УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. ун-т)

АППРОКСИМАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО МЕРЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ФУНКЦИЯМИ*

For spaces defined by the function φ of the type of modulus of continuity, we prove direct and converse Jackson theorems for the approximation by piecewise constant functions over uniform partition.

Для просторів, визначених функцією φ типу модуля неперервності, доведені прямі та обернені теореми Джексона для апроксимації кусково-сталими функціями за рівномірним розбиттям.

Известно, что множество всех 2π-периодических действительных измеримых по Лебегу функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(|f(x)-g(x)|)\,dx, \tag{1}$$

где $\varphi(y)=y(1+y)^{-1}$, $y\in R^+$, образует линейное метрическое пространство $L_0[0,2\pi]$ с топологией сходимости по мере.

Если в (1) в качестве функции $\varphi(y)$, $y\in R^+$, взять любую функцию типа модуля непрерывности (т. е. неубывающую полуаддитивную непрерывную и $\varphi(0)=0$), то функционал (1) удовлетворяет аксиомам метрики. Обозначим полученное метрическое пространство через

$$L_\varphi[0,2\pi] \equiv L_\varphi \colon L_\varphi = \left\{ f\in L_0[0,2\pi];\quad \|f\|_\varphi := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(|f(x)|)\,dx<\infty \right\}.$$

Отметим, что в случае $\varphi(y)=|y|^p$, $p\in(0,1]$, получаем метрические пространства $L_p[0,2\pi]$.

Рассмотрим аппроксимацию в пространствах L_φ (в частности, в пространстве L_0) кусочно-постоянными функциями с равномерным разбиением периода.

Пусть

$$\omega(f,h)_\varphi = \sup\{\|\Delta_t f\|_\varphi \colon |t|\le h\}$$

— модуль непрерывности f в пространстве L_φ, где $\Delta_t f(x)=f_t(x)-f(x)$, $f_t(x)=f(t+x)$, $\mathcal{L}_n$ — линейное пространство 2π-периодических кусочно-постоянных функций l_n, соответствующих равномерному разбиению периода $[0,2\pi]$ точками $x_k=k2\pi n^{-1}$, $k=0,1,\ldots,n$;

$$E_n(f)_\varphi = \inf\{\|f-l_n\|_\varphi \colon l_n\in\mathcal{L}_n\}$$

— наилучшее приближение на периоде в метрике L_φ функции f элементами подпространства $\mathcal{L}_n$.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\sup_{f\in L_\varphi}\frac{\inf_t E_n(f_t)_\varphi}{\omega(f,2\pi/n)_\varphi} = 1, \tag{2}$$

---

*Работа частично финансирована Фондом фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

$$\sup_{f \in L_\varphi} \frac{\inf\limits_{l_n \in \mathcal{L}_n} (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \| f_t - l_n \|_\varphi \, dt}{(n/2\pi) \int_0^{2\pi/n} \| \Delta_u f \|_\varphi \, du} = 1. \tag{3}$$

Доказательство. Для любой функции $l_n \in \mathcal{L}_n$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \| f_t - l_n \|_\varphi \, dt \ \geq \ \inf_t \| f_t - l_n \|_\varphi \ \geq \ \inf_t E_n(f_t)_\varphi,$$

поэтому

$$\sup_{f \in L_\varphi} \frac{\inf\limits_t E_n(f_t)_\varphi}{\omega(f, 2\pi/n)_\varphi} \ \leq \ \sup_{f \in L_\varphi} \frac{\inf\limits_{l_n \in \mathcal{L}_n} (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \| f_t - l_n \|_\varphi \, dt}{(n/2\pi) \int_0^{2\pi/n} \| \Delta_u f \|_\varphi \, du}. \tag{4}$$

Будем оценивать правую часть (4) сверху, а левую — снизу.

Заметим, что множество непрерывных функций всюду плотно в L_φ. Действительно, произвольную функцию f из L_φ можно приблизить как угодно близко ограниченной измеримой; для этого можно использовать срезки Лебега $f_N(x) := f(x)$ при $|f(x)| \leq N$ и $f_N(x) := 0$ при $|f(x)| > N$. Тогда $\mu\{x: |f(x)| > N\} \to 0$ при $N \to \infty$, и поэтому из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует

$$\| f - f_N \|_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\{x: |f(x)| > N\}} \varphi(|f(x)|) \, dx \to 0 \quad (N \to \infty).$$

В свою очередь, ограниченную функцию f_N можно аппроксимировать непрерывной функцией ψ в метрике L_1 и использовать свойство модулей непрерывности $\varphi(ax) \leq (a+1)\varphi(x)$:

$$\| f - \psi \|_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi\left(\| f_N - \psi \|_1 \frac{|f_N(x) - \psi(x)|}{\| f_N - \psi \|_1} \right) dx \ \leq$$

$$\leq \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{|f_N(x) - \psi(x)|}{\| f_N - \psi \|_1} + 1 \right) \varphi(\| f_N - \psi \|_1) \, dx \ = \ 2\varphi(\| f_N - \psi \|_1).$$

Для оценки правой части (4) сверху учтем, что при вычислении верхней грани достаточно ограничиться плотным множеством непрерывных функций. Для таких функций f в качестве аппроксимирующей функции l_n выберем функцию $l_n(f)$, которая на каждом отрезке разбиения $[x_k, x_{k+1})$ интерполирует $f(x)$ в левом конце отрезке, т. е. $l_n(f, x) := f(x_k)$ при $x \in [x_k, x_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$. Используя инвариантность метрики относительно сдвига аргументов, имеем

$$\inf_{l_n \in \mathcal{L}_n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \| f_t - l_n \|_\varphi \, dt \ \leq \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \| f_t - l_n(f_t) \|_\varphi \, dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(|f(t+x) - f(t+x_k)|) \, dx \, dt \ =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(|f(t+x-x_k)-f(t)|)\,dt\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(|f(t+x)-f(t)|)\,dt\,dx = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} \|\Delta_x f\|_\varphi\,dx,$$

и необходимая оценка сверху получена.

Для оценки левой части (4) снизу используем функции В. А. Юдина [1] f_q. Для простого числа q разобьем период $[0, 2\pi]$ равноотстоящими точками $y_j = j(2\pi/(q-1))$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, и положим $f_q(x) := 2^{-1}(j/q)$ для $x \in [y_{j-1}, y_j)$, где (j/q) — символ Лежандра [2, с. 69]. Известно [1], что

$$E_1(f_q)_\varphi = \inf_c \|f_q - c\|_\varphi = \left\|f_q \pm \frac{1}{2}\right\|_\varphi = \frac{1}{2}\varphi(1),$$

$$\omega(f_q, \pi)_\varphi = \frac{1}{2}\varphi(1)\left(1 - \frac{1}{1-q}\right).$$

Отсюда, в частности, следует

$$\omega\left(f_q(n), \frac{2\pi}{n}\right)_\varphi = \frac{1}{2}\varphi(1)\left(1 - \frac{1}{1-q}\right).$$

Рассмотрим произвольную l_n из $\mathcal{L}_n$, и пусть для $x \in [x_k, x_{k+1})$ $l_n(x) = b_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда для функции $f_{q,t}(nx)$ при произвольном t имеем оценку приближения снизу

$$\|f_{q,t}(nx) - l_n(x)\|_\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(|f_{q,t}(nx) - b_k|)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi n} \int_{k2\pi}^{(k+1)2\pi} \varphi(|f_{q,t}(x) - b_k|)\,dx \ge \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_1(f_{q,t})_\varphi = \frac{\varphi(1)}{2}.$$

Отсюда

$$E_n(f_{q,t}(n\,\cdot))_q = \left\|f_{q,t}(n\,\cdot) \pm \frac{1}{2}\right\|_\varphi = \frac{\varphi(1)}{2},$$

$$\frac{\inf_t E_n(f_{q,t}(n\,\cdot))_\varphi}{\omega(f_q(n\,\cdot), 2\pi/n)_\varphi} = \frac{\varphi(1)/2}{\varphi(1)(1 - 1/(q-1))/2} \xrightarrow[q \to \infty]{} 1.$$

Теорема доказана.

Аппроксимация в смысле „φ-расстояния" полиномами по системам Хаара и Уолша изучена в [3]. Полиномы по этим системам являются кусочно-постоянными функциями, соответствующими разбиению отрезка $[0, 2\pi]$ на 2^n равных частей, $n = 1, 2, \ldots$. В частности, в [3] (см. теоремы 4.1 и 4.2) доказано, что

$$E_n(f; \chi)_\varphi \le 8\frac{2^k}{2\pi} \int_0^{2\pi/2^k} \omega(f, h)_\varphi\,dh, \quad 2^k \le n \le 2^{k+1},$$

$$\omega\left(f, \frac{2\pi}{n}\right)_{\varphi} \le \frac{16}{n} \sum_{k=1}^{n} E_k(f; \chi)_{\varphi}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $E_n(f: \chi)_{\varphi}$ — наилучшее приближение $f \in L_{\varphi}$ полиномами степени n по системе Хаара. В качестве следствия отсюда вытекает, например, конструктивная характеристика классов Липшица:

$$(f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, L_{\varphi}),\ 0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow (E_n(f; \chi)_{\varphi} \le c n^{-\alpha},\ n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\mathrm{Lip}\,(\alpha, L_{\varphi}) = \{ f \in L_0;\ \exists K,\ \omega(f, h)_{\varphi} \le K h^{\alpha},\ h \in (0, \pi) \}.$$

Докажем аналог обратной теоремы Джексона (5) для усредненных приближений

$$\tilde{E}_n(f)_{\varphi} = \inf_{l_n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f_t - l_n \|_{\varphi}\, dt,$$

из которого будет следовать, что в терминах таких приближений также можно получить конструктивную характеристику классов Липшица.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in L_{\varphi}$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства*

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{2^{n-1}}\right)_{\varphi} \le \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=1}^{n} 2^k \tilde{E}_{2^k}(f)_{\varphi}. \tag{6}$$

Используем стандартный метод доказательства таких неравенств [4, 5], основанный на неравенствах типа С. Н. Бернштейна для аппроксимирующих функций.

Лемма. *Для любой функции l_n из L_n при $|h| \in (0, 2\pi/n]$ выполняется неравенство*

$$\| \Delta_h l_n \|_{\varphi} \le \frac{n|h|}{\pi} \| l_n \|_{\varphi}.$$

Действительно, пусть $l_n(x) = b_k$ при $x \in [x_k, x_{k+1})$, тогда

$$\| l_n \|_{\varphi} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(|b_k|)\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(|b_k|).$$

Допустим, для определенности, что $h > 0$. Учитывая, что $h \le 2\pi/n$, имеем

$$\| \Delta_h l_n \|_{\varphi} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{x_{k+1}-h}^{x_{k+1}} \varphi(|b_{k+1} - b_k|)\, dx =$$

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(|b_{k+1} - b_k|) \le \frac{nh}{\pi} \| l_n \|_{\varphi}.$$

Заметим, что если b_k поочередно принимают значения 0 и 1, то в случае четного n для функции l_n

$$\frac{\|\Delta_h l_n\|_\varphi}{\|l_n\|_\varphi} = \frac{(n/2\pi)|h|\varphi(1)}{\varphi(1)/2} = \frac{n|h|}{\pi}.$$

Доказательство *теоремы* 2. Зафиксируем n. Разность $l_{2^k} - l_{2^{k-1}}$ является функцией из L_{2^k}, поэтому из леммы следует, что для $k \le n$

$$\omega\left(l_{2^k} - l_{2^{k-1}}, \frac{2\pi}{2^n}\right)_\varphi \le \frac{2^k}{\pi}\frac{2\pi}{2^n}\|l_{2^k} - l_{2^{k-1}}\|_\varphi.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ и заданной f выберем l_{2^k}, $k = 1, \ldots, n$, удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f_t - l_{2^k}\|_\varphi dt < \tilde{E}_{2^k}(f)_\varphi + \varepsilon.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\omega\left(f, \frac{2\pi}{2^n}\right)_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega\left(f_t, \frac{2\pi}{2^n}\right)_\varphi dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega\left(f_t - l_{2^n}, \frac{2\pi}{2^n}\right)_\varphi dt +$$

$$+ \omega\left(l_1 + \sum_{k=1}^n \left(l_{2^k} - l_{2^{k-1}}\right), \frac{2\pi}{n}\right)_\varphi \le 2\left(\tilde{E}_{2^n}(f)_\varphi + \varepsilon\right) + \sum_{k=1}^n \left(\omega\left(l_{2^k} - l_{2^{k-1}}\right), \frac{2\pi}{n}\right)_\varphi \le$$

$$\le 2\tilde{E}_{2^n}(f)_\varphi + 2\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\pi}\frac{2\pi}{2^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\left(l_{2^k} - f_t\right) + \left(f_t - l_{2^{k-1}}\right)\right\|_\varphi dt \le$$

$$\le 2\varepsilon + 2\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\pi}\frac{2\pi}{2^n} 2\left(\tilde{E}_{2^k}(f)_\varphi + \varepsilon\right) \le 4\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^n 2^k\tilde{E}_{2^k}(f)_\varphi + 8\varepsilon,$$

и ввиду произвольности ε отсюда следует (6).

Следствие. *Для любой f из L_φ имеет место эквивалентность*

$$(f \in \mathrm{Lip}(\alpha, L_\varphi),\ 0 < \alpha < 1) \Leftrightarrow (\tilde{E}_{2^k}(f)_\varphi \le c2^{-k\alpha},\ k = 1, 2, \ldots).$$

1. *Пичугов С. А.* Приближение константой периодических функций в метрических пространствах $\varphi(L)$ // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1095–1098.
2. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
3. *Стороженко Е. А., Кротов В. Г., Освальд Р.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98** (140), № 3. – С. 395–415.
4. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**. – С. 219–242.
5. *Тиман А. Ф., Тиман М. Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. – 1950. – **71**, № 1. – С. 17–20.

Получено 16.03.95