УДК 517. 547.2

М. Т. Бордуляк, М. Н. Шеремета (Львов. ун-т)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО l-ИНДЕКСА И l-РЕГУЛЯРНОГО РОСТА*

It is proved that under certain conditions on a positive function l continuous on $[0,+\infty]$, there exists an entire transcendental function f of bounded l-index such that $\ln\ln M_f(r) \sim \ln L(r)$, $r\to\infty$, where $M_f(r) = \max\{|f(z)|:\ |z|=r\}$ and $L(r) = \int_0^r l(t)\,dt$. If $l(r) = r^{p-1}$ for $r\ge 1$, $0<\rho<\infty$, then there exists an entire function f of bounded l-index such that $M_f(r) \asymp r^p$.

Доведено, що при певних умовах на додатну неперервну на $[0,+\infty]$ функцію l існує ціла трансцендентна функція f обмеженого l-індексу така, що $\ln\ln M_f(r)\sim \ln L(r)$, $r\to\infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)|:\ |z|=r\}$ і $L(r) = \int_0^r l(t)\,dt$. Якщо $l(r) = r^{p-1}$ при $r\ge 1$, $0<\rho<\infty$, то існує ціла функція f обмеженого l-індексу така, що $M_f(r)\asymp r^p$.

1. Введение. Пусть Λ — класс положительных непрерывных на $[0,+\infty)$ функций, а $l\in\Lambda$. Целая функция f называется [1] функцией ограниченного l-индекса, если существует число $\nu\in\mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!\,l^j(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\,l^k(|z|)}:\ 0\le k\le\nu\right\} \tag{1}$$

для всех $\nu\in\mathbb{C}$ и $j\in\mathbb{Z}_+$. При $l(|z|)\equiv 1$ отсюда получаем определение целой функции ограниченного индекса. Исследованию свойств целых функций ограниченного индекса и их приложениям посвящены работы многих математиков (библиографию см. в [2]). Аналоги основных теорем из [2] для целых функций ограниченного l-индекса получены в [3–5]. Наличие в определении (1) функции l, естественно, приводит к новым задачам, в частности, к задаче о существовании для заданной функции $l\in\Lambda$ целой функции ограниченного l-индекса с тем или иным условием на рост.

Легко видеть, что каждый многочлен является функцией ограниченного l-индекса для любой функции $l\in\Lambda$. Для целых трансцендентных функций такое утверждение не верно. Ясно, во-первых, что если целая функция f имеет нули с возрастающей к $+\infty$ кратностью, то для любой функции $l\in\Lambda$ функция f является функцией неограниченного l-индекса. Во-вторых, если

$$\lim_{\delta\to 0+}\ \liminf_{r\to\infty}\left\{\frac{l(t)}{l(r)}:\ \frac{r}{1+\delta}\le t\le r\right\} = 1, \tag{2}$$

то, для того чтобы существовала целая трансцендентная функция ограниченного l-индекса, необходимо, чтобы $rl(r)\to\infty$, $r\to\infty$ [1]. Это условие оказалось достаточным. Фактически [6], для любой функции $l\in\Lambda$ такой, что $rl(r)\to\infty$, $r\to\infty$, существует целая функция ограниченного l-индекса. Эта функция строилась следующим образом. Сначала для функции $l\in\Lambda$ такой, что $rl(r)\to\infty$, $r\to\infty$, выбиралась убывающая к 0 функция $l_1\in\Lambda$ такая, чтобы $l_1(4r)\ge c\,l_1(r)$, $0<c<1$, для всех $r\ge 0$ и функция $\omega(r) = r l_1(r)$ была

* Работа частично поддержана Международным научным фондом, Грант UKR000, и Международной соросовской программой.

медленно возрастающей. Для этой функции l_1 строилась функция ограниченного l_1-индекса и потом использовалось следующее, вытекающее непосредственно из определения (1), утверждение: если $l \in \Lambda$, $l_1 \in \Lambda$, $l_1(r) \le l_1(r)$, $r \ge 0$, и f — целая функция ограниченного l_1-индекса, то f — функция ограниченного l-индекса. Но, как показано в [1], если выполнено условие (2) и f — целая функция ограниченного l-индекса, то

$$\ln M_f(r) = O(L(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3}$$

где

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\},$$

$$L(r) = \int\limits_0^r l(t)\,dt.$$

Поэтому для построенной в [6] функции f выполняется соотношение $\ln M_f(r) = O(\omega(r)\ln r)$, $r \to \infty$, т. е. ее рост может очень сильно отличаться от роста функции $L(r)$.

Для $l \in \Lambda$ целую функцию назовем функцией l-регулярного роста, если

$$\ln\ln M_f(r) = (1 + o(1))\ln L(r), \quad r \to +\infty. \tag{4}$$

Если $l = l_\rho$, где $l_\rho(r) = r^{\rho-1}$ при $r \ge 1$, $0 < \rho < \infty$, то (4) равносильно соотношению

$$\ln\ln M_f(r) = (1 + o(1))\rho\ln r, \quad r \to +\infty,$$

т. е. получаем классическое определение регулярности роста.

Заметим, что соотношение (3) также выполняется для целой функции f ограниченного l-индекса, если функция $l \in \Lambda$ монотонная [1], или [7] удовлетворяет условию

$$l\left(r + O\left(\frac{1}{l(r)}\right)\right) = O(l(r)), \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Целые функции ограниченного l-индекса и заданного роста будем строить в виде канонических произведений. Такая методика требует наложения, помимо условия $rl(r) \to \infty$, других дополнительных условий на функцию l.

Через Λ_0 обозначим класс убывающих к нулю функций $l \in \Lambda$ таких, что функция $\omega(r) = rl(r)$ возрастает к $+\infty$ и вогнута на $[0, +\infty)$. Отметим, что для любой функции $l \in \Lambda_0$ выполняется (5), ибо (при некоторой постоянной $M > 0$)

$$l\left(r + O\left(\frac{1}{l(r)}\right)\right) \le l\left(r - \frac{M}{l(r)}\right) = \frac{(r - M/l(r))\,l(r - M/l(r))}{r - M/l(r)} \le$$

$$\le \frac{rl(r)}{r - M/l(r)} = \frac{rl(r)}{1 - M/\omega(r)} = (1 + o(1))\,l(r), \quad r \to +\infty.$$

Не умаляя общности, можем считать функцию l непрерывно дифференцируемой на $[0, +\infty)$, так как, если выполнено (5) и f — целая функция ограниченного l-индекса, то f — целая функция ограниченного l_*-индекса для любой функции $l_* \in \Lambda$ такой, что $0 < c_1 \le l_*(r)/l(r) \le c_2 < \infty$ для всех $r \ge 0$.

Теорема 1. *Если* $l \in \Lambda_0$ *и существует* $\eta > 0$ *такое, что*

$$\frac{xl'(x)}{l(x)} \leq -\frac{\eta}{\ln(xl(x))}, \quad x \geq x_0, \tag{6}$$

то существует целая функция ограниченного l*-индекса и* l*-регулярного роста.*

Для $p \in \mathbb{N}$ через Λ_p обозначим класс неубывающих функций $l \in \Lambda$ таких, что функция $(xl(x))'$ неубывающая на $[0, +\infty)$, а функция $x^{-p}(xl(x))'$ невозрастающая на $[0, +\infty)$.

Теорема 2. *Если* $l \in \Lambda_p$ *и существует* $\eta > 0$ *такое, что*

$$p - 1 + \frac{\eta}{\ln x} \leq \frac{xl'(x)}{l(x)} \leq p - \frac{\eta}{\ln x}, \quad x \geq x_0, \tag{7}$$

то существует целая функция ограниченного l*-индекса и* l*-регулярного роста.*

Очевидно, целая функция имеет l-регулярный рост, если

$$\ln M_f(r) \asymp L(r), \tag{8}$$

т. е. $\ln M_f(r) = O(L(r))$ и $L(r) = O(\ln M_f(r))$ при $r \to \infty$. Задача о существовании целой функции ограниченного l-индекса, удовлетворяющей (8), более сложна, и нам удалось ее решить лишь для некоторых функций $l \in \Lambda_0$ и $l = l_\rho$.

Теорема 3. *Если* $l \in \Lambda_0$ *и*

$$(xl(x))' = O(1), \quad x \to \infty, \tag{9}$$

то существует целая функция ограниченного l*-индекса, удовлетворяющая соотношению* (8).

Теорема 4. *Для любого* $\rho \in (0, +\infty)$ *существует целая функция ограниченного* l_ρ*-индекса, для которой*

$$\ln M_f(r) \asymp r^\rho. \tag{10}$$

При доказательстве теорем 1–4 будем использовать две леммы из [5]. Если a_k — нули целой функции f, то обозначим

$$n(r, z^0, 1/f) = \sum_{|a_k - z^0| \leq r} 1,$$

а для $l \in \Lambda$ и $q \in (0, +\infty)$ пусть

$$G_q(f) = \bigcup_k \left\{z\colon |z - a_k| \leq \frac{q}{l(|a_k|)}\right\}.$$

Лемма 1 [5]. *Если* $l \in \Lambda$ *и выполняется условие* (5), *то целая функция* f *имеет ограниченный* l*-индекс тогда и только тогда, когда:*

1) *для любого* $q > 0$ *существует* $P(q) > 0$ *такое, что для всех* $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq P(q)\, l(|z|);$$

2) *для любого* $q > 0$ *существует* $\tilde{n}(q)$ *такое, что*

$$n\left(\frac{q}{l(|z^0|)}, z^0, \frac{1}{f}\right) \leq \tilde{n}(q)$$

для каждого $z^0 \in \mathbb{C}$.

Положим $l(x)=l(0)$ при $x\le 0$ и

$$\lambda(r) = \sup\left\{\frac{1}{l(x)}l\left(x+\frac{t}{l(x)}\right):\ -r\le t\le r,\ x\ge 0\right\}.$$

Лемма 2 [5]. *Если* $l\in\Lambda$ *и выполняется условие* (5), *то для любого* $q>0$ *и всех* $z^0\in\mathbb{C}$ *таких, что* $|z-z^0|\le q/l(|z^0|)$, *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\lambda(q)\,l(|z^0|)} \le \frac{1}{l(|z|)} \le \frac{\lambda(q\lambda(q))}{l(|z^0|)}.$$

Доказательства теорем 1–4 проведены в пп. 2–4. В п. 5 исследуется задача о существовании целой функции l-регулярного роста, но неограниченного l-индекса и изучаются свойства пространства целых функций ограниченного l-индекса.

2. Доказательство теоремы 1. Обозначим, как и выше, $\omega(x)=xl(x)$, а последовательность $\{a_k\}$ определим равенством $\omega(a_k)=(k+1)\ln(k+1)$. Тогда $o<a_k\uparrow\infty$, $k\to\infty$, и $a_k=\Phi((k+1)\ln(k+1))$, где Φ — функция, обратная к ω.

Всюду далее через K_j будем обозначать положительные постоянные. Так как $\omega'(t)=l(t)+tl'(t)<l(t)$, а из условия (6) следует

$$\frac{1}{t\ln\omega(t)} \le \frac{1}{\eta}\,\frac{|l'(t)|}{l(t)}, \tag{11}$$

то

$$\int_a^\infty \frac{\omega'(t)\,dt}{t\ln\omega(t)} \le \frac{1}{\eta}\int_a^\infty \frac{l(t)\,|l'(t)|}{l(t)}\,dt = \frac{l(a)}{\eta},\quad a\ge x_0.$$

Отсюда вытекает

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{a_k} \le K_1 + \int_6^\infty \frac{dx}{\Phi(x\ln x)} \le K_1 + K_2\int_6^\infty \frac{d(x\ln x)}{\Phi(x\ln x)\ln(x\ln x)} =$$

$$= K_1 + K_2\int_{6\ln 6}^\infty \frac{dt}{\Phi(t)\ln t} = K_1 + K_2\int_{\Phi(6\ln 6)}^\infty \frac{\omega'(t)\,dt}{t\ln\omega(t)} < \infty, \tag{12}$$

и значит,

$$f(z) = \prod_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_k},\,0\right) \tag{13}$$

— целая функция. Здесь $E(z,p)$ — первичный множитель Вейерштрасса,

$$E(z,0) = 1-z,\qquad E(z,p) = (1-z)\exp\{z+z^2/2+\ldots+z^p/p\}.$$

Так как функция ω вогнутая, Φ — выпуклая на $(0,+\infty)$. Поэтому по теореме Лагранжа имеем

$$a_{k+1}-a_k = \Phi((k+2)\ln(k+2)) - \Phi((k+1)\ln(k+1)) \ge$$

$$\ge \Phi'((k+1)\ln(k+1))\ln(k+1) \ge \Phi'(\omega(a_k))\ln k =$$

$$= \frac{\ln k}{\omega'(a_k)} \ge \frac{\ln k}{l(a_k)}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что для любого $q > 0$ при $k \ge k_0(q)$

$$a_{k+1} - a_k > \frac{2q}{l(a_{k+1})}. \tag{15}$$

Действительно, если бы неравенство (15) не выполнялось, то ввиду леммы 2

$$a_{k+1} - a_k \le \frac{2q}{l(a_{k+1})} \le \frac{2q\lambda(2q)}{l(a_k)},$$

что противоречит (14). Из неравенства (15) следует

$$a_k + \frac{k}{l(a_k)} < a_{k+1} - \frac{q}{l(a_{k+1})}, \quad k \ge k_0(q), \tag{16}$$

т. е. $n(q/l(|z^0|), z^0, 1/f) \le 1$ для всех достаточно больших $|z^0|$ и, значит, выполняется условие 2 леммы 1.

Оценим теперь вне $G_q(f)$ логарифмическую производную

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_k} \tag{17}$$

функции (13). Пусть $k_0(q) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k \ge k_0(q)$ выполняется (15) и, значит, (16). Для $n \ge k_0(q) + 1$ обозначим

$$A_n = \left\{z\colon \big||z| - a_n\big| \le \frac{q}{l(a_n)},\ |z - a_n| \ge \frac{q}{l(a_n)}\right\},$$

$$B_n = \left\{z\colon a_n + \frac{q}{l(a_n)} \le |z| \le a_{n+1} - \frac{q}{l(a_{n+1})}\right\}.$$

Если $z \in A_n$, то в силу (15) имеем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z| - a_k} + \frac{1}{|z - a_n|} + \frac{1}{a_{n+1} - |z|} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - |z|} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - q/l(a_n) - a_k} + \frac{l(a_n)}{q} + \frac{1}{a_{n+1} - a_n - q/l(a_n)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(a_n - a_k)(1 - q/(a_n - a_k)l(a_n))} + \frac{2l(a_n)}{q} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le$$

$$\le \frac{1}{1 - q/(a_n - a_{n-1})l(a_n)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_k} + \frac{2l(a_n)}{q} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_k} + \frac{2l(a_n)}{q} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} + \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}}. \tag{18}$$

Из выпуклости функции Φ следует

$$\frac{a_n - a_k}{n - k} \ge \frac{a_n - a_1}{n - 1}, \quad n > k.$$

Поэтому выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_k} \le \frac{n-1}{a_n - a_1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \le$$

$$\le (1+o(1)) \frac{n \ln n}{a_n} = (1+o(1)) l(a_n), \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Если же $k > n+1$, то, аналогично,

$$\frac{a_k - a_{n+1}}{k-(n+1)} \ge \frac{a_{n+1} - a_1}{n} = (1+o(1)) \frac{a_{n+1}}{n}, \quad n \to \infty,$$

и значит,

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le (1+o(1)) \frac{n}{a_{n+1}} \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k-n-1} \le$$

$$\le (1+o(1)) \frac{(n+1)\ln(n+1)}{a_{n+1}} = (1+o(1)) l(a_{n+1}) \le$$

$$\le (1+o(1)) l(a_n), \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Из выпуклости функции Φ также следует $a_k - a_{n+1} \ge a_{n+1} - a_1$, т. е. $a_k \ge \ge 2a_{n+1} - a_1 \ge 3a_{n+1}/2$ при $k \ge 2n+2$ и достаточно больших n. Отсюда получаем

$$\sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} = \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k(1 - a_{n+1}/a_k)} \le 3 \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k} =$$

$$= 3 \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{\Phi((k+1)\ln(k+1))} \le 3 \int_{2n}^{\infty} \frac{dx}{\Phi(x \ln x)}.$$

Но, используя правило Лопиталя, в силу (11) имеем

$$\limsup_{y\to\infty} \int_{2n}^{\infty} \frac{dx}{\Phi(x\ln x)} \left(\frac{y \ln y}{\Phi(y \ln y)} \right)^{-1} \le$$

$$\le \limsup_{y\to\infty} \frac{\Phi(y\ln y)}{(\Phi'(y\ln y) y \ln y - \Phi(y \ln y)) \ln y} =$$

$$= \limsup_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{(\Phi'(t)t - \Phi(t)) \ln t} =$$

$$= \limsup_{x\to\infty} \frac{x}{(\omega(x)/\omega'(x) - x) \ln \omega(x)} =$$

$$= \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{l(x)}{x|l'(x)|} - 1 \right) \frac{1}{\ln(x l(x))} = \frac{1}{\eta} < \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le K_3 \frac{2n \ln(2n)}{\Phi(2n \ln(2n))} = K_3 l(a_{2n-1}) \le K_3 l(a_n). \tag{21}$$

Из неравенств (18)–(21) следует

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le K_4(q)\, l(a_n)$$

для всех $z \in A_n$, $n \ge k_0(q)+1$, где $K_4(q) = 4 + K_3 + 2/q$. Но $|a_n - |z|| \le$ $\le q/l(a_n)$, и в силу леммы 2

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le K_4(q)\, \lambda(q\lambda(q))\, l(|z|) \tag{22}$$

для всех $z \in A_n$ и $n \ge k_0(q)+1$.

Пусть теперь $z \in B_n$. Тогда

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z|-a_k} + \frac{1}{|z|-a_n} + \frac{1}{a_{n+1}-|z|} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - |z|} \le$$

$$\le \frac{1}{|z|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - a_k/(a_n + q/l(a_n))} + \frac{1}{|z|}\, \frac{1}{1 - a_n/(a_n + q/l(a_n))} +$$

$$+ \frac{l(a_{n+1})}{q} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le$$

$$\le \frac{a_n}{|z|}\left(1 + \frac{q}{a_n l(a_n)}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_k + q/l(a_n)} +$$

$$+ \frac{a_n l(a_n)}{q|z|}\left(1 + \frac{q}{a_n l(a_n)}\right) + \frac{l(a_{n+1})}{q} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}} \le$$

$$\le (1+o(1))\, \frac{a_n}{|z|}\left(2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_k} + \frac{l(a_n)}{q}\right) + \frac{l(a_{n+1})}{q} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k - a_{n+1}}$$

при $n \to \infty$. Отсюда в силу (19)–(21) и монотонности функций $l(x)$ и $\omega(x)$ имеем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le (1+o(1))\left(2 + \frac{1}{q}\right) \frac{a_n l(a_n)}{|z|} +$$

$$+ (1+o(1))\left(1 + \frac{1}{q}\right) l(a_{n+1}) + K_3 l(a_{2n}) \le$$

$$\le (1+o(1))\left(2 + \frac{1}{q}\right) \frac{|z|\, l(|z|)}{|z|} + \left(\frac{1}{q} + 1 + K_3 + o(1)\right) l(|z|) \le$$

$$\le K_5(q)\, l(|z|), \tag{23}$$

$$K_5 = K_3 + 4 + \frac{2}{q}$$

для всех $z \in B_n$ и достаточно больших $n \ge k_0(q)+1$.

Из (22) и (23) следует, что для всех $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$ и $|z| \ge R_q$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le K_6(q)\, l(|z|).$$

С другой стороны, в области $\{z: |z| \le R_q\ z \notin G_q(f)\}$ непрерывная функция $\frac{|f'(z)|}{|f(z)|\,l\,|(|z|)|}$ ограничена некоторой постоянной $K_7(q)$. Значит, условие 1 леммы 1 выполняется и поэтому функция (13) ограниченного l-индекса.

Пусть теперь $n(r) = n(r, 0, 1/f)$ — считающая функция нулей функции (13). Ясно, что для функции (13) $n(r) = 0$ при $0 \le r < a_1$ и $n(r) = k$ при $a_k \le r < a_{k+1}$. Тогда при $a_k \le r < a_{k+1}$ имеем

$$(n(r)+1)\ln(n(r)+1) = a_k l(a_k) \le r\,l(r) \le a_{k+1} l(a_{k+1}) =$$
$$= (n(r)+2)\ln(n(r)+2),$$

т. е. $n(r)\ln n(r) \sim r\,l(r)$, $r \to \infty$, и значит,

$$n(r) = (1+o(1))\frac{r\,l(r)}{\ln(r\,l(r))}, \quad r \to \infty.$$

Отсюда в силу неравенства Иенсена получаем

$$\ln M_f(r) \ge \int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t} \ge (1+o(1))\int_{a_1}^r \frac{l(t)\,dt}{\ln(t\,l(t))} \ge$$
$$\ge (1+o(1))\frac{L(r)}{\ln(r\,l(r))}, \quad r \to \infty, \tag{24}$$

т.е.

$$\ln\ln M_f(r) \ge \ln L(r) - \ln\ln(r\,l(r)) + o(1), \quad r \to \infty.$$

Поскольку

$$L(r) = \int_0^r l(t)\,dt \ge l(r)\int_0^r dt = r\,l(r),$$

имеем неравенство

$$\ln\ln M_f(r) \ge (1+o(1))\ln L(r), \quad r \to \infty,$$

откуда с учетом (13) получаем (14). Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что из условия (7) следует

$$0 \le \ln x\left(x + \frac{M}{l(x)}\right) - \ln l(x) = \frac{\xi\,l'(\xi)}{l(\xi)}\,\frac{M}{\xi\,l(x)} \le \frac{pM}{x\,l(x)} = o(1), \quad x \to +\infty,$$

где $x < \xi < x + M/l(x)$, т. е. выполняется условие (5).

Пусть последовательность $\{a_k\}$ определена так же, как при доказательстве теоремы 1. Из неубывания функции $(x\,l(x))'$ следует, что функция ω выпуклая, а функция Φ вогнутая. Поэтому

$$a_{k+1} - a_k \ge \Phi'(\omega(a_{k+1}))\ln k = \frac{\ln k}{\omega'(a_{k+1})} = \frac{\ln k}{l(a_{k+1}) + a_{k+1}\,l'(a_{k+1})}.$$

Но из (7) следует $x\,l'(x) \le p\,l(x)$, $x \ge x_0$, откуда, в свою очередь,

$$a_{k+1} - a_k \ge \frac{\ln k}{(p+1)\,l(a_{k+1})}, \quad k \ge k_0. \tag{25}$$

Отсюда так же, как при доказательстве (15), получаем

$$a_{k+1} - a_k > \frac{2q}{l(a_k)}, \tag{26}$$

и значит, выполняется (16) для любого $q > 0$ и всех $k \ge k_0(q)$.

Так как условие (7) можно записать в виде

$$p + \frac{\eta}{\ln x} \le \frac{d\ln\omega(x)}{d\ln x} \le p + 1 - \frac{\eta}{\ln x}, \quad x \ge x_0, \tag{27}$$

существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 x^p \ln^\eta x \le \omega(x) \le c_2 x^{p+1}\ln^{-\eta} x. \tag{28}$$

Поэтому выполняются соотношения $\omega'(x) \le (p+1)\omega(x)/x$, $\ln\omega(x) \ge (1+ + o(1))p\ln x$, $x \to +\infty$, и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+1}} \le K_1\int_2^{\infty}\frac{dx}{\Phi^{p+1}(x\ln x)} \le K_2\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dx}{\Phi^{p+1}(t)\ln t} =$$

$$= K_2\int_{\Phi(\ln 2)}^{\infty}\frac{\omega'(t)\,dt}{t^{p+1}\ln\omega(t)} < K_3\int_{\Phi(\ln 2)}^{\infty}\frac{\omega(t)\,dt}{t^{p+2}\ln t} \le K_4\int_{\Phi(\ln 2)}^{\infty}\frac{dt}{t\ln^{1+\eta}t} < \infty.$$

Отсюда следует, что функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k}, p\right) \tag{29}$$

целая, а в силу (16) ее нули удовлетворяют условию 2 леммы 1.

Для оценки вне $G_q(f)$ ее логарифмической производной

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^p}{a_k^p(z-a_k)}$$

множества A_n и B_n при $n \ge k_0(q)+1$ определим, как и при доказательстве теоремы 1.

Если $z \in A_n$, $n \ge k_0(q)+1$, то, используя (26), так же, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le a_n^p(1+o(1)) \times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^p(|z|-a_k)} + \frac{1}{a_n^p|z-a_n|} + \frac{1}{a_{n+1}^p(a_{n+1}-|z|)} + \sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{a_k^p(a_k-|z|)}\right\} \le$$

$$\le K_5 a_n^p\left\{2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^p(a_n-a_k)} + \frac{2l(a_n)}{qa_n^p} + \sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{a_k^p(a_k-a_n)} + \sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{1}{a_k^p(a_k-a_n)}\right\}. \tag{30}$$

В силу невозрастания функции $x^{-p}\omega'(x)$ функция $\Phi^{p+1}(x)$ выпуклая и, значит,

$$\frac{a_n^{p+1}-a_k^{p+1}}{n-k} \ge \frac{a_n^{p+1}-a_1^{p+1}}{n-1}, \quad n > k.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^p(a_n-a_k)} \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{pa_n^{p-1}}{a_k^p(a_n^p-a_k^p)} = \frac{p}{a_n}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_n^p-a_k^p}\right\} \le$$

$$\le \frac{p}{a_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^p} + (p+1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_n^{p+1}-a_k^{p+1}} \le$$

$$\le \frac{p}{a_n}\int_{3/2}^{n}\frac{dx}{\Phi^p(x\ln x)} + (p+1)\frac{(n-1)\ln n}{a_n^{p+1}-a_1^{p+1}}. \tag{31}$$

Используя правило Лопиталя и условие (27), нетрудно показать, что

$$\limsup_{y\to\infty}\int_{3/2}^{y}\frac{dx}{\Phi^p(x\ln x)}\left(y\ln y\,\Phi^{-p}(y\ln y)\right)^{-1} \le$$

$$\le \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{(1-p\omega(t)/t\omega'(t))p\ln t} \le \frac{1}{\eta}.$$

С учетом (31) имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^p(a_n-a_k)} \le \frac{(1+o(1))p}{a_n}\frac{n\ln n}{a_n^p} + (p+1)\frac{n\ln n}{a_n^{p+1}}(1+o(1)) \le K_6\, l(a_n)\, a_n^{-p}. \tag{32}$$

Используя выпуклость функции $\Phi^{p+1}(x)$, аналогично доказательству оценок (20) и (21) получаем

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{a_k^p(a_k-a_{n+1})} \le \sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{(p+1)a_k^p}{a_k^p(a_k^{p+1}-a_n^{p+1})} \le$$

$$\le \sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{(p+1)n}{(k-(n+1))(a_{n+1}^{p+1}-a_k^{p+1})} \le$$

$$\le (p+1)\frac{n\ln n}{a_{n+1}^{p+1}}(1+o(1)) \le K_7\, l(a_n)\, a_n^{-p} \tag{33}$$

и

$$\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{1}{a_k^p(a_k-a_{n+1})} \le \sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{(p+1)a_k^p}{a_k^p(a_k^{p+1}-a_{n+1}^{p+1})} \le$$

$$\le 3(p+1)\sum_{k=2n+2}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+1}} \le 3(p+1)\int_{2n}^{\infty}\frac{dx}{\Phi^{p+1}(x\ln x)}.$$

Но используя (27), (28) и правило Лопиталя, нетрудно показать, что

$$\limsup_{y\to\infty}\int_{y}^{\infty}\frac{dx}{\Phi^{p+1}(x\ln x)}\left(y\ln y\,\Phi^{-p-1}(y\ln y)\right)^{-1} \le$$

$$\le \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{\{(p+1)\omega(t)/t\omega'(t)-1\}\ln\omega(t)} \le \frac{p+1}{\eta p}.$$

А значит,

$$\sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k^p(a_k - a_{n+1})} \leq K_8 \frac{n \ln n}{a_{2n}^{p+1}} \leq K_9 \frac{l(a_n)}{a_n^p}. \tag{34}$$

Из неравенств (30), (32)–(34) в силу леммы 2 аналогично доказательству теоремы 1 получаем неравенство

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq K_{10}(q) l(|z|), \tag{35}$$

справедливое для всех $z \in A_n$ и $n \geq k_0(q) + 1$.

Если же $z \in B_n$, $n \geq k_0(q) + 1$, то в силу (26), как и при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq K_{11} a_{n+1}^p \left(2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k^p(a_n - a_k)} + \left(1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^p\right) \frac{l(a_{n+1})}{q a_{n+1}^p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{a_k^p(a_k - a_{n+1})} + \sum_{k=2n+2}^{\infty} \frac{1}{a_k^p(a_k - a_{n+1})} \right).$$

Отсюда ввиду (32)–(34) следует

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq K_{12} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^p \left(l(a_n) + l(a_{n+1})\right) \tag{36}$$

для всех $z \in B_n$ и $n \geq k_0(q) + 1$.

Так как функция Φ вогнутая, справедливы соотношения

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n \leq \frac{\Phi'((n+1)\ln(n+1))}{\Phi((n+1)\ln(n+1))} (\ln(n+2) + 1) =$$

$$= (1 + o(1)) \frac{\ln n}{a_n \omega'(a_n)} \leq (1 + o(1)) \frac{\ln(n+1)}{a_n l(a_n)} \leq \frac{1 + o(1)}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому $a_{n+1} = (1 + o(1)) a_n$ и $l(a_{n+1}) = (1 + o(1)) l(a_n)$ при $n \to \infty$, а из (36) получаем

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq K_{13}(q) l(|z|), \tag{37}$$

для всех $z \in B_n$, $n \geq k_0(q) + 1$.

Из неравенств (35) и (37) вытекает

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq K_{14}(q) l(|z|)$$

для всех $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$, $|z| \geq R(q)$, а отсюда так же, как при доказательстве теоремы 1, можно сделать вывод, что функция (29) является целой функцией ограниченного l-индекса.

Так как последовательность $\{a_k\}$ такая же, как и в теореме 1, для функции (29) выполняется оценка (24). Но из (28) следует $\ln(x l(x)) \leq (p+1) \ln x$, $x \geq x_0$. Отсюда, в свою очередь,

$$\ln \ln M_f(r) \geq \ln L(r) - \ln \ln r + o(1), \quad r \to \infty. \tag{38}$$

Так как в силу (7) $l(x) \geq c_1 x^{p-1} \ln^\eta x,\ x \geq x_0$, где $c_1 > 1$, получаем

$$L(r) \geq c_1 \int\limits_{r/2}^{r} x^{p-1} \ln^\eta x\,dx \geq c_1 \left(\frac{r}{2}\right)^p \ln^\eta \frac{r}{2},$$

а из (38) и (3) следует (4). Теорема 2 доказана.

4. Доказательства теорем 3 и 4.

Доказательство теоремы 3. Из условия (9) следует

$$\sup\{x\omega'(x):\ 0 \leq x < \infty\} = \tau < \infty,$$

где, как и выше, $\omega(x) = xl(x)$. Последовательность $\{a_k\}$ определим равенством $\omega(a_k) = k$, т. е. $a_k = \Phi(k)$, где Φ — функция, обратная к ω. Тогда $0 < a_k \uparrow \infty$, $k \to +\infty$, и при некотором $\xi \in (k, k+1)$ имеем

$$\ln a_{k+1} - \ln a_k \leq \frac{\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)} = \frac{1}{\Phi(\xi)\omega'(\Phi(\xi))} \geq \frac{1}{\tau},$$

т. е.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq \exp\left\{\frac{1}{\tau}\right\} > 1 + \frac{1}{\tau}. \tag{39}$$

Отсюда следует $a_{k+1} - a_k \geq a_k/\tau$, и поскольку $a_k l(a_k) \uparrow \infty$, $k \to \infty$, для любого $q > 0$ при $k \geq k_0(q)$ справедливо неравенство (16).

Из (39) также следует, что функция (13) целая, а в силу (14) удовлетворяет условию 2 леммы 1.

Чтобы оценить $\left|\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right|$ для $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$, для $n \geq k_0(q) + 1$ положим

$$A_n = \left\{z:\ \frac{2\tau+1}{2\tau+2} a_n \leq |z| \leq \frac{2\tau+1}{2\tau} a_n,\ |z - a_n| \geq \frac{q}{l(a_n)}\right\},$$

$$B_n = \left\{z:\ \frac{2\tau+1}{2\tau} a_n \leq |z| \leq \frac{2\tau+1}{2\tau+2} a_{n+1}\right\}.$$

Если $z \in A_n$, то в силу (39) получаем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z| - a_k} + \frac{1}{|z - a_n|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k - |z|} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{((2\tau+1)/(2\tau+2))a_n - a_{n-1}} + \frac{l(a_n)}{q} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k - ((2\tau+1)/2\tau)a_n} \leq$$

$$\leq \frac{n}{((2\tau+1)/(2\tau+2))a_n - (\tau/(\tau+1))a_n} +$$

$$+ \frac{l(a_n)}{q} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k - \left(1 - (2\tau+1)a_n/2\tau a_{n+1}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{2n(\tau+1)}{a_n} + \frac{l(a_n)}{q} + \frac{2(\tau+1)}{a_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_k} \leq$$

$$\leq \left(2(\tau+1)+\frac{1}{q}\right)l(a_n) + \frac{2(\tau+1)}{a_n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{k-n} =$$

$$= \left(2(\tau+1)\frac{1}{q}+\frac{\tau^2}{n}\right)l(a_n) \leq K_1(q)\,l\left(\frac{2\tau}{2\tau+1}\frac{2\tau+1}{2\tau}a_n\right) \leq K_1(q)\,l\left(\frac{2\tau}{2\tau+1}|z|\right),$$

$$K_1(q) = 2(\tau+1) + \tau^2 + \frac{1}{q}.$$

Для $0<c<1$ выполняются соотношения

$$l(x) \leq l(cx) = \frac{cx\,l(cx)}{cx} \leq \frac{x\,l(x)}{cx} = \frac{l(x)}{c}.$$

Поэтому для всех $z \in A_n$, $n \geq k_0(q)+1$, имеем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{2\tau+1}{2\tau}K_1(q)\,l(|z|). \tag{40}$$

Если же $z \in B_n$, $n \geq k_0(q)+1$, то аналогично получаем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{|z|}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_k/|z|} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1-(1-|z|/a_k)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z|}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-2\tau/(2\tau+1)} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2\tau+2}{a_k} \leq$$

$$\leq \frac{(2\tau+1)(\tau+1)}{3\tau+1}\frac{n}{|z|} + \frac{2(\tau+1)}{a_{n+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{k-(n+1)} \leq$$

$$\leq \frac{(2\tau+1)(\tau+1)}{3\tau+1}\frac{a_n\,l(a_n)}{|z|} + \frac{2(\tau+1)^2}{2(n+1)}l(a_{n+1}) \leq$$

$$\leq \frac{(2\tau+1)(\tau+1)}{3\tau+1}\frac{|z|\,l(|z|)}{|z|} + (\tau+1)^2\,l(|z|) =$$

$$= (\tau+1)\left(\frac{2\tau+1}{3\tau+1}+\tau+1\right)l(|z|). \tag{41}$$

Учитывая неравенства (40) и (41), как обычно, получаем ограниченность l-индекса функции (13).

Для считающей функции $n(r)$ нулей функции (13) теперь имеем неравенства $rl(r)-1 \leq n(r) \leq rl(r)$, $r \geq a_1$, и по неравенству Иенсена

$$\ln M_f(r) \geq (1+o(1))\int_0^r l(t)\,dt, \quad r\to\infty,$$

откуда с учетом (3) следует (8). Теорема 3 доказана.

Доказательство *теоремы* 4. Если ρ — целое число, то положим $f(z) = \exp\{z^{\rho}\}$. Так как эта функция не имеем нулей и

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \rho|z|^{\rho-1},$$

то по лемме 1 она является функцией ограниченного l_ρ-индекса. Ясно также, что $\ln M_f(r) = r^\rho$.

Пусть ρ — нецелое число, $p = [\rho] < \rho < p+1$. Рассмотрим целую функцию

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{n^{1/\rho}}, p\right)$$

и обозначим

$$D_\delta = \{z = re^{i\theta}\colon \delta \le \theta \le 2\pi - \delta\}, \quad 0 < \delta < \pi/2\rho.$$

Известно [8, с. 126], что

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} e^{-i\rho\pi} e^{i(\rho-1)\theta} r^{\rho-1} + o(r^{\rho-1}), \quad r \to \infty,$$

равномерно по $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Поэтому для всех $z \in D_\delta$ имеем

$$\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \le K_1 |z|^{\rho-1}, \quad K_1 = K_1(\delta). \tag{42}$$

Пусть теперь

$$D_\delta^* = \{z = re^{i\theta}\colon r \ge 1, |\theta| \le \delta\}.$$

При подходящем выборе ветви многозначной функции z^ρ функция

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{\sin \pi z^\rho}$$

аналитична в D_δ^* и не имеет нулей. Поэтому функция

$$\psi(z) = \frac{z^{1-\rho}}{\pi\rho}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{z^{1-\rho}}{\pi\rho}\frac{g'(z)}{g(z)} - \operatorname{ctg} \pi z^\rho$$

аналитична в D_δ^*. Используя равенство

$$|\operatorname{ctg}(x+iy)|^2 = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}, \tag{43}$$

нетрудно показать, что

$$|\operatorname{ctg}(\pi r^\rho e^{\pm i\delta\rho})| \le K_2 = K_2(\delta) < \infty,$$

и в силу (42) имеем

$$|\psi(re^{\pm i\delta})| \le \frac{r^{1-\rho}}{\pi\rho} K_1 r^{\rho-1} + K_2 = K_3. \tag{44}$$

Чтобы применить к функции ψ принцип Фрагмена – Линделефа, достаточно показать, что ее порядок не превышает ρ. Для этого заметим, что g является функцией вполне регулярного роста, т. е. существует множество $E_0 \subset [0, +\infty)$ нулевой плотности такое, что для всех $|\theta| \le \delta$

$$\lim_{r\to\infty,\, r\notin E_0} r^{-\rho} \ln\left|g(re^{i\theta})\right| = h_g(\theta),$$

где $h_g(\theta)$ — индикатор функции g. Аналогичное соотношение выполняется для функции $s(z)=\sin\pi z^{\rho}$. Считая исключительное множество общим для функций g и s и учитывая непрерывность индикатора, отсюда получаем

$$\max\left\{\left|\frac{g(re^{i\theta})}{s(re^{i\theta})}\right|, \left|\frac{s(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})}\right|\right\} \le e^{Hr^{\rho}}, \quad 0<H<\infty, \tag{45}$$

для всех $r\notin E_0$. Так как E_0 имеет нулевую плотность, неравенство (45) справедливо для всех $r\ge 1$, возможно, с новой постоянной H. Из (45) следует $\exp\{-Hr^{\rho}\}\le|\varphi(z)|\le\exp\{Hr^{\rho}\}$ и, поскольку производная φ' функции φ имеет тот же порядок, что и φ, нетрудно видеть, что порядок функции φ'/φ не превышает ρ и, значит, порядок ψ не превышает ρ.

Таким образом, по принципу Фрагмена – Линделефа $|\psi(z)|\le K_4<\infty$ для всех $z\in D_{\delta}^{*}$ и, значит,

$$\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \le \pi\rho|z|^{\rho-1}\left(K_4+\left|\operatorname{ctg}\pi z^{\rho}\right|\right), \quad z\in D_{\delta}^{*}. \tag{46}$$

Поэтому по лемме 1 для завершения доказательства теоремы 4 осталось показать, что $\left|\operatorname{ctg}\pi z^{\rho}\right|\le K_5=K_5(q,\delta)$ для всех $z\in D_{\delta}^{*}\setminus G_q(g)$.

Пусть $z\in\partial G_q(g)$, т. е. $|z-n^{1/\rho}|=q/l_{\rho}(n^{1/\rho})=qn^{(1-\rho)/\rho}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\pi z^{\rho}=\pi n+\pi\rho q e^{i\theta}+o(1)$, $n\to\infty$, и $\left|\operatorname{ctg}\pi z^{\rho}\right|=\operatorname{ctg}(\pi\rho q e^{i\theta}+ +o(1)), n\in\infty$, т. е. в силу (43) $\left|\operatorname{ctg}\pi z^{\rho}\right|\le K_6$ на $\partial G_q(g)$, если только $\rho q\le \le 1/3$. На кривой $\{z:\ \operatorname{Re}(\pi z^{\rho})=\pi/2+\pi n\}$, учитывая (43), имеем $\left|\operatorname{ctg}\pi z^{\rho}\right|\le \le 1$. Поэтому в силу произвольности n и принципа максимума модуля получаем

$$\left|\operatorname{ctg}\pi z^{\rho}\right| \le \max\{1, K_6, K_2\} \tag{47}$$

для всех $z\in D_{\delta}^{*}\setminus G_q(g)$. Таким образом, если $\rho q\le 1/3$, то для всех $z\in\{z: |z|\ge 1, z\notin G_q(g)\}$ из (42), (46) и (47) имеем

$$\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \le K_7(q)|z|^{\rho-1}.$$

Ясно, что такое неравенство тем более выполняется, если $\rho q\ge 1/3$, для всех $z\in\mathbb{C}\setminus G_q(g)$. Теорема 4 доказана.

5. Замечания и дополнения. В [7] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $l\in\Lambda$ удовлетворяет условию* (5), *f — целая функция ограниченного l-индекса, φ — целая функция и $\psi(z)=f(z)\varphi(z)$. Для того чтобы функция ψ была ограниченного l-индекса, необходимо и достаточно, чтобы функция φ была ограниченного l-индекса.*

Пусть $\rho>1$ и, как выше, $l_{\rho}(r)=r^{\rho-1}$ при $r\ge 1$. Через E_{ρ} обозначим пространство целых функций f таких, что $\ln M_f(r)\asymp r^{\rho}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах, а через E_{ρ}^{*} — его подпространство целых функций ограниченного l_{ρ}-индекса. В силу теоремы 4 $E_{\rho}^{*}\ne\varnothing$.

Теорема 5. *Пространство E_{ρ}^{*} плотно в E_{ρ}.*

Доказательство. Нам нужно показать, что произвольная функция $g\in \in E_{\rho}\setminus E_{\rho}^{*}$ является пределом некоторой последовательности функций $g_n\in E_{\rho}^{*}$.

Если ρ — нецелое число, то по теореме Адамара имеем

$$g(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k},\ p\right),$$

где $p = [\rho] \geq \deg P$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+$, а

$$E(u, p) = (1-u) \exp\left\{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}\right\}.$$

Пусть f — функция, определенная равенством (29),

$$f_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} E\left(\frac{z}{k^{1/\rho}},\ p\right),$$

и

$$g_n(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} f_n(z) \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k},\ p\right).$$

Ясно, что функция g является пределом последовательности $\{g_n\}$, а в силу теоремы 4, ограниченности l-индекса любого многочлена и леммы 3 $g_n \in E_{\rho}^{*}$.

Пусть теперь ρ — целое число. Если $g(z) = Q(z)\, e^{P(z)}$, где Q и P — многочлены, то $\rho = p = \deg P$, $e^{P(z)} \in E_{\rho}^{*}$ (см. доказательство теоремы 4) и по лемме 3 $g \in E_{\rho}^{*}$. Поэтому

$$g(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k},\ q\right),$$

где $\deg P = \rho$ и $q \leq \rho$, либо $\deg P \leq \rho$ и $q = \rho$, а $\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Выберем

$$g_n(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{n} E\left(\frac{z}{a_k},\ q\right).$$

Ясно, что g является пределом последовательности $\{g_n\}$, а каждая g_n принадлежит E_{ρ}^{*}.

Теорема 6. *Пространство* $E_{\rho} \setminus E_{\rho}^{*}$ *плотно в* E_{ρ}.

Доказательство. Пусть $f \in E_{\rho}^{*}$, а

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)^{\lambda_k}$$

— целая функция нулевого порядка, $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. Ясно, что φ, а значит, ввиду леммы 3 и

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)^{\lambda_k},$$

являются функциями неограниченного l_{ρ}-индекса при любом $\rho > 0$. Поэтому согласно лемме 3 функции $f_n(z) = f(z)\,\varphi_n(z) \notin E^*_\rho$. Очевидно, $f_n \in E_\rho$ и

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

в топологии равномерной сходимости на компактах.

В заключение сформулируем две нерешенные, но естественные задачи.

1. Пусть a_k — нули целой функции f, а p_k — их кратности. Как отмечалось выше, если $p_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, то f не может быть функцией ограниченного l-индекса, какова бы ни была положительная непрерывная на $[0, +\infty)$ функция l. По-видимому, справедливо следующее утверждение: если $p_k = O(1)$, $k \to \infty$, то существует положительная непрерывная на $[0, +\infty)$ функция l такая, что f является функцией ограниченного l-индекса.

2. Пусть $p \in \mathbb{Z}_+$, а l — достаточно гладкая на $[0, +\infty)$ функция такая, что

$$p < \liminf \frac{\ln l(r)}{\ln r} < \limsup \frac{\ln l(r)}{\ln r} < p + 1, \quad r \to +\infty.$$

Существует ли целая функция f ограниченного l-индекса, для которой $\ln M_f(r) \asymp L(r)$?

Авторы выражают признательность А. А. Гольдбергу за оказанную помощь при доказательстве теоремы 4.

1. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* Целые функции ограниченного l-распределения значений // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 1. – С. 3–13.
2. *Shah S. M.* Entire functions of bounded index // Lect. Notes Math. – 1977. – **589**. – P. 117–145.
3. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* О целых функциях, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 10. – С. 1716–1722.
4. *Шеремета М. Н.* Об l-индексе и l-распределении значений целых функций // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 94–96.
5. *Шеремета М. Н., Кузык А. Д.* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 2. – С. 142–150.
6. *Гольдберг А. А., Шеремета М. Н.* О существовании целой трансцендентной функции ограниченного l-индекса // Мат. заметки. – 1995. – **57**, № 1. – С. 125–129.
7. *Кузык А. Д.* Целые функции ограниченного l-индекса. – Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1992. – 12 с.
8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 519 с.

Получено 21.04.95