УДК 519.21

**Ю. Н. Линьков** (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ

The behaviour of error probabilities for Neyman–Pearson test under null and alternative hypotheses is investigated when the autoregressive process is observed.

Досліджено поведінку ймовірностей помилок критерія Неймана–Пірсона при різних нульових та альтернативних гіпотезах за спостереженнями процесів авторегресії.

**1. Введение.** Пусть $\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $n \geq 2$, — наблюдения процесса авторегрессии вида

$$\xi_i = \theta \xi_{i-1} + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\xi_0 = 0$, $\theta \in R$ — неизвестный параметр, а $w_1, w_2, \dots$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, не зависящие от $\theta$. Обозначим через $P_\theta^n$ меру, задающую распределение наблюдения $\xi^n$. Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез $H^n$ и $\tilde{H}^n$, состоящих в том, что распределение наблюдения $\xi^n$ задается мерами $P_\theta^n$ и $P_{\tilde\theta}^n$ соответственно, где $\theta$ и $\tilde\theta$ — некоторые точки на $R$ такие, что $\theta \neq \tilde\theta$, $\theta$ не зависит от $n$, а $\tilde\theta$, вообще говоря, зависит от $n$ таким образом, что будем писать $\tilde\theta = \theta_n$, когда $\tilde\theta$ зависит от $n$. Очевидно, меры $P_{\tilde\theta}^n$ и $P_\theta^n$ взаимно абсолютно непрерывны при всех $\theta$, $\tilde\theta \in R$ и $n = 1, 2, \dots$, причем логарифм плотности меры $P_{\tilde\theta}^n$ относительно меры $P_\theta^n$ имеет вид ($P_\theta^n$-п. н.)

$$\Lambda_n = (\tilde\theta - \theta) \sum_{i=1}^n \xi_i w_i - \frac{1}{2} (\tilde\theta - \theta)^2 \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^2. \tag{2}$$

Пусть $\delta_n^+$ — критерий Неймана–Пирсона уровня $\alpha_n \in (0, 1)$ для различения гипотез $H^n$ и $\tilde{H}^n$ по наблюдениям $\xi^n$ процесса авторегрессии (1). Тогда [1]

$$\delta_n^+ = I(\Lambda_n > d_n) + q_n I(\Lambda_n = d_n), \tag{3}$$

где $I(A)$ — индикатор множества $A$, а $d_n \in (-\infty, \infty)$ и $q_n \in [0, 1]$ — параметры критерия $\delta_n^+$, определяемые из условия $E_\theta^n \delta_n = \alpha_n$ (здесь $E_\theta^n$ — математическое ожидание по мере $P_\theta^n$). Обозначим через $\beta_n$ вероятность ошибки 2-го рода критерия $\delta_n^+$.

Цель настоящей работы — исследовать поведение вероятностей ошибок $\alpha_n$ и $\beta_n$ критерия $\delta_n^+$ при различных значениях $\theta$ и различном поведении разности $\Delta_n = \theta_n - \theta$ при $n \to \infty$.

В п. 2 рассматривается случай $|\theta| < 1$, когда процесс авторегрессии (1) является эргодическим, а для $\Lambda_n$ при гипотезе $H^n$ имеет место закон больших чисел. В п. 3 рассматривается случай $|\theta| \geq 1$, когда процесс авторегрессии (1) не является эргодическим и при гипотезе $H^n$ имеет место слабая сходимость распределения последовательности $\psi_n^{-1}\Lambda_n$ при $n\to\infty$ с некоторой нормировкой $\psi_n$. В п. 4 рассматривается случай контигуальных альтернатив при $|\theta| < 1$, $|\theta| = 1$ и $|\theta| > 1$. В пп. 2, 3 предполагается, что $\alpha_n \to \alpha \in (0,1)$ при $n\to\infty$, а в п. 4 $\alpha_n \to \alpha \in [0,1]$ при $n\to\infty$.

**2. Эргодический случай.** Пусть $|\theta| < 1$, т. е. процесс авторегрессии (1) является эргодическим. В данном случае для $\Lambda_n$ справедлив закон больших чисел, вид которого определяется следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Пусть* $|\theta| < 1$ *и* $\sqrt{n}\,|\Delta_n| \to \infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда справедливо следующее соотношение*

$$P_\theta^n\text{-}\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1}\Lambda_n = -1, \tag{4}$$

*где* $\psi_n = 2^{-1}(1-\theta^2)^{-1} n\,\Delta_n^2$.

***Доказательство.*** Так как $|\theta| < 1$, легко показать, что для процесса авторегрессии (1) справедливо соотношение

$$P_\theta^n\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1} = (1-\theta^2)^{-1}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает слабая сходимость

$$\mathcal{L}\left( n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}w_i \,\middle|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,(1-\theta^2)^{-1}), \tag{6}$$

где $\mathcal{L}(\cdot\,|\,P_\theta^n)$ — закон распределения относительно меры $P_\theta^n$, символ $\xrightarrow{w}$ означает слабую сходимость законов, а $\mathcal{N}(a,B)$, — нормальный закон распределения со средним $a$ и ковариацией $B$. Теперь из равенства (2) и соотношений (5) и (6) вытекает искомое соотношение (4). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема об асимптотическом поведении вероятностей ошибок критерия Неймана–Пирсона (3).

**Теорема 2.** *Пусть* $|\theta| < 1$ *и* $\sqrt{n}\,\Delta_n \to \infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\psi_n^{-1}\ln\beta_n = -1, \tag{7}$$

*где* $\psi_n = 2^{-1}(1-\theta^2)^{-1} n\,\Delta_n^2$.

***Доказательство.*** В силу теоремы 1 для $\Lambda_n$ выполняется соотношение (4), т. е. справедливо условие $\Lambda 1$ из [1, с. 62] с $\chi_n = \psi_n$. Применяя теперь следствие 2.3.1 из [1], получаем искомую импликацию (7). Теорема 2 доказана.

***Замечание* 1.** В условиях теоремы 2 в силу теоремы 2.3.1 из [1] параметр $d_n$ критерия Неймана–Пирсона $\delta_n^+$ при любом $\alpha \in (0,1)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\psi_n^{-1}\ln d_n = -1.$$

**3. Неэргодический случай.** Пусть теперь $|\theta| \geq 1$. В данном случае процесс авторегрессии (1) не является эргодическим.

Пусть сначала $|\theta| = 1$. Тогда справедлива следующая теорема об асимптотическом поведении $\Lambda_n$ при $n\to\infty$.

**Теорема 3.** *Пусть* $|\theta| = 1$ *и* $n|\Delta_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathcal{L}\left(\psi_n^{-1}\Lambda_n \,\Big|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(-\int_0^1 \hat{w}_s^2\,ds \,\Big|\, P\right), \tag{8}$$

*где* $\psi_n = 2^{-1}n^2\Delta_n^2$, а $\hat{w} = (\hat{w}_s)_{s\in R_+}$ *— стандартный винеровский процесс на некотором стохастическом базисе* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.

***Доказательство.*** Из [2, 3] имеем

$$\mathcal{L}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} \,\Big|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\int_0^1 \hat{w}_s^2\,ds \,\Big|\, P\right), \tag{9}$$

$$\mathcal{L}\left(n^{-1/2}\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}w_i \,\Big|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\int_0^1 \hat{w}_s\,d\hat{w}_s \,\Big|\, P\right) \tag{10}$$

при $n \to \infty$. Объединяя (2), (9) и (10) и учитывая, что $n|\Delta_n| \to \infty$ при $n \to \infty$, получаем искомую сходимость (8). Теорема 3 доказана.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение вероятностей ошибок критерия $\delta_n^+$ в условиях теоремы 3.

**Теорема 4.** *Пусть* $|\theta| = 1$ *и* $n|\Delta_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0, 1)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1}\ln\beta_n = l_{1-\alpha}, \tag{11}$$

*где* $\psi_n = 2^{-1}n^2\Delta_n^2$, *а* $l_p$ *—* $p$*-квантиль закона распределения*

$$L = \mathcal{L}\left(-\int_0^1 \hat{w}_s^2\,ds \,\Big|\, P\right).$$

***Доказательство.*** В силу теоремы 3 имеет место слабая сходимость (8), т. е. выполняется условие $\Lambda 4$ из [1, с. 70] с предельным законом

$$L = \mathcal{L}\left(-\int_0^1 \hat{w}_s^2\,ds \,\Big|\, P\right).$$

Очевидно, функция распределения $L(x)$ закона $L$ непрерывна и строго монотонно возрастает на $(-\infty, 0)$. Тогда, применяя теорему 2.4.2 из [1], получаем искомое утверждение (11). Теорема 4 доказана.

***Замечание 2.*** В условиях теоремы 4 для любого $\alpha \in (0, 1)$ с учетом теоремы 2.4.2 из [1] получаем

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1}\ln d_n = l_{1-\alpha}. \tag{12}$$

Пусть теперь $|\theta| > 1$. В этом случае справедлива следующая теорема об асимптотическом поведении $\Lambda_n$ при $n \to \infty$.

**Теорема 5.** *Пусть* $|\theta| > 1$ *и* $|\theta|^n|\Delta_n| \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathcal{L}\left(\psi_n^{-1}\Lambda_n \,|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(-\hat{w}_1^2 \,|\, P\right), \tag{13}$$

*где* $\psi_n = 2^{-1}(\theta^2-1)^{-2}\theta^{2n}\Delta_n^2$.

***Доказательство.*** Из [4, 5] имеем

$$\mathcal{L}\left(\chi_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}^2\,\Big|\,P_\theta^n\right)\xrightarrow{w}\mathcal{L}\left(-\hat{w}_1^2\,|\,P\right),\tag{14}$$

$$\mathcal{L}\left(\chi_n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}w_i\,\Big|\,P_\theta^n\right)\xrightarrow{w}\mathcal{L}\left(\hat{w}_1\eta\,|\,P\right)\tag{15}$$

при $n\to\infty$, $\chi_n=\theta^{2n}(\theta^2-1)^{-2}$, а $\eta$ — стандартная гауссовская случайная величина на стохастическом базисе $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},P)$, не зависящая от $\hat{w}_1$. Объединяя (2), (14) и (15) и учитывая, что $|\theta|^n|\Delta_n|\to\infty$ при $n\to\infty$, получаем искомую слабую сходимость (13). Теорема 5 доказана.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение вероятностей ошибок критерия $\delta_n^+$ в условиях теоремы 5.

**Теорема 6.** *Пусть $|\theta|>1$ и $|\theta|^n|\Delta_n|\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда для любого $\alpha\in(0,1)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\psi_n^{-1}\ln\beta_n=-z_{1-\alpha/2}^2,\tag{16}$$

*где $\psi_n=2^{-1}(\theta^2-1)^{-2}\theta^{2n}\Delta_n^2$, а $z_p$ — $p$-квантиль стандартного гауссовского закона $\mathcal{N}(0,1)$.*

***Доказательство.*** В силу теоремы 5 имеет место слабая сходимость (13), т. е. выполняется условие $\Lambda$ 4 из [1, с. 70] с предельным законом $L=\mathcal{L}\left(-\hat{w}_1^2\,|\,P\right)$. Очевидно, функция распределения $L(x)$ закона $L$ непрерывна, строго монотонно возрастает на $(-\infty,0)$ и $p$-квантиль $l_p$ закона $L$ имеет вид $l_p=-z_{(1+p)/2}^2$. Отсюда, применяя теорему 2.4.2 из [1], получаем искомое утверждение (16). Теорема 6 доказана.

***Замечание* 3.** Как и в замечании 2, в условиях теоремы 6 для любого $\alpha\in(0,1)$ справедлива эквивалентность (12), в которой $l_{1-\alpha}=-z_{1-\alpha/2}^2$.

**4. Случай контигуальных альтернатив.** Пусть теперь $\Delta_n\to 0$ при $n\to\infty$ достаточно быстро, т. е. таким образом, что семейства гипотез $(H^n)$ и $(\tilde{H}^n)$ взаимно контигуальны [1]. При этом будем рассматривать все возможные значения параметра $\theta$, а именно: $|\theta|<1$, $|\theta|=1$ и $|\theta|>1$. Справедлива следующая теорема о поведении $\Lambda_n$ при гипотезе $H^n$ и при альтернативе $\tilde{H}^n$ в случае $|\theta|<1$.

**Теорема 7.** *Пусть $|\theta|<1$ и $|\Delta_n|=((1-\theta^2)/n)^{1/2}$. Тогда при $n\to\infty$ справедливы соотношения*

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n\,|\,P_\theta^n\right)\xrightarrow{w}\mathcal{N}(-1/2,1),\tag{17}$$

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n\,|\,P_{\theta_n}^n\right)\xrightarrow{w}\mathcal{N}(1/2,1).\tag{18}$$

***Доказательство.*** Из (2) имеем

$$\Lambda_n=\Delta_n\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}w_i-\frac{1}{2}\Delta_n^2\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}^2.\tag{19}$$

Учитывая соотношения (5) и (6), из (19) получаем искомую сходимость (17). Теперь соотношение (18) вытекает из (17) и следствия 2.5.2 из [1]. Теорема 7 доказана.

Следующая теорема определяет асимптотическое поведение вероятностей ошибок $\alpha_n$ и $\beta_n$ критерия $\delta_n^+$ в условиях теоремы 7.

**Теорема 8.** *Пусть* $|\theta| < 1$ *и* $|\Delta_n| = ((1-\theta^2)/n)^{1/2}$. *Тогда для любого* $\alpha \in [0, 1]$ *справедлива эквивалентность*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \beta_n = \Phi(z_{1-\alpha} - 1), \tag{20}$$

*где* $\Phi(x)$ — *функция распределения закона* $\mathcal{N}(0, 1)$.

***Доказательство.*** В силу теоремы 7 имеет место слабая сходимость (17), т. е. выполняется условие $\Lambda 6$ из [1, с. 77], с $L = \mathcal{N}(-1/2, 1)$. Так как функция распределения $L(x)$ закона $L$ напрерывна и строго монотонно возрастает, то искомое утверждение (20) вытекает из теоремы 2.5.5 [1], в которой $\tilde{L} = \mathcal{N}(1/2, 1)$. Теорема 8 доказана.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение $\Lambda_n$ при нулевой гипотезе $H^n$ и альтернативе $\tilde{H}^n$ в случае $|\theta| = 1$.

**Теорема 9.** *Пусть* $|\theta| = 1$ *и* $\Delta_n = cn^{-1}$, *где* $|c| = 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n \mid P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left( c\int_0^1 \hat{w}_s\, d\hat{w}_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \hat{w}_s^2\, ds \,\Big|\, P\right), \tag{21}$$

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n \mid P_{\theta_n}^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left( c\int_0^1 J_{c\theta}(s)\, d\hat{w}_s + \frac{1}{2}\int_0^1 J_{c\theta}^2(s)\, ds \,\Big|\, P\right), \tag{22}$$

*где* $J_a(s)$ — *процесс Орнштейна–Уленбека вида*

$$J_a(s) = \hat{w}_s + \int_0^s e^{a(s-\tau)}\hat{w}_\tau\, d\tau, \quad s \in R_+.$$

***Доказательство.*** Из [2, 3] имеем

$$\mathcal{L}\left(\left( n^{-1}\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} w_i,\, n^{-2}\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}\right) \Bigg|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w}$$

$$\xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\left(\int_0^1 \hat{w}_s\, d\hat{w}_s, \int_0^1 \hat{w}_s^2\, ds\right)\Bigg|\, P\right), \quad n\to\infty, \tag{23}$$

откуда вытекает сходимость (21).

Далее, из очевидного равенства

$$\Lambda_n = \Delta_n \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\xi_i - \theta\xi_{i-1}) - \frac{1}{2}\Delta_n^2\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} =$$

$$= \Delta_n \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\xi_i - \theta_n\xi_{i-1}) + \frac{1}{2}\Delta_n^2\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^2$$

получаем

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n \mid P_{\theta_n}^n\right) = \mathcal{L}\left(\Delta_n\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} w_i + \frac{1}{2}\Delta_n^2\sum_{i=1}^n \xi_{i-1}^2 \,\Big|\, P_{\theta_n}^n\right). \tag{24}$$

При $\theta = 1$ из [6] вытекает соотношение

$$\mathcal{L}\left(\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}w_i,\, n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}^2\right)\,\Bigg|\, P_{\theta_n}^n\right) \xrightarrow{w}$$

$$\xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\left(\int_0^1 J_c(s)\,d\hat{w}_s,\, \int_0^1 J_c^2(s)\,ds\right)\,\Bigg|\, P\right), \quad n\to\infty. \tag{25}$$

Теперь из соотношений (24) и (25) получаем искомое утверждение (22) при $\theta = 1$.

Пусть теперь $\theta = -1$. Легко проверить, что

$$\mathcal{L}\left(\xi_i \,|\, P_{-1+\Delta_n}^n\right) = \mathcal{L}\left(\xi_i \,|\, P_{1-\Delta_n}^n\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда, используя равенство (24), при $\theta = -1$ имеем

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n \,|\, P_{\theta_n}^n\right) = \mathcal{L}\left(\Delta_n\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}w_i + \frac{1}{2}\Delta_n^2\sum_{i=1}^{n}\xi_{i-1}^2 \,\Bigg|\, P_{-\theta_n}^n\right),$$

откуда, в свою очередь, с учетом соотношения (25) получаем утверждение (22) при $\theta = -1$. Теорема 9 доказана.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение $\alpha_n$ и $\beta_n$ для критерия $\delta_n^+$ в условиях теоремы 9.

**Теорема 10.** *Пусть* $|\theta| = 1$ *и* $\Delta_n = cn^{-1}$, *где* $|c| = 1$. *Тогда для любого* $\alpha \in [0, 1]$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\beta_n = \tilde{L}(l_{1-\alpha}), \tag{26}$$

*где* $l_p$ — $p$*-квантиль закона*

$$L = \mathcal{L}\left(c\int_0^1 \hat{w}_s\,d\hat{w}_s - \frac{1}{2}\int_0^1 \hat{w}_s^2\,ds \,\Bigg|\, P\right), \tag{27}$$

*а* $\tilde{L}(x)$ — *функция распределения вероятностей закона*

$$\tilde{L} = \mathcal{L}\left(c\int_0^1 J_{c\theta}(s)\,d\hat{w}_s + \frac{1}{2}\int_0^1 J_{c\theta}^2(s)\,ds \,\Bigg|\, P\right). \tag{28}$$

***Доказательство.*** В силу теоремы 9 имеет место слабая сходимость (21), т. е. выполняется условие $\Lambda 6$ из [1, с. 77] с законом $L$, заданным равенством (27). Так как функция распределения $L(x)$ закона $L$ непрерывна и строго монотонно возрастает, искомое утверждение (26) вытекает из теоремы 2.5.5 [1], в которой закон $\tilde{L}$ задается равенством (28). Теорема 10 доказана.

Справедлива следующая теорема об асимптотическом поведении $\Lambda_n$, $n \to \infty$, при нулевой гипотезе $H^n$ и альтернативе $\tilde{H}^n$ в случае $|\theta| > 1$.

**Теорема 11.** *Пусть* $|\theta| > 1$ *и* $|\Delta_n| \to (\theta^2 - 1)|\theta|^{-n}$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n \,|\, P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\hat{w}_1\eta - \frac{1}{2}\hat{w}_1^2 \,|\, P\right), \tag{29}$$

$$\mathcal{L}\left(\Lambda_n \,|\, P_{\theta_n}^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\hat{w}_1\eta + \frac{1}{2}\hat{w}_1^2 \,|\, P\right), \tag{30}$$

*где* $\eta$ — *стандартная гауссовская случайная величина на стохастическом базисе* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, *не зависящая от* $\hat{w}_1$.

***Доказательство.*** Из [4, 5] имеем

$$\mathcal{L}\left(\left(\Delta_n \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1} w_i, \Delta_n^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}^n\right) \middle| P_\theta^n\right) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\left(\left(\hat{w}_1 \eta, \hat{w}_1^2\right) | P\right), \quad n \to \infty, \tag{31}$$

откуда вытекает сходимость (29). Следовательно, справедливо условие $\Lambda 8'$ из [1], и значит, сходимость (30) вытекает из теоремы 2.6.2 [1]. Теорема 11 доказана.

Следующая теорема описывает асимптотическое поведение вероятностей ошибок $\alpha_n$ и $\beta_n$ критерия $\delta_n^+$ при $n \to \infty$ в условиях теоремы 11.

**Теорема 12.** *Пусть* $|\theta| > 1$ *и* $|\Delta_n| = (\theta^2 - 1)|\theta|^{-n}$. *Тогда для любого* $\alpha \in [0, 1]$ *справедлива эквивалентность*

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \beta_n = \tilde{L}(l_{1-\alpha}), \tag{32}$$

*где* $l_p$ — $p$*-квантиль закона*

$$L = \mathcal{L}\left(\hat{w}_1 \eta - \frac{1}{2} \hat{w}_1^2 \,|\, P\right), \tag{33}$$

*а* $\tilde{L}(x)$ — *функция распределения закона*

$$\tilde{L} = \mathcal{L}\left(\hat{w}_1 \eta + \frac{1}{2} \hat{w}_1^2 \,|\, P\right). \tag{34}$$

***Доказательство.*** В силу теоремы 11 имеет место сходимость (29), т. е. выполняется условие $\Lambda 6$ из [1, с. 77] с законом $L$, заданным равенством (33). Так как функция распределения $L(x)$ закона $L$ непрерывна и строго монотонно возрастает, искомое утверждение (32) вытекает из теоремы 2.5.5 [1], в которой закон $\tilde{L}$ задается равенством (34). Теорема 12 доказана.

***Замечание 4.*** В условиях теорем 8, 10 и 12 для любого $\alpha \in [0, 1]$ справедлива эквивалентность

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d_n = l_{1-\alpha},$$

где $l_p$ — $p$-квантиль закона $L = \mathcal{N}(-1/2, 1)$ в случае $|\theta| < 1$, закона $L$, заданного равенством (26) при $|\theta| = 1$, и закона $L$, заданного равенством (32) при $|\theta| > 1$.

1. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Phillips P. C. B.* Time series regression with unit root // Econometrica. – 1987. – **55**. – P. 277–301.
3. *Phillips P. C. B.* Partially identified econometric models // Econometric Theory. – 1989. – **5**. – P. 181–240.
4. *Basawa I. V., Koul H. L.* Asymptotic tests of composite hypotheses for non-ergodic type stochastic processes // Stoch. Proc. Appl. – 1979. – **9**. – P. 291–305.
5. *Basawa I. V., Brockwell P. J.* Asymptotic conditional inference for regular nonergodic models with an application to autoregressive processes // Ann. Statist. – 1984. – **24**, № 1. – P. 161–171.
6. *Phillips P. C. B.* Towards a unified asymptotic theory for autoregression // Biometrika. – 1987. – **74**, № 3. – P. 535–547.

Получено 10.04.95