УДК 517. 5

С. Б. Вакарчук (Ин-т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск),
М. Ш. Шабозов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КВАЗИПОПЕРЕЧНИКИ И ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДОВ СМЕШАННОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРАМИ ТИПА ГИЛЬБЕРТА

We consider applications of mixed methods for constructing algorithms, which are optimal in accuracy, for calculating multidimensional singular integrals with Hilbert type kernels. An optimization method for the obtained cubature formulas is proposed and substantiated by using the idea of quasi-widths of functional classes.

Розглянуто питання застосування мішаних методів для побудови оптимальних за точністю алгоритмів обчислення багатомірних сингулярних інтегралів з ядрами типу Гільберта. Запропоновано метод оптимізації кубатурних формул для сингулярних інтегралів з ядрами типу Гільберта, який грунтується на теорії квазіпоперечників.

Интенсивное развитие смешанных (blending) методов приближения функций многих переменных [1 – 4] и введение на этой основе ряда аппроксимационных характеристик функциональных классов — квазипоперечников [4 – 8] — позволило эффективно использовать эти методы при решении ряда задач оптимизационного содержания (см., например, [9]).

В настоящей статье предложен метод оптимизации кубатурных формул для сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта, основанный на теории квазипоперечников.

Отметим, что вопросы приближенного вычисления указанных сингулярных интегралов с помощью конкретных кубатурных формул рассматривались, например, в [10 – 12]. В отличие от одномерного случая решения этих задач еще далеки от своего завершения. Вопросы нахождения оптимальных квадратурных формул для определенного вида сингулярных интегралов рассмотрены в [13].

1. Необходимые понятия и определения. Пусть X_s — некоторое банахово пространство вещественных функций s переменных $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$; $X_s^{(j)}$, $j=\overline{1,s}$, — банахово пространство функций $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_s)$; $U_{m_j}^{(j)} \subset X_1$ ($m_j \in \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) — подпространство размерности m_j с базисом $\left\{ \psi_k^{(j)}(x_j) \right\}_{k=0}^{m_j-1}$, $j=\overline{1,s}$. Полагаем

$$G_s\left(U_{m_1}^{(1)}, \ldots, U_{m_s}^{(s)}\right) = X_{s-1}^{(1)} \oplus U_{m_1}^{(1)} + \ldots + X_{s-1}^{(s)} \oplus U_{m_s}^{(s)},$$

где операции „$\oplus$" и „$+$" есть соответственно декартово произведение и прямая сумма множеств. Элементы множества G_s можно представить в виде обобщенных полиномов порядка $\mathbf{M}_s = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ ранга $s-1$, линейно зависящих от функции $s-1$ переменного [3]

$$g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k_j=1}^{m_j} \varphi_{k_j}^{(j)}(\bar{x}_s - x_j)\psi_{k_j}^{(j)}(x_j), \tag{1}$$

где $\varphi_{k_j}^{(j)} \in X_{s-1}^{(j)}$; $\bar{x}_s - x_j = \{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_s\}$.

Обозначим символом $\tilde{X}_s$ банахово пространство функций $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, 2π-периодических по каждой переменной x_j, $j=\overline{1,s}$.

Пусть $\mathfrak{L}_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} = \left\{ L_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} \right\}$ — множество непрерывных операторов, переводящих $\tilde{X}_s$ в G_s, т.е. $\mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}:\ \tilde{X}_s \to G_s\left(U^{(1)}_{m_1}, \dots, U^{(s)}_{m_s}\right)$.

Рассмотрим многомерный сингулярный интеграл с ядром типа Гильберта

$$I_s f = I_s(f, x) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{\Omega_s} f(\sigma) \prod_{j=1}^{s} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_j - x_j}{2}\, d\sigma,$$

где

$$\Omega_s = \prod_{j=1}^{s} [-\pi, \pi],\ x = (x_1, x_2, \dots, x_s),$$

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s),\quad d\sigma = d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_s.$$

Интеграл $I_s f$ понимается в смысле главного значения по Коши [11, 12], и будем рассматривать его как оператор, действующий в пространстве $\tilde{X}_s$. Аппроксимируем его плотность f различными выражениями вида $\mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s(f)}$. Тогда, принимая за кубатурную формулу для $I_s f = I_s(f, x)$ выражение

$$\mathring{I}_{\mathbf{M}_s} f = \mathring{I}_{\mathbf{M}_s}(f, x) = I_s\left\{ \mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}(f), x \right\}$$

и полагая

$$R_{\mathbf{M}_s}(f) \stackrel{\text{def}}{=} I_s f - \mathring{I}_{\mathbf{M}_s} f,$$

обозначаем

$$V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(U^{(1)}_{m_1}, \dots, U^{(s)}_{m_s}\right);\ \mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}\right)_{\tilde{X}_s} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left\| R_{\mathbf{M}_s}(f) \right\|_{\tilde{X}_s},$$

$$V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(U^{(1)}_{m_1}, \dots, U^{(s)}_{m_s}\right)\right)_{\tilde{X}_s} = \inf_{\mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s} \in \mathfrak{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}} V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(U^{(1)}_{m_1}, \dots, U^{(s)}_{m_s}\right);\ \mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}\right)_{\tilde{X}_s},$$

$$V(\mathfrak{M}; \tilde{X}_s) = \inf_{U^{(j)}_{m_j}\ (j=\overline{1,s})} V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(U^{(1)}_{m_1}, \dots, U^{(s)}_{m_s}\right)\right)_{\tilde{X}_s}.$$

Эти величины, подобно [12], характеризуют качество кубатурной формулы $\mathring{I}_{\mathbf{M}_s} f$ для сингулярного интеграла $I_s f$ на множестве $\mathfrak{M} \subset \tilde{X}_s$. Если $\hat{U}^{(j)}_{m_j} \subset \tilde{X}_1$ — экстремальные или фиксированные подпространства размерности m_j и существует оператор $\hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s} \in \mathfrak{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}$, для которого выполняется одно из условий

$$V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(\hat{U}^{(1)}_{m_1}, \dots, \hat{U}^{(s)}_{m_s}\right);\ \hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}\right)_{\tilde{X}_s} = V_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M})_{\tilde{X}_s},$$

$$V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(\hat{U}^{(1)}_{m_1}, \dots, \hat{U}^{(s)}_{m_s}\right);\ \hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}\right)_{\tilde{X}_s} \sim V_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M})_{\tilde{X}_s},$$

$$V\left(\mathfrak{M};\ G_s\left(\hat{U}^{(1)}_{m_1}, \dots, \hat{U}^{(s)}_{m_s}\right);\ \hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}\right)_{\tilde{X}_s} \asymp V_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M})_{\tilde{X}_s},$$

то кубатурную формулу $I_s(f, x) \approx I_s\left\{ \mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}(f), x \right\}$ будем называть соответственно оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку на классе $\mathfrak{M}$ среди всевозможных кубатурных формул вида $\mathring{I}_{\mathbf{M}_s} f = I_s\left\{ \mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}(f), x \right\}$.

Рассмотрим далее важный в практическом отношении частный случай, когда $\tilde{\mathfrak{L}}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s} = \left\{ \Lambda^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s} \right\}$ — множество линейных непрерывных операторов, переводящих $\tilde{X}_s$ в $G_s \subset \tilde{X}_s$. Пусть $\boldsymbol{\lambda}_j = \left\{ \lambda^{(j)}_k \right\}_{k=1}^{m_j}$, $j = \overline{1, s}$, — произвольные наборы линейных непрерывных функционалов, определенных на $\tilde{X}_1$ и линейно независимых при каждом фиксированном j. При этом каждый функционал $\lambda^{(j)}_k$ действует на $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ как на функцию, зависящую только от одной переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_s$. Под Λ_j понимаем непрерывный линейный оператор, переводящий $\tilde{X}_1$ в конечномерное подпространство

$$U^{(j)}_{m_j} = \operatorname{span} \left\{ \psi^{(j)}_1(\xi), \psi^{(j)}_2(\xi), \ldots, \psi^{(j)}_{m_j}(\xi) \right\}$$

и представимый в виде

$$\Lambda_j(f, \xi) = \sum_{k=1}^{m_j} \lambda^{(j)}_k(f) \psi^{(j)}_k(\xi), \quad \xi \in \tilde{X}_1,\ j = \overline{1, s}.$$

Тогда каждый линейный оператор $\Lambda^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s} \in \tilde{\mathfrak{L}}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}$ выражается формулой [7]

$$\Lambda^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}(f, x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{k_1 k_2 \ldots k_j = 1 \\ (k_1 < k_2 < \ldots < k_j)}}^{s} \mu_{k_1, k_2, \ldots, k_j} \left(J^{s-1} \Lambda_{k_1} \Lambda_{k_2} \ldots \Lambda_{k_j} \right) f(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{k_1 k_2 \ldots k_j = 1 \\ (k_1 < k_2 < \ldots < k_j)}}^{s} \mu_{k_1, k_2, \ldots, k_j} \sum_{t_1=1}^{m_{k_1}} \ldots \sum_{t_j=1}^{m_{k_j}} \lambda^{(\mathbf{k}_j)}_{\mathbf{t}_j}(f) \psi^{(\mathbf{k}_j)}_{\mathbf{t}_j}(x_{\mathbf{k}_j}), \tag{2}$$

где J — единичный оператор, $(A \cdot B)f$ — произведение операторов A и B,

$$J^s = \underbrace{J \ldots J}_{s};\ \mathbf{t}_j = \{t_1, \ldots, t_j\}\ \mathbf{k}_j = \{k_1, \ldots, k_j\},\ \psi^{(\mathbf{k}_j)}_{\mathbf{t}_j} = \prod_{\nu=1}^{j} \psi^{(k_j)}_{t_\nu}(x_{k_\nu}),$$

$$\lambda^{(\mathbf{k}_j)}_{\mathbf{t}_j} = \lambda^{(k_1)}_{t_1}\left(\lambda^{(k_2)}_{t_2} \ldots \left(\lambda^{(k_j)}_{t_j}(f) \right) \ldots \right), \quad k_j = \overline{1, s};\ j = \overline{1, s};\ \mu_{k_1, k_2, \ldots, k_j} \in \mathbb{R}.$$

Используя выражение (1), записываем следующую кубатурную формулу:

$$\mathring{I}_{\mathbf{M}_s}(f, x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{k_1 k_2 \ldots k_j = 1 \\ (k_1 < k_2 < \ldots < k_j)}}^{s} \sum_{t_1=1}^{m_{k_1}} \ldots \sum_{t_j=1}^{m_{k_j}} \prod_{\nu=1}^{j} A^{(k_\nu)}_{t_\nu}(x_{k_\nu}) \lambda^{(\mathbf{k}_j)}_{\mathbf{t}_j}(f), \tag{3}$$

где $A^{(j)}_k(x_j) = I_1\left(\psi^{(j)}_k, x_j \right)$, $k = \overline{1, m_j}$; $j = \overline{1, s}$.

Полагая для остаточного члена формулы (3)

$$\left\| R_{\mathbf{M}_s}(f) \right\|_{\tilde{X}_s} = \mathring{V}\left(f; \left\{ \boldsymbol{\lambda}_j \right\}_{j=1}^{s}; \left\{ \mathbb{A}_j \right\}_{j=1}^{s} \right)_{\tilde{X}_s},$$

где

$$\mathbb{A}_j \overset{\text{def}}{=} \left\{ A^{(j)}_k \right\}_{k=1}^{m_j},$$

представляем ее погрешность на классе $\mathfrak{M}$ в виде

$$\mathring{V}\left(\mathfrak{M};\left\{\boldsymbol{\lambda}_j\right\}_{j=1}^s;\left\{\mathbb{A}_j\right\}_{j=1}^s\right)_{\tilde{X}_s}=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\mathring{V}\left(f;\left\{\boldsymbol{\lambda}_j\right\}_{j=1}^s;\left\{\mathbb{A}_j\right\}_{j=1}^s\right)_{\tilde{X}_s}. \tag{4}$$

Оптимальную оценку погрешности кубатурных формул (3) на функциональном классе $\mathfrak{M}$ определим следующим образом:

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M};\tilde{X}_s)=\inf_{\{\boldsymbol{\lambda}_j,\mathbb{A}_j\}_{j=1}^s}\mathring{V}\left(\mathfrak{M};\left\{\boldsymbol{\lambda}_j\right\}_{j=1}^s;\left\{\mathbb{A}_j\right\}_{j=1}^s\right)_{\tilde{X}_s}. \tag{5}$$

Если существуют множества функционалов $\left\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j\right\}_{j=1}^s$ и непрерывных функций $\left\{\tilde{\mathbb{A}}_j\right\}_{j=1}^s$ таких, что выполняется одно из условий

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M};\tilde{X}_s)=\mathring{V}\left(\mathfrak{M};\left\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j\right\}_{j=1}^s;\left\{\tilde{\mathbb{A}}_j\right\}_{j=1}^s\right)_{\tilde{X}_s},$$

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M};\tilde{X}_s)\sim\mathring{V}\left(\mathfrak{M};\left\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j\right\}_{j=1}^s;\left\{\tilde{\mathbb{A}}_j\right\}_{j=1}^s\right)_{\tilde{X}_s},$$

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M};\tilde{X}_s)\asymp\mathring{V}\left(\mathfrak{M};\left\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j\right\}_{j=1}^s;\left\{\tilde{\mathbb{A}}_j\right\}_{j=1}^s\right)_{\tilde{X}_s},$$

то кубатурную формулу (3), в которой вместо $\mathbb{A}_j$ и $\boldsymbol{\lambda}_j$ использованы $\tilde{\mathbb{A}}_j$ и $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j$, назовем соответственно оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку на классе $\mathfrak{M}$. Если фигурирующие в формуле (2) линейные операторы λ_j, $j=\overline{1,s}$, — проекционные, то $\Lambda_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}$ можно рассматривать как линейный проектор, действующий из $\tilde{X}_s$ в G_s. В этом случае оптимизационные характеристики (4), (5) обозначим символами $\dot{V}(\cdot)_{\tilde{X}_s}$ и $\dot{V}_{\mathbf{M}_s}(\cdot)$. При рассмотрении ряда задач оптимизационного содержания, связанных с методами смешанной аппроксимации многомерных сингулярных интегралов, нам понадобятся следующие определения [7, 8].

Пусть $\mathfrak{N}\subset X_s$ — центрально-симметричное множество. Тогда величины

$$d_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},X_s)=\inf_{U_{m_j}^{(j)}\ (j=\overline{1,s})}\ \sup_{f\in\mathfrak{N}}\ \inf_{g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}\in G_s\left(U_{m_1}^{(1)},\ldots,U_{m_s}^{(s)}\right)}\left\|f-g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}\right\|_{X_s},$$

$$\delta_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},X_s)=\inf_{U_{m_j}^{(j)}\ (j=\overline{1,s})}\ \inf_{\Lambda_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}:\,X_s\to G_s(U_{m_1}^{(1)},\ldots,U_{m_s}^{(s)})}\ \sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\|f-\Lambda_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}\right\|_{X_s},$$

где $\Lambda_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}$ — линейный оператор, переводящий X_s в G_s, называют соответственно колмогоровским и линейным квазипоперечниками множества $\mathfrak{N}$. Ранее величины, аналогичные $d_{\mathbf{M}_s}$, изучались в работах В. Н. Темлякова [6] и М.-Б. А. Бабаева [5].

Проекционным квазипоперечником назовем величину

$$\pi_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},X_s)=\inf_{U_{m_j}^{(j)}\ (j=\overline{1,s})}\ \inf_{\Pi_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}:\,X_s\to G_s(U_{m_1}^{(1)},\ldots,U_{m_s}^{(s)})}\ \sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\|f-\Pi_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}\right\|_{X_s}.$$

Здесь $\Pi_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}$ — непрерывный линейный проектор, переводящий X_s в G_s.

Пусть α — произвольное подмножество множества $\{1,2,\ldots,s\}$, а $|\alpha|$ — количество элементов, принадлежащих α;

$$\Omega_{1,\varepsilon_j} \overset{\text{def}}{=} [-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon_j,\varepsilon_j),\ \varepsilon_j\in(0,\pi),\ j=\overline{1,s};\ \Omega_{s,\varepsilon_\alpha} \overset{\text{def}}{=} \prod_{j\in\alpha}\Omega_{1,\varepsilon_j}.$$

Функцию

$$\left\{\widetilde{f(x)}\right\}_\alpha = \lim_{\varepsilon_\alpha\to 0}\frac{1}{(-2\pi)^{|\alpha|}}\int\limits_{\Omega_{s,\varepsilon_\alpha}} f(x+t_\alpha)\prod_{j\in\alpha}\operatorname{ctg}\frac{t_j}{2}\,dt_\alpha, \tag{6}$$

где

$$x+t_\alpha = \{x_1,\ldots,x_{j_1-1},x_{j_1}+t_{j_1},\ldots,x_{j_2-1},x_{j_2}+t_{j_2},$$

$$x_{j_2+1},\ldots,x_{j_{|\alpha|}-1},\ x_{j_{|\alpha|}}+t_{j_{|\alpha|}},x_{j_{|\alpha|}+1}\ldots,x_s\},\ dt_\alpha = dt_{j_1}\ldots dt_{j_{|\alpha|}},$$

называют сопряженной функцией по совокупности тех переменных, индексы которых составляют множество α [14]. В случае, когда $\alpha=\{1,2,\ldots,s\}$, функцию $\{\tilde f\}_\alpha$ назовем тригонометрически сопряженной к $f(x)$ и обозначим $\tilde f(x)$. Если же $\alpha=\{j\}$, где $1\le j\le s$, то вместо $\{\tilde f\}_\alpha$ будем писать $\{\tilde f\}_{\alpha_{[j]}}$.

2. Квазипоперечники функциональных классов и задачи оптимизации кубатурных формул. Пусть $\overline{\mathfrak{N}}\subset\tilde X_s$ — класс функций, тригонометрически сопряженных к элементам класса $\mathfrak{N}\subset\tilde X_s$, а $\tilde{\mathfrak{N}}\subset\tilde X_s$ — класс функций, тригонометрически сопряженные к которым входят в $\mathfrak{N}$.

Символом $\tilde L_p(\Omega_s)$, $1\le p\le\infty$, обозначим множество таких 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega_s}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty,\ 1\le p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}\{|f(x)|:\ x\in\Omega_s\} < \infty.$$

Под $\tilde C(\Omega_s)$ понимаем множество непрерывных в Ω_s 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$. Справедливо следующее утверждение, которое в определенном смысле можно рассматривать как некий многомерный аналог результатов, приведенных в [12, с. 119–122].

Теорема 1. *Пусть* $\tilde X_s$ *— одно из пространств* $\tilde L_p(\Omega_s)$, $1<p<\infty$, *или* $\tilde C(\Omega_s)$, *класс* $\mathfrak{N}\subset\tilde X_s$ *и соответствующие ему классы* $\overline{\mathfrak{N}}$ *и* $\tilde{\mathfrak{N}}$ *являются компактными, а оператор* I_s *действует в пространстве* $\tilde X_s$. *Тогда справедливы следующие равенства:*

$$V_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},\tilde X_s) = d_{\mathbf{M}_s}(\overline{\mathfrak{N}},\tilde X_s),\quad V_{\mathbf{M}_s}(\tilde{\mathfrak{N}},\tilde X_s) = d_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},\tilde X_s),$$

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},\tilde X_s) = \delta_{\mathbf{M}_s}(\overline{\mathfrak{N}},\tilde X_s),\quad \mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\tilde{\mathfrak{N}},\tilde X_s) = \delta_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},\tilde X_s),$$

$$\dot V_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},\tilde X_s) = \pi_{\mathbf{M}_s}(\overline{\mathfrak{N}},\tilde X_s),\quad \dot V_{\mathbf{M}_s}(\tilde{\mathfrak{N}},\tilde X_s) = \pi_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N},\tilde X_s),\quad \left(\mathbf{M}_s\in\mathbb{Z}_+^s\right),$$

где $\mathbb{Z}_+^s=\{\mathbf{k}_s=(k_1,\ldots,k_s);\ k_j\in\mathbb{N},\ j=\overline{1,s}\}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, проведем доказательство теоремы для случая $V_{\mathbf{M}_s}$, поскольку для $\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}$ и $\dot V_{\mathbf{M}_s}$ ход рассуждений аналогичен. Для произвольного непрерывного оператора $\mathcal{L}^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}$, переводящего $\tilde X_s$ в $G_s\left(U^{(1)}_{m_1},\ldots,U^{(s)}_{m_s}\right)$ и имеющего вид (1), существует непрерывный оператор

$$Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} : \tilde{X}_s \to G_s^* \overset{\text{def}}{=} G_s\left(\overset{*}{U}{}_{m_1}^{(1)}, \ldots, \overset{*}{U}{}_{m_s}^{(s)}\right)$$

такой, что

$$I_s \mathcal{L}_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(f) = Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(I_s f)$$

и

$$Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(f, x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k_j=1}^{m_j} \left\{\widetilde{\varphi_{k_j}^{[j]}(f : \bar{x}_s - x_j)}\right\}_{\alpha^{[j]}} \left\{\widetilde{\psi_{k_j}^{[j]}(x_j)}\right\}_{\alpha_{[j]}}, \tag{7}$$

где

$$\alpha^{[0]} \overset{\text{def}}{=} \{2, 3, \ldots, s\}, \quad \alpha^{[j]} \overset{\text{def}}{=} \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, s\}, \quad j = \overline{2, s-1},$$

$$\alpha^{[s]} = \{1, 2, \ldots, s-1\};$$

$$\overset{*}{U}{}_{m_j}^{(j)} = \operatorname{span}\left\{\left[\widetilde{\psi_1^{[j]}}\right]_{\alpha_{[j]}}, \ldots, \left[\widetilde{\psi_{m_j}^{[j]}}\right]_{\alpha_{[j]}}\right\}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Действительно, в случае $\tilde{X}_s = \tilde{C}(\Omega_s)$ непрерывность оператора $Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}$ следует из тех же соображений, что и непрерывность оператора Q_n из [12, с. 120]. Пусть $\tilde{X}_s = \tilde{L}_p(\Omega_s)$, $1 < p < \infty$. Используя одномерный результат [15] об ограниченности оператора $I_1 f$, действующего в $\tilde{L}_p(\Omega_1)$, $1 < p < \infty$, а именно $\| I_1 \|_p = \nu(p)$, где

$$\nu(p) = \left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2p}, \text{ если } 1 < p \le 2; \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}, \text{ если } 2 < p < \infty\right\},$$

получаем $\|I_s\|_{L_p(\Omega_s)} \le \nu^s(p)$. Из ограниченности оператора I_s в $\tilde{L}_p(\Omega_s)$, $1 < < p < \infty$, следует его непрерывность и, следовательно, непрерывность оператора $Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}$. Нетрудно показать, что G_s^* — выпуклое замкнутое локально-компактное множество. Тогда G_s^* — множество существования элементов наилучшего приближения [16, с. 21].

Пусть для произвольного $f \in \tilde{X}_s$

$$\varepsilon_{\mathbf{M}_s}(f, G_s^*) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{\left\| f - g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} \right\|_{\tilde{X}_s} : g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} \in G_s^*\right\} = \left\| f - \overline{g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}} \right\|_{\tilde{X}_s},$$

где $\overline{g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}}(f)$ — элемент наилучшего приближения f элементами из множества G_s^*. Тогда, учитывая (7), имеем

$$V_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N}, \tilde{X}_s) = \inf_{U_{m_j}^{(j)} \ (j=\overline{1,s})} \ \inf_{\mathcal{L}_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} \in \mathfrak{L}_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}} \ \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| I_s f - I_s \mathcal{L}_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(f) \right\|_{\tilde{X}_s} =$$

$$= \inf_{\overset{*}{U}{}_{m_j}^{(j)} \ (j=\overline{1,s})} \ \inf_{Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)} : \tilde{X}_s \to G_s^*} \ \sup_{f \in \overline{\mathfrak{N}}} \left\| f - Q_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(f) \right\|_{\tilde{X}_s} =$$

$$= \inf_{\overset{*}{U}{}_{m_j}^{(j)} \ (j=\overline{1,s})} \ \sup_{f \in \overline{\mathfrak{N}}} \left\| f - \overline{g_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}} \right\|_{\tilde{X}_s} = d_{\mathbf{M}_s}(\overline{\mathfrak{N}}, \tilde{X}_s).$$

Аналогично получаем

$$V_{\mathbf{M}_s}(\tilde{\mathfrak{N}}, \tilde{X}_s) = \inf_{\mathring{U}^{(j)}_{m_j}\ (j=\overline{1,s})} \ \inf_{Q^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}: \tilde{X}_s \to G^*_s} \ \sup_{f \in \tilde{\mathfrak{N}}} \left\| I_s f - Q^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}(I_s f) \right\|_{\tilde{X}_s} =$$

$$= \inf_{\mathring{U}^{(j)}_{m_j}\ (j=\overline{1,s})} \ \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f - \overline{g^{(s-1)}_{\mathbf{M}_s}} \right\|_{\tilde{X}_s} = d_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{N}, \tilde{X}_s).$$

Теорема 1 доказана.

Полагаем $\mathbf{r}_s = \{r_1, \ldots, r_s\}$, где $r_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,s}$,

$$f^{(\mathbf{r}_s)} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{r_1 + \ldots + r_s} f}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_s^{r_s}}.$$

Введем множество $\mathfrak{N}^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ заданных в s-кубе Ω_s 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, у которых частные производные $f^{(i_1, i_2 \ldots, i_s)}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $i_k = \overline{0, r_k - 1}$, $k = \overline{1,s}$, непрерывны в Ω_s, а производные

$$f^{(r_1, i_2, \ldots, i_s)},\ f^{(i_1, r_2, \ldots, i_s)}, \ldots,\ f^{(i_1, i_2, \ldots, r_s)}, \quad i_k = \overline{0, r_k},\ k = \overline{1,s},$$

всюду в Ω_s существуют, существенно ограничены и кусочно-непрерывны. При этом смешанные производные допускают перемену порядка дифференцирования.

Пусть

$$\Delta_j^{t_j} f(x) = \Delta_j^{t_j} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_s) =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t_j, x_{j+1}, \ldots, x_s) - f(x_1, \ldots, x_s), \quad j = \overline{1,s}.$$

Символом $KH^{\mathbf{v}_s}$, где $\mathbf{v}_s = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_s\}$, $0 < \mathrm{v}_j \le 1$, $j = \overline{1,s}$, $K = \text{const} > 0$, обозначим множество функций $f(x) \in \tilde{C}(\Omega_s)$, которые удовлетворяют условиям

$$\left| \Delta_{i_1}^{t_{i_1}} \Delta_{i_2}^{t_{i_2}} \ldots \Delta_{i_j}^{t_{i_j}} f(x) \right| \le K \prod_{n=1}^{j} |t_{i_n}|^{\mathrm{v}_{i_n}}, \quad j = \overline{1,s},$$

где $\{i_n\}_{n=1}^{j}$, $j = \overline{1,s}$, — множество различных наборов натуральных чисел от 1 до s таких, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_j$.

Под $W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$, $1 \le p < \infty$, $\mathbf{r}_s \in \mathbb{Z}_+^s$ понимаем класс функций $f \in \mathfrak{N}^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$, для которых $\|f^{(\mathbf{r}_s)}\|_p \le 1$, а под $\overset{\vdots}{W}{}_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ — множество 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, тригонометрически сопряженные к которым $\overset{!}{f}(x)$ принадлежиат классу $W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$. При $p = \infty$ полагаем

$$W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s) = \left\{ f \in \tilde{C}(\Omega_s):\ f \in \mathfrak{N}^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s),\ |f^{(\mathbf{r}_s)}_{(x)}| \le 1,\ \forall x \in \Omega_s \right\}, \quad \mathbf{r}_s \in \mathbb{Z}_+^s.$$

Очевидно, что справедливо включение $W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s) \hookrightarrow K_* H^{\mathbf{v}_s}$, где $\mathbf{r}_s \in \mathbb{Z}_+^s$, K_* — некоторая константа, а компоненты вектора $\mathbf{v}_s$ удовлетворяют неравенствам $0 < \mathrm{v}_j < 1$, $j = \overline{1,s}$. Отсюда и из приведенной ниже теоремы 2 для каждой функции $f \in W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ следует, например, существование сингулярного интеграла $I_s f$ и различных кубатурных формул вида (2).

***Следствие* 1.** *При всех* $\mathbf{M}_s \in \mathbb{Z}_+^s$ *справедливы равенства*

$$V_{\mathbf{M}_s}\{W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{C}(\Omega_s)\} = \overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}\{W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{C}(\Omega_s)\} = \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j}[(m_j+1)/2]^{-r_j},$$

$$V_{\mathbf{M}_s}\left\{\widetilde{W^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{C}(\Omega_s)\right\} = \overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}\{W^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{C}(\Omega_s)\} = \prod_{j=1}^{s} \tilde{\mathcal{K}}_{r_j}[(m_j+1)/2]^{-r_j},$$

где $[\cdot]$ *— целая часть числа,*

$$\mathcal{K}_r = 4\pi^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}(2\nu+1)^{-(r+1)},$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_r = 4\pi^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}(2\nu+1)^{-(r+1)}$$

— константы Фавара.

Действительно, используя приведенные в [16] оценки колмогоровского и линейного n-поперечников рассматриваемых функциональных классов, а также теорему 1 и результаты статьи [7] о точном вычислении ряда квазипоперечников, получаем требуемые оценки величин $V_{\mathbf{M}_s}$ и $\overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}$.

Под $K\overset{\circ}{H}{}^{\mathbf{v}_s}$, где $\mathbf{v}_s = \{\nu_1, \ldots, \nu_s\}$, $0 < \nu_j \le 1$, $j = \overline{1, s}$, $K = \text{const} > 0$, понимаем класс непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию

$$\left|\Delta_s^{t_s}\Delta_{s-1}^{t_{s-1}} \ldots \Delta_1^{t_1} f(x)\right| \le K\prod_{j=1}^{s}|t_j|^{\nu_j}, \quad x \in \Omega_s. \tag{8}$$

Очевидно, что $KH^{\mathbf{v}_s} \hookrightarrow K\overset{\circ}{H}{}^{\mathbf{v}_s}$. Нам понадобится утверждение, которое в определенном смысле можно рассматривать как распространение на многомерный случай известной теоремы И. И. Привалова [7, с. 560].

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *— произвольная функция, принадлежащая* $K\overset{\circ}{H}{}^{\mathbf{v}_s}$, *где* $0 < \nu_j < 1$, $j = \overline{1, s}$. *Тогда тригонометрически сопряженная ей функция* $\tilde{f}(x) \in K_1\overset{\circ}{H}{}^{\mathbf{v}_s}$, *где* K_1 *— некоторая положительная константа.*

Доказательство. Обозначив

$$\overline{\Delta}_j^{t_j} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + t_j, x_{j+1}, \ldots, x_s) -$$
$$- f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - t_j, x_{j+1}, \ldots, x_s), \quad j = \overline{1, s},$$

$$\hat{\Omega}_s = \prod_{j=1}^{s}[0, \pi],$$

для произвольной функции $f \in K\overset{\circ}{H}{}^{\mathbf{v}_s}$ запишем

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(-2\pi)^s}\int_{\hat{\Omega}_s}\overline{\Delta}_s^{t_s}\overline{\Delta}_{s-1}^{t_{s-1}} \ldots \overline{\Delta}_1^{t_1} f(x)\prod_{j=1}^{s}\operatorname{ctg}\frac{t_j}{2}\,dt, \quad x \in \Omega_s, \tag{9}$$

где $dt = dt_1 \ldots dt_s$. Поскольку выражение под знаком интеграла при любом $x \in \Omega_s$ имеет порядок $O\left(\prod_{j=1}^{s} t_j^{\nu_j - 1}\right)$, то интеграл в (9) имеет смысл для каждого $x \in \Omega_s$. Учитывая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t_j}{2}\,dt_j = 0$$

и используя (6), имеем

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(-2\pi)^s} \int_{\hat{\Omega}_s} \Delta_s^{t_s}\Delta_{s-1}^{t_{s-1}} \ldots \Delta_1^{t_1} f(x) \prod_{j=1}^{s} \operatorname{ctg}\frac{t_j}{2}\,dt, \quad x \in \Omega_s. \tag{10}$$

Полагая $h = \{h_1, \ldots, h_s\}$, где $h_j > 0$, $j = \overline{1, s}$, с учетом (10) получаем

$$\Delta_s^{h_s}\Delta_{s-1}^{h_{s-1}} \ldots \Delta_1^{h_1} \tilde{f}(x) = \frac{1}{(-\pi)^s} \int_{\Omega_s} \Psi(f; t, h, x)\,dt, \tag{11}$$

где

$$\Psi(f; t, h, x) = 2^{-s} \sum_{j_1, \ldots, j_s = 0}^{1} \Delta_s^{t_s + j_s(h_s - t_s)} \Delta_{s-1}^{t_{s-1} + j_{s-1}(h_{s-1} - t_{s-1})} \ldots \Delta_1^{t_1 + j_1(h_1 - t_1)} f(x) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{s} \left[(1 - j_i)\operatorname{ctg}\frac{t_j}{2} - (-1)^j \operatorname{ctg}\frac{t_i - h_i}{2}\right]. \tag{12}$$

Выделив в Ω_s множество

$$\Omega_{s,h} = \prod_{j=1}^{s} (-2h_j, 2h_j),$$

для $f \in K\overset{\circ}{H}{}^{\nu_s}$ имеем

$$|\Psi(f; t, h, x)| \le K \prod_{j=1}^{s} |t_j|^{\nu_j - 1}.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{\Omega_{s,h}} \Psi(f; t, h, x)\,dt \right| \le C_1 \prod_{j=1}^{s} h_j^{\nu_j},$$

где C_1 — некоторая постоянная. Поскольку [7, с. 562]

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h_j} + \int_{2h_j}^{\pi}\right) t_j^{\nu_j} \left|\operatorname{ctg}\frac{t_j}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_j - h_j}{2}\right| dt_j \le C_2 h_j^{\nu_j},$$
$$\left|\left(\int_{-\pi}^{-2h_j} + \int_{2h_j}^{\pi}\right) \operatorname{ctg}\frac{t_j - h_j}{2}\,dt_j\right| \le C_3, \quad \left|\int_{-2h_j}^{2h_j} \operatorname{ctg}\frac{t_j - h_j}{2}\,dt_j\right| \le C_4, \tag{13}$$

где C_j, $j = 2, 3, 4$, — абсолютные константы, используя (11), (12) и три последних неравенства, запишем

$$\left| \int_{\Omega_s \setminus \Omega_{s,h}} \Psi(f; t, h, x)\,dt \right| \le C_6 \prod_{j=1}^{s} h_j^{\nu_j}, \quad C_6 = \text{const}. \tag{14}$$

Очевидно, что неравенство

$$\left| \Delta_s^{h_s} \Delta_{s-1}^{h_{s-1}} \ldots \Delta_1^{h_1} \tilde{f}(x) \right| \le K_1 \prod_{j=1}^{s} h_j^{\nu_j}$$

следует из (11), (13) – (14), что и завершает доказательство теоремы 2.

Обозначим

$$\mathring{\mathbb{Z}}_+^s = \left\{ \mathbf{k}_s = (k_1, \ldots, k_s) \colon k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ j = \overline{1, s} \right\}$$

и будем подразумевать под $KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}$, где $\mathbf{r}_s \in \mathring{\mathbb{Z}}_+^s$, $K = \text{const} > 0$, множество функций $f(x) \in \tilde{C}(\Omega_s)$, у которых $f^{(\mathbf{r}_s)}(x) \in K \in H^{\boldsymbol{\nu}_s}$.

Теорема 3. *Для любых* $\mathbb{M}_s \in \mathbb{Z}_+^s$, $\mathbf{r}_s \in \mathring{\mathbb{Z}}_+^s$ *справедливы соотношения*

$$V_{\mathbb{M}_s}(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)) \asymp \mathring{V}_{\mathbb{M}_s}(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)) \asymp$$

$$\asymp d_{\mathbb{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \asymp \delta_{\mathbb{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \asymp$$

$$\asymp K \prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j - \nu_j}, \quad 0 < \nu_j < 1,\ j = \overline{1, s}, \tag{15}$$

$$V_{\mathbb{M}_s}\left(\widetilde{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \asymp \mathring{V}_{\mathbb{M}_s}\left(\widetilde{K_1 W^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \asymp K \prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j - \nu_j}. \tag{16}$$

Доказательство. Из теоремы 2 и соотношения (10) следует включение $\overline{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}} \hookrightarrow K_1 W^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\boldsymbol{\nu}_s}$. Используя теорему 1 и учитывая, что $\widetilde{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}} = KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}$, запишем цепочку неравенств

$$V_{\mathbb{M}_s}(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)) \le \mathring{V}_{\mathbb{M}_s}(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)) =$$

$$= \delta_{\mathbb{M}_s}\left(\overline{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \le \delta_{\mathbb{M}_s}\left(K_1 W^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\boldsymbol{\nu}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)\right), \tag{17}$$

$$V_{\mathbb{M}_s}\left(\widetilde{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \le \mathring{V}_{\mathbb{M}_s}\left(\widetilde{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\boldsymbol{\nu}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \le$$

$$\le \delta_{\mathbb{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\boldsymbol{\nu}_s}, \widetilde{C(\Omega_s)}\right). \tag{18}$$

Для получения в (17), (18) оценок сверху величины $\delta_{\mathbb{M}_s}$ нам понадобятся ядра Джексона [18]

$$J_n(t) = 3[2n(2n^2+1)]^{-1}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4, \quad n \in \mathbb{N},$$

и некоторые их свойства:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,dt = 1,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^{\nu} J_n(t)\,dt \le A n^{-\nu}, \quad A = \text{const} > 0,\ 0 < \nu \le 1. \tag{19}$$

Положим для $f(x) \in \tilde{C}(\Omega_1)$

$$\Lambda_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)J_n(\tau)\,d\tau. \qquad (20)$$

Очевидно, что $\Lambda_n(f)$ является тригонометрическим полиномом порядка $2(n-1)$. Пусть $\Lambda_{n_j}^{(j)}$, $j=\overline{1,s}$, — линейные операторы вида (20), действующие на $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)\in\tilde{C}(\Omega_s)$ как на функцию, зависящую только от переменной x_j при фиксированных $x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_s$. Всюду далее положим $\hat{n}_j = [(m_j-1)/4]+1$, $j=\overline{1,s}$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α, и рассмотрим оператор

$$\hat{\Lambda}_{\hat{N}}^{(s-1)}(f,x) = \sum_{j=1}^{s}\ \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_j=1\\(i_1<i_2<\ldots<i_j)}}^{s}(-1)^{j-1}\left(J^{s-j}\Lambda_{\hat{n}_{i_1}}^{(i_1)}\Lambda_{\hat{n}_{i_2}}^{(i_2)}\ldots\Lambda_{\hat{n}_{i_j}}^{(i_j)}\right)f(x), \qquad (21)$$

где $\hat{N}_s=\{\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_s\}$, отображающий $\tilde{C}(\Omega_s)$ в $G_s\left(\hat{U}_{2\hat{n}_1-1}^{(1)},\ldots,\hat{U}_{2\hat{n}_s-1}^{(s)}\right)$. Здесь

$$\hat{U}_{2\hat{n}_j-1}^{(j)} = \operatorname{span}\{1,\cos x_j,\cos 2x_j,\ldots,\cos 2(\hat{n}_j-1)x_j\},\quad j=\overline{1,s}.$$

С учетом (19), (20) и [7] для произвольной функции $f(x)\in K\mathring{H}^{\nu_s}$ $(K=\text{const})$ имеем

$$f(x)-\hat{\Lambda}_{\hat{N}}^{(s-1)}(f,x) = \pi^{-s}\int_{\Omega_s}\Delta_s^{t_s}\Delta_{s-1}^{t_{s-1}}\ldots\Delta_1^{t_1}f(x)\prod_{j=1}^{s}J_{\hat{n}_j}(t_j)\,dt. \qquad (22)$$

Используя соотношения (19), для произвольного $x\in\Omega_s$ из (22) получаем

$$\left|f(x)-\hat{\Lambda}_{\hat{N}_s}^{(s-1)}(f,x)\right| \ll K\prod_{j=1}^{s}m_j^{-\nu}, \qquad (23)$$

В (23) и в следующих ниже формулировках результатов и их доказательствах соотношение $a(M,\mathfrak{M})\ll b(M,\mathfrak{M})$ означает, что существует константа $c>0$, не зависящая от M, но, вообще говоря, зависящая от $\mathfrak{M}$ для которой $a(M,\mathfrak{M})\le cb(M,\mathfrak{M})$.

Пусть

$$\tilde{\lambda}_{j,r} =$$

$$= \begin{cases}\left[1-j^r\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left((2\nu n-j)^{-r}+(2\nu n+j)^{-r}\right)\right], & \text{если } r \text{ — четно;}\\ \left[1-j^r\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left((2\nu n-j)^{-r}-(2\nu n+j)^{-r}\right)\right], & \text{если } r \text{ — нечетно.}\end{cases}$$

Для функции $f(t)\in\tilde{C}(\Omega_1)$ и имеющей непрерывные производные вплоть до r-го порядка включительно запишем линейный оператор [16]

$$\mathcal{L}_n(f,t) = \frac{a_0}{2}+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{j=1}^{n-1}j^{-r}\tilde{\lambda}_{j,r}\cos(j\tau-\pi r/2)\right]f^{(r)}(t-\tau)\,d\tau. \qquad (24)$$

Рассмотрим оператор

$$\overset{s}{\mathcal{L}}{}^{(s-1)}_{\overline{N}_s}(f,x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_j=1 \\ (i_1<i_2<\ldots<i_j)}}^{s} (-1)^{j-1}\left(J^{s-j}\mathcal{L}^{(i_1)}_{\overline{n}_{i_1}}\mathcal{L}^{(i_2)}_{\overline{n}_{i_2}}\ldots\mathcal{L}^{(i_j)}_{\overline{n}_{i_j}}\right)f(x),$$

где $\overline{N}_s = \{\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_s\}$, $\overline{n}_j = [(m_j-1)/2]+1$, $j=\overline{1,s}$, который сконструирован аналогично (21), с использованием операторов (24). На основании [7] и ряда результатов из [16, с. 110 – 112] для произвольной функции $f(x)\in KW^{\mathbf{r}_s}\overset{\circ}{H}{}^{\boldsymbol{\nu}_s}$ запишем

$$f(x) - \hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\hat{N}_s}(f,x) =$$

$$= \pi^{-s}\int\limits_{\Omega_s} f^{(\mathbf{r}_s)}(x-t)\prod_{j=1}^{s}\left[\mathcal{D}_{r_j}(t_j)-T_{\overline{n}_j,r_j}(t_j)\right]dt_j, \tag{25}$$

где $x-t=\{x_1-t_1,\ldots,x_s-t_s\}$; $T_{\overline{n}_j,r_j}(\tau)$ — полином наилучшего приближения в $\tilde{L}(\Omega_1)$ для функции Бернулли

$$\mathcal{D}_{r_j}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-r_j}\cos(\nu\tau-\pi r_j/2).$$

Учитывая (21) и (25), имеем

$$f(x) - \overset{*}{\Lambda}{}^{(s-1)}_{\hat{N}_s}(f,x) =$$

$$= \pi^{-s}\int\limits_{\Omega_s}\left[f^{(\mathbf{r}_s)}(x-t)-\overset{*}{\Lambda}{}^{(s-1)}_{\hat{N}_s}(f,x-t)\right]\prod_{j=1}^{s}\left[\mathcal{D}_{r_j}(t_j)-T_{\overline{n}_j,r_j}(t_j)\right]dt_j, \tag{26}$$

где $\overset{*}{\Lambda}{}^{(s-1)}_{\hat{N}_s}(f)$ — линейный оператор, переводящий множество функций $f(x)\in$ $\in \tilde{C}(\Omega_s)$, имеющих непрерывные смешанные производные $f^{(\mathbf{r}_s)}(x)$, в

$$\tilde{G}_s = G_s\left(\tilde{U}^{(1)}_{2\overline{n}_1-1},\ldots,\tilde{U}^{(s)}_{2\overline{n}_s-1}\right);$$

$$\tilde{U}^{(j)}_{2\overline{n}_j-1} = \operatorname{span}\{1,\cos x_j,\sin x_j,\ldots,\cos(\overline{n}_j-1)x_j,\sin(\overline{n}_j-1)x_j\},\quad j=\overline{1,s}.$$

Оценку

$$\sup_{f\in KW^{\mathbf{r}_s}\overset{\circ}{H}{}^{\boldsymbol{\nu}_s}}\left\| f-\overset{*}{\Lambda}{}^{(s-1)}_{\overline{N}_s}(f)\right\|_{C(\Omega_s)} \ll K\prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j-\nu_j}$$

непосредственно получаем из (26), (23) и [16]. Следовательно,

$$\delta_{\mathbf{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s}\overset{\circ}{H}{}^{\boldsymbol{\nu}_s},\tilde{C}(\Omega_s)\right) \ll K\prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j-\nu_j}. \tag{27}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим класс

$$\widehat{KW^{\mathbf{r}_s}H^{\boldsymbol{\nu}_s}} = \Bigg\{ f(x):\ f(x) = \prod_{j=1}^{s} f_j(x_j),\ f_j\in K^{[j]}W^{r_j}H^{\nu_j}\subset\tilde{C}(\Omega_1),$$

$$0<K^{[j]}=\text{const}\le K,\ j=\overline{1,s};\ \prod_{j=1}^{s}K^{[j]}=K\ \Bigg\}.$$

Здесь $K^{[j]}W^{r_j}H^{\nu_j}$ — класс функций из $\tilde{C}(\Omega_1)$, имеющих непрерывные производные $f_j^{(r_j)}(t)$, для которых справедливо неравенство

$$\left| f_j^{(r_j)}(t+h) - f_j^{(r_j)}(t) \right| \le K^{[j]}|h^{\nu_j}|.$$

Используя [7], соответствующие результаты из [16, 19] о вычислении m-поперечников по Колмогорову d_{m_j} и теорему И. И. Привалова, имеем

$$d_{\mathbf{M}_s}\left(\widehat{KW^{\mathbf{r}_s}H^{\boldsymbol{\nu}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \ge \prod_{j=1}^{s} d_{m_j}\left[K^{[j]}W^{r_j}H^{\nu_j}, \tilde{C}(\Omega_1)\right] \ge K\prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j-\nu_j},$$

$$d_{\mathbf{M}_s}\left(\overline{\widehat{KW^{\mathbf{r}_s}H^{\boldsymbol{\nu}_s}}}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \ge \prod_{j=1}^{s} d_{m_j}\left[K^{[j]}W^{r_j}H^{\nu_j}, \tilde{C}(\Omega_1)\right] \ge K\prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j-\nu_j}.$$

В завершение доказательства теоремы 3 отметим, что требуемые соотношения (15), (16) следуют из теоремы 1, формул (17), (18), (27), включения $\widehat{KW^{\mathbf{r}_s}H^{\boldsymbol{\nu}_s}} \hookrightarrow KW^{\mathbf{r}_s}H^{\boldsymbol{\nu}_s}$ и двух последних неравенств.

Пусть $T_n(f,t)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(t) \in \tilde{L}_p(\Omega_1)$, $1<p<\infty$. Известно [17], что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(f,t)|^p dt \le M_p \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt, \tag{28}$$

где M_p — константа, зависящая только от p. Рассмотрим линейный оператор

$$T_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(f,x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_j=1 \\ (i_1<i_2<\ldots<i_j)}}^{s} (-1)^{j-1}\left(J^{s-j}T_{i_1}T_{i_2}\ldots T_{i_j}\right)f(x),$$

который назовем обобщенным оператором Фурье функции $f(x) \in C(\Omega_s)$. В случае $s=2$ подобные конструкции рассматривались в [9, 20]. Используя (28) и неравенство треугольника, получаем

$$\int_{\Omega_s} \left| T_{\mathbf{M}_s}^{(s-1)}(f,x)\right|^p dx < (1+sM_p)^s \int_{\Omega_s} |f(x)|^p dx, \quad 1<p<\infty, \tag{29}$$

где $dx = dx_1 \ldots dx_s$.

Теорема 4. *Для произвольных* $\mathbf{M}_s \in \mathbb{Z}_+^s$ *и* $1<p<\infty$ *выполняются соотношения*

$$R_{\mathbf{M}_s}\left\{\widehat{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{L}_p(\Omega_s)\right\} \asymp \Pi_{\mathbf{M}_s}\left\{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{L}_p(\Omega_s)\right\} \asymp \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j}[(m_j+1)/2]^{-r_j},$$

$$R_{\mathbf{M}_s}\left\{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{L}_p(\Omega_s)\right\} \asymp \Pi_{\mathbf{M}_s}\left\{\overline{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{L}_p(\Omega_s)\right\} \asymp \prod_{j=1}^{s} \tilde{\mathcal{K}}_{r_j}[(m_j+1)/2]^{-r_j},$$

где в качестве $R_{\mathbf{M}_s}$ *используется любая из величин* $V_{\mathbf{M}_s}$, $\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}$ *и* $\dot{V}_{\mathbf{M}_s}$, *а в качестве* $\Pi_{\mathbf{M}_s}$ — *любой из квазипоперечников* $d_{\mathbf{M}_s}$, $\delta_{\mathbf{M}_s}$ *и* $\pi_{\mathbf{M}_s}$.

Доказательство. В силу [7] и (29) для произвольной функции $f(x) \in W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ имеем

$$\left\| f - T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \right\|_p \ll \left\| f - \overline{g}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \right\|_p, \tag{30}$$

где $\overline{g}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ множеством $\tilde{G}_s$, а элемент $\overline{N}_s$ определен ранее. Используя введенные в теореме 3 оператор $\hat{\mathcal{L}}_{\hat{N}_s}^{(s-1)}(f, x)$, а также [7, 16], для $f(x) \in W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ из (30) получаем

$$\left\| f - T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \right\|_p \ll \left\| f - \hat{\mathcal{L}}_{\hat{N}_s}^{(s-1)}(f, x) \right\|_p \ll \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j} [(m_j + 1)/2]^{-r_j}.$$

Следовательно,

$$\pi_{\mathbf{M}_s} \left\{ W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{L}_p(\Omega_s) \right\} \ll \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j} [(m_j + 1)/2]^{-r_j}. \tag{31}$$

Учитывая неравенства $\pi_{\mathbf{M}_s}(\cdot) \geq \delta_{\mathbf{M}_s}(\cdot) \geq d_{\mathbf{M}_s}(\cdot)$ и ряд результатов из [7, 16, 19], запишем в общем виде оценку снизу для рассматриваемых квазипоперечников:

$$\Pi_{\mathbf{M}_s} \left\{ W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{L}_p(\Omega_s) \right\} \ll \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j} [(m_j + 1)/2]^{-r_j}.$$

Отсюда, из неравенства (31) и теоремы 1 следуют требуемые оценки.

Пусть $f(x) \in W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$. Используя (6) и r_j-кратные интегрирования по частям по каждой из переменных x_j, $j = \overline{1, s}$, в формулах для коэффициентов Фурье функции $f(x)$, получаем

$$\tilde{f}(x) = \pi^{-s} \int_{\Omega_s} f^{(\mathbf{r}_s)}(x - t) \prod_{j=1}^{s} \tilde{B}_{r_j}(t_j)\, dt_j,$$

где

$$x - t = \{x_1 - t_1, \ldots, x_s - t_s\}, \quad \tilde{B}_r(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \sin(k\tau - \pi r/2).$$

Поставим в соответствие функции $f(x)$ линейный оператор

$$\Psi_{N_s}^{(s-1)}(f, x) =$$

$$= \pi^{-s} \int_{\Omega_s} f^{(\mathbf{r}_s)}(x - t) \sum_{j=1}^{s} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_j = 1 \\ (i_1 < i_2 < \ldots < i_j)}}^{s} (-1)^{j-1} \prod_{k=1}^{j} \mathcal{D}_{r_{i_k}, \overline{n}_{i_k}}(t_{i_k})\, dt,$$

где

$$dt = dt_1 \ldots dt_s, \quad \mathcal{D}_{r,n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} k^{-r} \sin(k\tau - \pi r/2).$$

Здесь множители $\lambda_k^{(n)}$ выбраны так, чтобы интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \tilde{B}_r(\tau) - \mathcal{D}_{r,n}(\tau) \right| d\tau$$

принимал наименьшее значение (см., например, [21, с. 329]). Очевидно, что оператор $\Psi_{\overline{N}_s}^{(s-1)} : W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s) \to \tilde{G}_s$. В силу двух последних равенств для произвольной $f(x) \in W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ имеем

$$\tilde{f}(x) - \Psi_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f, x) = \pi^{-s} \int_{\Omega_s} f^{(\mathbf{r}_s)}(x-t) \prod_{j=1}^{s} \left(\tilde{B}_{r_j}(t_j) - \mathcal{D}_{r_j, \overline{n}_j}(t_j)\right) dt. \tag{32}$$

Используя соотношения (30), (32) и оценки наилучших приближений на некоторых сопряженных классах функций [21], будем иметь

$$\| \tilde{f} - T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \|_p \ll \| \tilde{f} - \overline{g}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \|_p \ll$$

$$\ll \| \tilde{f} - \Psi_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \|_p \le \prod_{j=1}^{s} \tilde{\mathcal{K}}_{r_j} [(m_j+1)/2]^{-r_j}. \tag{33}$$

Отсюда следует

$$\Pi_{\mathbf{M}_s} \left\{ \overline{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{L}_p(\Omega_s) \right\} \ll \prod_{j=1}^{s} \tilde{\mathcal{K}}_{r_j} [(m_j+1)/2]^{-r_j}.$$

Проводя, как и в случае $W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$, оценку снизу величины $d_{\mathbf{M}_s} \left\{ \overline{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{L}_p(\Omega_s) \right\}$, с учетом последнего соотношения имеем

$$\Pi_{\mathbf{M}_s} \left\{ \overline{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{L}_p(\Omega_s) \right\} \ll \prod_{j=1}^{s} \tilde{\mathcal{K}}_{r_j} [(m_j+1)/2]^{-r_j}.$$

Учитывая теорему 1, получаем оценки величин $V_{\mathbf{M}_s}$, $\overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}$ и $\dot{V}_{\mathbf{M}_s}$, что и завершает доказательство теоремы 4.

Теорема 5. *В терминах величин* $V_{\mathbf{M}_s}$ *и* $\dot{V}_{\mathbf{M}_s}$ *кубатурная формула* $\overset{*}{\Lambda}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f, x)$ *является оптимальной по порядку на классах* $KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}$ *и* $\widetilde{KW^{\mathbf{r}_s} \overset{\circ}{H}^{\mathbf{v}_s}}$, $\mathbf{r}_s \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}_+^s$, $0 < \nu_j < 1$; $j = \overline{1, s}$, *в метрике пространства* $\tilde{C}(\Omega_s)$, *а кубатурная формула* $T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f, x)$ *оптимальна по порядку в терминах величин* $V_{\mathbf{M}_s}$, $\overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}$ *и* $\dot{V}_{\mathbf{M}_s}$ *на классах* $W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$, $\overset{!}{W}{}_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$, $\mathbf{r}_s \in \mathbb{Z}_+^s$, *в метрике* $\tilde{L}_p(\Omega_s)$, $1 < p < \infty$. *В случае* $\mathfrak{M} = W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$, $\mathfrak{M} = \overset{!}{W}{}_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ *и* $X_s = \tilde{C}(\Omega_s)$ *кубатурная формула* $\hat{L}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f, x)$ *оптимальна по порядку в терминах* $V_{\mathbf{M}_s}$ *и* $\dot{V}_{\mathbf{M}_s}$.

Доказательство. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что используемый в (26) линейный оператор

$$\overset{*}{\Lambda}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f, x) = \hat{\mathcal{L}}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f, x) + \overset{\circ}{\Lambda}_{\hat{N}_s}^{(s-1)}(f, x),$$

где

$$\mathring{\Lambda}_{\hat{N}_s}^{(s-1)}(f, x) \overset{\text{def}}{=} \pi^{-s} \int\limits_{\Omega_s} \hat{\Lambda}_{N_s}^{(s-1)}(f^{(\mathbf{r}_s)}, x-t) \prod_{j=1}^{s} \left[\mathcal{D}_{r_j}(t_j) - T_{\overline{n}_j, r_j}(t_j) \right] dt_j,$$

имеет следующее свойство:

$$I_s \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) = \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f).$$

Это существенно облегчает задачу исследования кубатурной формулы $I_s \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f)$, поскольку сводит вопрос оценки ее погрешности к соответствующему вопросу аппроксимации тригонометрически сопряженной функции $\widetilde{f(x)}$ оператором $\overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(\tilde{f})$. Пусть $\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}(\mathfrak{M}, \Lambda, \tilde{X}_s) = \sup\left\{ \|I_s(f - \Lambda f; x)\|_{X_s} : f \in \mathfrak{M} \right\}$. Тогда

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}, \widetilde{C(\Omega_s)} \right) \le \mathring{V}_{\mathbf{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}, \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}, \tilde{C}(\Omega_s) \right) \le$$

$$\le \sup\left\{ \left\| \varphi - \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(\varphi) \right\|_{\tilde{C}(\Omega_s)} : \varphi \in \overline{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}} \right\}.$$

Используя вытекающее из теоремы 2 включение $\overline{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}} \hookrightarrow K_1 W^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\mathbf{v}_s}$ $(K_1 = \text{const} > 0)$ и (26), продолжаем последнее неравенство

$$\le \sup\left\{ \left\| \varphi - \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(\varphi) \right\|_{\tilde{C}(\Omega_s)} : \varphi \in K_1 W^{\mathbf{r}_s} \mathring{H}^{\mathbf{v}_s} \right\} \ll K \prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j - \nu_j}.$$

На основе аналогичных соображений имеем

$$\mathring{V}_{\mathbf{M}_s}\left(\widetilde{KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}}, \tilde{C}(\Omega_s) \right) \le \mathring{V}_{\mathbf{M}_s}\left(KW^{\mathbf{r}_s} H^{\mathbf{v}_s}, \overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}, \tilde{C}(\Omega_s) \right) \ll K \prod_{j=1}^{s} m_j^{-r_j - \nu_j}.$$

Из теоремы 3 и полученных здесь неравенств следует утверждение теоремы 5 относительно кубатурной формулы $\overset{*}{\Lambda}{}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f, x)$. Учитывая, что $I_s T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) = T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f)$, и используя приведенные в конце теоремы 4 рассуждения, для случая $1 < p < \infty$ получаем

$$\dot{V}_{\mathbf{M}_s}\left(\widetilde{W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)}, \tilde{L}_p(\Omega_s) \right) \le$$

$$\le \sup\left\{ \left\| f - T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f) \right\|_p : f \in W_p^{\mathbf{r}_s} \right\} \le \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j} [(m_j + 1)/2]^{-r_j},$$

$$\dot{V}_{\mathbf{M}_s}\left(W_p^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s), \tilde{L}_p(\Omega_s) \right) \le$$

$$\le \sup\left\{ \left\| \tilde{f} - T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(\tilde{f}) \right\|_p : \tilde{f} \in W_p^{\mathbf{r}_s} \right\} \le \prod_{j=1}^{s} \tilde{\mathcal{K}}_{r_j} [(m_j + 1)/2]^{-r_j}.$$

Из теоремы 4 и последних неравенств следует оптимальность кубатурной формулы $T_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(I_s f, x)$ в указанном в теореме 5 смысле. В случае $X_s = \tilde{C}(\Omega_s)$ и $\mathfrak{M} = W_\infty^{\mathbf{r}_s}(\Omega_s)$ рассмотрим введенный в теореме 3 оператор $\hat{\mathcal{L}}_{\overline{N}_s}^{(s-1)}(f, x)$, для которого в силу [7, 16] имеем

$$\overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}\left(\widetilde{W^{\mathbf{r}_s}_{\infty}(\Omega_s)}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \le$$

$$\le \overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}\left(\widetilde{W^{\mathbf{r}_s}_{\infty}(\Omega_s)}, \hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\overline{N}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \ll \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j}[(m_j+1)/2]^{-r_j}.$$

Используя введенный при доказательстве теоремы 4 оператор $\Psi^{(s-1)}_{\overline{N}_s}$ и цепочку неравенств (33), получаем

$$\overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}\left(W^{\mathbf{r}_s}_{\infty}(\Omega_s), \tilde{C}(\Omega_s)\right) \le$$

$$\le \overset{\circ}{V}_{\mathbf{M}_s}\left(W^{\mathbf{r}_s}_{\infty}(\Omega_s), \hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\overline{N}_s}, \tilde{C}(\Omega_s)\right) \ll \prod_{j=1}^{s} \mathcal{K}_{r_j}[(m_j+1)/2]^{-r_j}.$$

Оптимальность по порядку кубатурной формулы $\hat{\mathcal{L}}^{(s-1)}_{\overline{N}_s}(I_s f, x)$ на рассматриваемых классах вытекает из следствия 1 и двух последних цепочек неравенств. Теорема 5 доказана.

Для большей наглядности проиллюстрируем один из полученных результатов. Пусть, например, $s=2$ и $T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2}(f; x_1, x_2)$ — частная сумма обобщенного ряда Фурье функции $f(x_1, x_2)$ [20], т.е.

$$T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2}(f; x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\overline{n}_2}\sum_{\mu=0}^{1} \varphi_{j,\mu}(x_1)\cos(jx_2 - \mu\pi/2) + \sum_{i=0}^{\overline{n}_1}\sum_{\nu=0}^{1} \psi_{i,\nu}(x_2)\cos(ix_1 - \nu\pi/2) -$$

$$- \sum_{i=0}^{\overline{n}_1}\sum_{j=0}^{\overline{n}_2}\sum_{\mu,\nu=0}^{1} d^{\mu,\nu}_{i,j}\cos(ix_1 - \nu\pi/2)\cos(jx_2 - \mu\pi/2),$$

где

$$\varphi_{j,\mu}(f, x_1) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)\gamma_j \cos(jx_2 - \mu\pi/2)\,dx_2,$$

$$\psi_{j,\nu}(f, x_2) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)\gamma_i \cos(ix_1 - \nu\pi/2)\,dx_1,$$

$$d^{\mu,\nu}_{i,j}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)\beta_{ij}\cos(ix_1 - \nu\pi/2)\cos(jx_2 - \mu\pi/2)\,dx_1 dx_2,$$

$\beta_{00} = 1/4$; $\gamma_0 = \beta_{0j} = \beta_{i0} = 1/2$; остальные γ_j, β_{ij} равны 1. При этом

$$I_2\left(T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2}(f); \sigma_1, \sigma_2\right) = T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2}(I_2 f; \sigma_1, \sigma_2).$$

Из теоремы 5 следует, что кубатурная формула $I_2\left(T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2}(f); \sigma_1, \sigma_2\right)$, полученная путем аппроксимации плотности f функцией $T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2}(f)$, является оптимальной по порядку на классах $W^{\mathbf{r}_2}_p(\Omega_2)$, $\widetilde{W^{\mathbf{r}_2}_p(\Omega_2)}$ $(\mathbf{r}_2 \in \mathbb{Z}^2_+)$ в метрике $\tilde{L}_p(\Omega_s)$, $1 < p < \infty$, среди всевозможных кубатурных формул вида (3).

1. *Gordon W. J.* Spline-blending surface interpolation through curve networks // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**. – P. 931–951.
2. *Шабозов М. Ш.* Приближение непрерывных и дифференцируемых периодических функций двух переменных интерполяционными смешанными сплайнами // Вопросы теории аппроксимации функций. – Киев, 1980. – С. 166–172.
3. *Вайндинер А. Н.* Приближение непрерывных и дифференцируемых функций многих переменных обобщенными полиномами (конечной линейной суперпозицией функций меньшего числа переменных) // Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 3. – С. 483–486.
4. *Корнейчук Н. П., Переверзев С. В.* К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов // Теория функций и топология. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1983. – С. 43–49.
5. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 30–32.
6. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной// Там же. – 1986. – **178**. – С. 3–112.
7. *Вакарчук С. Б.* О приближении дифференцируемых функций многих переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, вып. 3. – С. 37–44.
8. *Вакарчук С. Б.* Квазипоперечники функциональных классов в некоторых банаховых пространствах аналитических функций многих комплексных переменных // Докл. АН Украины, Сер. А. – 1992. – № 3. – С. 26–31.
9. *Вакарчук С. Б.* О восстановлении линейных функционалов на классах дифференцируемых функций двух переменных по некоторой обобщенной информации // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 11–17.
10. *Габдулхаев Б. Г.* Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов I // Изв. на матем. инст. при Бълг. АН. – 1970. – **11**. – С. 181–196.
11. *Габдулхаев Б. Г.* Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов II // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 4. – С. 3–13.
12. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации линейных задач. – Казань: Казан. ун-т, 1980. – 232 с.
13. *Шабозов М. Ш.* Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1300–1304.
14. *Гоголадзе Л. Д.* О существовании сопряженных функций многих переменных // Мат. сб. – 1984. – **225**, № 3. – С. 481–488.
15. *Крупник Н. Я.* Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 140 с.
16. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
17. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
18. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
19. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
20. *Вайндинер А. И.* К оценке остатка обобщенного ряда Фурье дифференцируемых функций двух переменных // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**, № 3. – С. 511–513.
21. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 01.03.95