идеалы J_0, $J_1, \ldots$ кольца K будут выбираться, по-прежнему, с условием (1) из п. 1 и условием σ-инвариантности. Пусть Φ — типа E_6, D_n или A_{2n-1}. Подгруппу скрученной группы типа $^2\Phi$ над K, которую порождают элементы

$$h(\chi) \quad (\chi \in \mathrm{Hom}(L_0(\Phi), 1 + J_{f(0,k)}), \quad \bar{\chi} = \chi),$$

$$x_r(t)\, x_{\bar{r}}(\bar{t}) \quad (r \in \Phi, \quad r \neq \bar{r}, \quad t \in J_{f(r,k)}),$$

$$x_r(u) \quad (r = \bar{r} \in \Phi, \quad u = \bar{u} \in J_{f(r,k)}),$$

обозначим через $G^{(k)}$, а ее пересечение с элементарной скрученной группой Шевалле $E(^2\Phi, K)$ — через $S^{(k)}$.

Теорема 3. *Пусть группы $G^{(k)}$ и подгруппы $S^{(k)}$ скрученной группы типа $^2\Phi$, $\Phi = E_6$, D_n, $n \geqslant 4$, или A_{2n-1}, $n > 1$, построены описанным способом, исходя из функции f с условиями* F1 — F4 *и σ-инвариантных идеалов J_0, J_1, $J_2, \ldots$ кольца K с квазирегулярным идеалом J_1 и условиями*

$$J_k^{1+\sigma} = J_k \cap \mathrm{Ker}(1 - \sigma), \quad J_k^{1+\sigma} J_m = J_{k+m} = J_k J_m. \tag{7}$$

Тогда: 1) $[G^{(k)}, G^{(m)}] \subset S^{(k+m)}$, 2) *если* $2K = K$ и k, m — *ζ-неособенная пара относительно* f, *то* $[S^{(k)}, S^{(m)}] = S^{(k+m)}$.

Доказательство утверждения 1 получаем, как и в теореме 1, непосредственно из коммутаторных соотношений между выбранными порождающими элементами групп $G^{(k)}$ и $G^{(m)}$ с учетом условий, наложенных на идеалы J_k. Докажем утверждение 2.

Группа $S^{(k)}$ при любом k порождается элементами

$$x_r(t)\, x_{\bar{r}}(\bar{t}), \quad r \in \Phi, \quad t \in J_{f(r,k)}.$$

$$h_r(u)\,h_{\bar r}(\bar u),\quad r\in\Phi,\quad u\in 1+J_{f(0,k)},$$

$$h_r(1+J^{1+\sigma}_{f(0,k)}),\quad r=\bar r\in\Phi.$$

Пусть $T^{(k)}$ — подгруппа, порожденная теми же элементами, лежащими над подкольцом $K^{1+\sigma}$. Заметим, что все элементы скрученной группы $E(^2\Phi, K)$, лежащие над подкольцом $K^{1+\sigma}$, образуют подгруппу, которая изоморфна группе Шевалле над кольцом $K^{1+\sigma}$ нормального типа $\zeta(\Phi)=$ $=F_4$, B_{n-1} или C_n, соответственно выбору Φ в теореме. С другой стороны, $J_p^{1+\sigma}$ есть идеалы кольца $K^{1+\sigma}$, которые при всех p, $q\geqslant 0$ удовлетворяют условию

$$J_p^{1+\sigma}J_q^{1+\sigma}=(J_p^{1+\sigma}J_q)^{1+\sigma}=J^{1+\sigma}_{p+q},$$

причем $J_1^{1+\sigma}$ — квазирегулярный идеал кольца $K^{1+\sigma}$. Учитывая также свойство F4 функции f и условие $2K=K$, мы можем применить утверждение 2 теоремы 1 к подгруппам $T^{(k)}$. Таким образом, для ζ-неособенной пары k, m имеем

$$[S^{(k)}, S^{(m)}]\supset[T^{(k)}, T^{(m)}]=T^{(k+m)}.$$

Пусть $\mathfrak{A}_r^{(k)}$ есть $J^{1+\sigma}_{f(r,k)}$ при $r=\bar r\in\Phi$ и $J_{f(r,k)}$ в остальных случаях при $r\in\Phi\cup\{0\}$. Положим также $x_{\{r\}}(t)=x_r(t)\,x_{\bar r}(\bar t)$, $r\neq\bar r$, $t\in K$, или $x_r(t)$ $r=\bar r$, $t=\bar t$. Зафиксируем $q\in\Phi$, $q\neq\bar q$. Если существуют r, $s=q-r\in\Phi$, для которых неравенство в условии F3 превращается в равенство, то $x_{\{q\}}(\mathfrak{A}_q^{(k+m)})$ совпадает со множеством $x_{\{q\}}(\mathfrak{A}_r^{(k)}\mathfrak{A}_s^{(m)})$. Последнее либо совпадает со взаимным коммутантом

$$[x_{\{r\}}(\mathfrak{A}_r^{(k)}),\ x_{\{s\}}(\mathfrak{A}_s^{(m)})],\tag{8}$$

либо, когда $q+\bar r$ или $q+\bar s\in\Phi$, равно ему по модулю $T^{(k+m)}$. Допустим, однако, что равенство в условии F3 достигается при $r=0$. Тогда, коммутируя $x_{\{q\}}(\mathfrak{A}_q^{(m)})$ с элементами $h_q(1+t)\,h_{\bar q}(1+\bar t)$, $t\in J_{f(0,k)}$, и используя обратимость элементов $2+t$ и равенства $t(2+t)J_{f(q,m)}=$ $=tJ_{f(q,m)}$, вновь получаем включение

$$x_{\{q\}}(\mathfrak{A}_q^{(k+m)})\subset[S^{(k)}, S^{(m)}].$$

Остается доказать, что взаимный коммутант содержит диагональные элементы $h_r(t)\,h_{\bar r}(\bar t)$ при $r\in\Phi$, $r\neq\bar r$, $t\in 1+J_{f(0,k+m)}$. Включения верны, если в условии F3 при $q=0$ выполняется равенство. Действительно, в этом случае, по доказанному, взаимный коммутант содержит подгруппу, порожденную множеством (8) при $s=-r$ и подгруппами $x_{\{p\}}(\mathfrak{A}_p^{(k+m)})$, $p\in\{r, -r\}$, и, следовательно, в силу соотношений (2) содержит $h_r(u)\times$ $\times h_{\bar r}(\bar u)$, $u\in 1+\mathfrak{A}_r^{(k)}\mathfrak{A}_{-r}^{(m)}$. Далее, если k, m — ζ-неособенная и, следовательно, неособенная пара относительно f, то произвольный корень s аддитивно порождается корнями r_i из множества (6), т. е. $s=\sum_i m_ir_i$, где m_i — целые числа. Как и в п. в) доказательства теоремы 1, отсюда получаем

$$h_s(t)\,h_{\bar s}(\bar t)=\prod_i(h_{r_i}(t)\,h_{\bar r_i}(\bar t))^{m_i}\in[S^{(k)}, S^{(m)}]$$

при любом $t\in 1+J_{f(0,k+m)}$. Теорема доказана.

Условия F1—F4, очевидно, выполняются для рассматривавшейся в примере 1 функции $f(r, k)=k$ (для нее все пары k, $m\geqslant 1$ ζ-неособенные), а также для функции f из примера 2.

Укажем примеры последовательностей идеалов J_0, J_1, …, удовлетворяющих условиям (7) теоремы 3:

а) $K=J_0$ — поле, $0=J_1=J_2=\ldots$;

б) $K = Z_{pm}[x]$ — кольцо многочленов от x над кольцом Z_{pm}, p — простое число > 2, $J_k = p^k K$, σ: $g(x) \to g(-x)$, $g(x) \in K$, $J_k^{1+\sigma} = p^k Z_{pm}[x^2]$;

в) K — кольцо комплексных чисел вида $a + bi$, где a, b пробегают множество $Q_{t'}$ рациональных чисел, у которых в несократимой записи знаменатель взаимно прост с фиксированным нечетным натуральным числом $t > 1$ (см. также [4], пример 22.2.2), σ — сопряжение комплексных чисел, $J_m = t^m K$, $J_m^{1+\sigma} = t^m Q_{t'}$.

4. Аналог теоремы о взаимном коммутанте для скрученных групп $E(^2\Phi, K)$, $\Phi = A_{2n}$, оказывается более громоздким, поскольку здесь в качестве порождающих элементов участвуют элементы вида

$$x_R(a, b) = x_r(a)\, x_{\bar r}(\bar a)\, x_{r+\bar r}(b), \quad R = \{r, \bar r, r + \bar r\}, \quad c_{r,\bar r} = 1, \quad (a, b) \in \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R} = \{(a, b) \mid a, b \in K,\ b + \bar b = a\bar a\}$, r, $r + \bar r \in \Phi$, $c_{r,\bar r}$ — структурная константа базиса Шевалле. Ясно также, что в этом случае требуется расширение соотношений (2).

Известно (см., например, [20]), что отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to x_R(a, b), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & \bar a & 1 \end{pmatrix} \to x_{-R}(a, b), \quad (a, b) \in \mathfrak{R},$$

продолжается до гомоморфизма элементарной унитарной группы на подгруппу гр $\langle x_R(\mathfrak{R}), x_{-R}(\mathfrak{R})\rangle$. Образ матрицы $\operatorname{diag}(t, t^{-1}\bar t, \bar t^{-1})$ совпадает с $h_r(t)\, h_{\bar r}(\bar t) = h_R(t)$. Прямыми вычислениями доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть (a, b), $(c, d) \in \mathfrak{R}$, $\mu = bd - ac$, причем $1 + \mu$ имеет обратный элемент $t \in K$. Тогда*

$$[x_R(a, b), x_{-R}(c, d)] = x_R(t(-a\mu - bc), t(b\mu + acb)) \times$$
$$\times h_R(1 + \mu)\, x_{-R}(t(c\mu + ad), t(d\mu + cad)).$$

Заметим далее, что элементы $x_R(a, b)$ с фиксированным R образуют подгруппу, которая при $2K = K$ порождается своими элементами

$$x_R(a) = x_R(a, (a\bar a)/2), \quad x_{2R}(u) = x_R(0, u)\,(= x_{r+\bar r}(u)).$$

В рассматриваемом случае R называем классом корней 3-го типа. С другой стороны, $Q = \{q, \bar q\}$ при $q \in \Phi$, $q \neq \bar q$, $q + \bar q \notin \Phi$, называем классом корней 2-го типа и полагаем $x_Q(t) = x_q(t)\, x_{\bar q}(\bar t)$. По определению подгруппа $S^{(k)}$ скрученной группы $E(^2\Phi, K)$ типа $^2A_{2n}$ порождается множествами элементов

$$x_R(J_{f(r,k)}), \quad r \in R, \quad x_{r+\bar r}(J^{1-\sigma}_{f(r+\bar r,k)}), \quad r, r + \bar r \in \Phi,$$

$$h_r(t)\, h_{\bar r}(\bar t), \quad t \in 1 + J_{f(0,k)}, \quad r \in \Phi, \quad r \neq \bar r,$$

где f — функция с условиями F1—F4 и $J_0, J_1, \ldots$ — σ-инвариантные идеалы кольца $K = 2K$ с условиями (1).

Учитывая лемму 2, как и в теоремах 1, 3, несложно получить включения $[S^{(k)}, S^{(m)}] \subset S^{(k+m)}$. В доказательстве обратных включений будут использоваться условия

$$J_k^{1-\sigma} J_m = J_k J_m = J_{k+m},$$
$$J_k^{1-\sigma}(J_m \cap \operatorname{Ker}(1 - \sigma)) = J_{k+m}^{1-\sigma}. \tag{9}$$

Зафиксируем k, $m\,(\geqslant k_0)$. Пусть $R = \{r, \bar r, r + \bar r\}$ — класс корней 3-го типа. Согласно условию F3 существуют $q,\ s \in \Phi \cup \{0\}$ такие, что $q+s=$ $=r+\bar{r}$ и

$$f(q, k)+f(s, m)=f(q+s,\ k+m). \tag{10}$$

При $s=0$, коммутируя подгруппу $x_{2R}(J^{1-\sigma}_{f(r+\bar{r},k)})=Y^{(k)}_{2R}$ с подгруппой диагональных элементов из $S^{(m)}$ и учитывая (9) (и условие $2K=K$), получаем $Y^{(k+m)}_{2R}$. Если же $q+s=r+\bar{r}$ и $q,\ s\in\Phi$, то $q,\ s$ лежат соответственно в классах $Q,\ S$, которые либо являются классами корней 2-го типа, либо $Q=S=R$. Но тогда подгруппа $Y^{(k+m)}_{2R}$ равна

$$[x_Q(J_{f(q,k)}),\ x_S(J_{f(s,m)})]. \tag{11}$$

Следовательно, она всегда лежит во взаимном коммутанте $[S^{(k)}, S^{(m)}]$. Аналогично взаимный коммутант содержит $x_P(J_{f(p,k+m)})$ для любого класса корней P 2-го типа с представителем p (в частности, здесь используем (9)) и, кроме того, содержит элементы $h_p(t)h_{\bar{p}}(\bar{t}),\ \ t\in 1+$ $+J_{f(0,k+m)}$, если $f(-p, k)+f(p, m)=f(0,\ k+m)$.

Допустим сейчас, что в (10) $q+s=r$. Тогда с точностью до перестановки $q,\ s$ имеем либо а) q — представитель класса Q 3-го типа, а s — класса S 2-го типа, либо б) $q=r,\ \ s=0$, либо в) $q=r+\bar{r},\ \ s=$ $=-\bar{r}$. В случаях а), б) подгруппа $Y^{(k+m)}_R=x_R(J_{f(r,k+m)})$ лежит в $[S^{(k)}$, $S^{(m)}]$. Действительно, в случае б) она совпадает по модулю $Y^{(k+m)}_{2R}$ со взаимным коммутантом подгруппы $Y^{(k)}_R$ с подгруппой диагональных элементов из $S^{(m)}$, поскольку

$$[x_R(a), h(\chi)]=x_R(ac)\,x_{2R}(a\bar{a}(c-\bar{c})/2),\quad c=\chi(r)-1,$$

а в случае а) совпадает по модулю $Y^{(k+m)}_{2R+S}$ со взаимным коммутантом (11), поскольку здесь $2Q+S$ — класс корней типа 2 с представителем $q+\bar{q}+s$ и

$$[x_Q(a),\ x_S(b)]=x_{Q+S}(\pm ab)\,x_{2Q+S}(\pm a\bar{a}b/2).$$

В случае в) ситуация существенно отличается. По лемме 2 соответствующие коммутаторы здесь допускают разложение в произведение

$$[x_{-R}(a), x_{2R}(d)]=x_{-R}(td\bar{a}a^2/2)\,x_{-2R}(t\bar{t}(a\bar{a})^2d/4)\times$$
$$\times h_{-R}(t^{-1})\,x_R(\bar{t}ad)\ x_{2R}(t\bar{t}(a\bar{a})^2d\bar{d}^2/4)$$

($t^{-1}=1-a\bar{a}d/2$), в котором, вообще говоря, не все сомножители удается включить стандартным методом в $[S^{(k)}, S^{(m)}]$.

Рассмотрим подгруппу, которую порождают взаимный коммутант (11) при $Q=R,\ S=-R$, и подгруппы $Y^{(k+m)}_R,\ Y^{(k+m)}_{-R}$. Ее диагональная подгруппа по лемме 2 порождается элементами $h_R(1+v)$ для всевозможных

$$v=\bar{a}a\bar{c}c/4-\bar{a}c=4(\bar{a}c/4)(\bar{a}c/4-1),$$

$$a\in J_{f(r,k)},\quad c\in J_{f(-r,m)}.$$

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть Φ — система корней типа A_{2n}, $n\geqslant 1$, f — функция с условиями* F1 — F4, *причем если $q,\ q+\bar{q}$ — корни, то равенство в условии* F3 *достигается при $r,\ q-r\in\Phi\cup\{0\}$, отличных от $q+\bar{q}$. Пусть K — кольцо с инволюцией σ, $K=2K$ и $J_0, J_1, J_2, \ldots$ — последовательность его σ-инвариантных идеалов с квазирегулярным идеалом J_1 и условием* (9), *причем идеал J_{k+m}, $k+m>0$, относительно присоединенного умножения порождается элементами $ab(\bar{a}b-1)$, $a\in J_k$, $b\in J_m$. Построим, как указано выше, подгруппы $S^{(k)}$ скрученной группы $E(^2\Phi, K)$ и допустим, что для фиксированной пары $k,\ m\geqslant k_0$ корни $q\neq\bar{q}$, для* *которых* $f(q, k) + f(-q, m) = f(0, k + m)$, *аддитивно порождают все корни. Тогда* $[S^{(k)}, S^{(m)}] = S^{(k+m)}$.

Известно (Р. Ри [21], Р. Стейнберг [12, с. 44] и § 11, Р. Картер [14], теоремы 11.3.2, 14.5.1, 14.5.2), что ортогональные группы отождествляются с группами Шевалле типов B_n, D_n, ${}^2D_n$ и поэтому теоремы 1 и 3 решают вопрос 6.34а) из [9] Ю. М. Мерзлякова. Вопрос 6.34б) о перенесении его теоремы на унитарные группы решает в случае четных размерностей теорема 3 (тип ${}^2A_{2n-1}$), а в случае нечетных размерностей (тип ${}^2A_{2n}$) — более громоздкая теорема 4.

При построении централов силовской p-подгруппы группы $GL_n(Z_{p^m})$ Ю. И. Мерзляков [2] использовал также для большей наглядности бесконечномерный ковер идеалов $\mathfrak{A}$; каждый централ определяется ковром, получаемым из $\mathfrak{A}$ определенным сдвигом. Аналогичную конструкцию автор указал и для централов силовской p-подгруппы группы Шевалле нормального типа над кольцом Z_{p^m} [10].

1. *Hall Ph.* A note on SI-groups // J. London Math. Soc.— 1964.— **39**, N 2.— P. 338—344.
2. *Мерзляков Ю. И.* Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика.— 1964.— 3, № 4.— С. 49—53.
3. *Супруненко Д. А.* Ядро одного гомоморфизма // Сиб. мат. журн.— 1965.— **6**, № 1.— С. 199—206.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
5. *Сосновский Ю. В.* Коммутаторное строение симплектических групп // Мат. заметки.— 1978.— **24**, № 5.— С. 641—648.
6. *Сосновский Ю. В.* Об ортогональных конгруэнц-подгруппах по модулю ковра идеалов // XIV Всесоюзн. алгебр. конф.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977.— Ч. 1.— С. 64.
7. *Ролофф Х.* Нижние центральные ряды и ряды коммутантов сетевых подгрупп полной линейной группы // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1982.— **114**.— С. 180—186.
8. *Roloff H.* Zentralreihen der Netzuntergruppen der Symplektischen Gruppe // Math. Nachr. — 1982.— **108**, N 2.— P. 241—251.
9. *Коуровская* тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп) / В. М. Копытов, В. Д. Мазуров, Н. С. Романовский и др. : 11-е изд.— Новосибирск : Ин-т математики СО АН СССР, 1990.— 126 с.
10. *Левчук В. М.* Об одном вопросе Ю. И. Мерзлякова // VIII Всесоюзн. симп. по теории групп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 71—72.
11. *Левчук В. М.* Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых подгрупп групп Шевалле // Докл. АН СССР.— 1990.— **313**, № 4.— С. 799—802.
12. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.— М. : Мир, 1975.— 262 с.
13. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки.— 1982.— **31**, № 4.— С. 509—525.
14. *Carter R.* Simple groups of Lie type.— New York : Wiley and Sons, 1972.— 331 p.
15. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли.— М. : Мир, 1982.— Гл. 4—6.— 334 с.
16. *Abe E., Suzuki K.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tohoku Math. J.— 1976.— **28**, N 2.— P. 185—198.
17. *Вапнэ Ю. Е.* Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых матричных групп // Сиб. мат. журн.— 1971.— **12**, № 3.— С. 497—504.
18. *Янчевский В. И.* Длины производного ряда группы $K(2, Z, 2^m)$ // Докл. АН БССР.— 1968.— **12**, № 12.— С. 1073—1076.
19. *Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б.* Сетевые подгруппы групп Шевалле, II // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1982.— **114**.— С. 62—76.
20. *Abe E.* Coverings of twisted Chevalley groups over commutative groups // Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku.— 1977.— *A*13, N 366—382.— P. 194—218.
21. *Ree R.* On some simple groups defined by C. Chevalley // Trans. Amer. Math. Soc.— 1957.— **84**.— P. 392—400.

Получено 12.02.92