УДК 517.9

**В. Е. Слюсарчук** (Укр. гос. акад. водн. хоз-ва)

# ТЕОРЕМЫ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

We study the problem of instability of solutions of differential equations with stationary linear part and nonstationary nonlinear compact part in a Banach space.

Вивчається нестійкість розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі із стаціонарною лінійною частиною і нестаціонарною нелінійною компактною частиною.

Данная статья дополняет исследования Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [1], Д. Хенри [2], а также автора [3 – 13] по теории неустойчивости движения динамических систем по первому приближению. В п. 1 приведены известные утверждения о неустойчивости по первому приближению. Во втором пункте рассматривается теорема о предельной точке аппроксимативного спектра линейного непрерывного оператора, лежащая в основе метода исследования неустойчивости решений уравнений с компактными нелинейностями. Эти уравнения изучаются в п. 3.

**1. Теоремы о неустойчивости по первому приближению.** Пусть $E$ — бесконечномерное комплексное банахово пространство, $A: E \to E$ — линейный непрерывный оператор, а $F(t, x)$ — непрерывная на $[0, +\infty) \times E$ $E$-значная функция.

В монографии [1] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если*

$$\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \varnothing \tag{1}$$

*и*

$$\sup_{t \geq 0} \| F(x, t) \| = O(\|x\|^p) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{2}$$

*где* $p = \text{const} > 1$, *то нулевое решение уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t, x) \tag{3}$$

*неустойчиво.*

Равносильное утверждение устанавливается и в монографии [2].

Предполагается, что уравнение (3) для каждого $x_0 \in E$ имеет по крайней мере одно решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$.

Выполнение соотношения (2) не является необходимым условием для неустойчивости нулевого решения уравнения (3), когда $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \varnothing$. В работах [6 – 8] показано, что в теореме 1 можно ослабить требования на функцию $F(t, x)$, а именно: справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2** [6, 7]. *Пусть*:

1) $\alpha + \beta i \in \sigma(A)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *и* $\sigma(A) \cap \{\lambda: \operatorname{Re}\lambda > \alpha\} = \varnothing$;

2) $\sup\limits_{t \geq 0} \| F(x, t) \| \leq q(\|x\|) \|x\|$ *при* $\|x\| \leq 1$, *где* $q(y)$ — *непрерывная на* $[0, 1]$ *функция*;

3) $\overline{\lim\limits_{\gamma \to +0}} \displaystyle\int_0^\gamma f\left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\gamma}{y}\right) \frac{q(y)}{y} dy < \frac{\alpha}{2}$, *где* $f(t)$ — *непрерывная на* $[0, +\infty)$ *функция и* $\|e^{tA}\| e^{-\alpha t} \leq f(t)$ $\forall t \geq 0$.

*Тогда нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

**Теорема 3** [8]. *Пусть*:

1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|e^{tA}\right\| = +\infty;$

2) $\sup\limits_{t\geq 0}\|F(x,t)\| \leq q(\|x\|)\|x\| \quad \forall x\in\{x\colon \|x\|\leq 1\},$ *где* $q(y)$ — *непрерывная монотонная на* $[0,1]$ *функция и* $q(0)=0;$

3) *существует число* $\gamma\in(0,1]$ *такое, что*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\int_0^t \left\|e^{(t-\tau)A}\right\|\frac{\left\|e^{\tau A}\right\|}{\left\|e^{tA}\right\|}q\left(\gamma\frac{\left\|e^{\tau A}\right\|}{\max\limits_{s\in[0,t]}\left\|e^{sA}\right\|}\right)d\tau < \frac{1}{2}.$$

*Тогда нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

***Следствие* 1.** *Если для* $A$ *выполняется соотношение* (1), $\sup\limits_{t\geq 0}\|F(x,t)\|\leq$ $\leq S(\|x\|)$ *при* $\|x\|\leq 1$, *где* $S(y)$ — *непрерывная монотонная на* $[0,1]$ *функция, и интеграл* $\int_0^{+\infty}\left\|e^{tA}\right\|S\left(\left(r(e^A)\right)^{-t}\right)dt$ *сходится* ($r(e^A)$ — *спектральный радиус оператора* $e^A$), *то нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

***Следствие* 2.** *Пусть*:

1) *выполняется первое и второе условия теоремы* 2;

2) $\left\|e^{tA}\right\|\leq Ne^{\alpha t} \quad \forall t\geq 0,$ *где* $N$ — *постоянная*;

3) $\int\limits_0^1 \frac{q(y)}{y}dy < +\infty.$

*Тогда нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

Заметим, что функции $q(y)$ и $S(y)$ могут быть такими, что

$$\lim_{y\to+0}\frac{y^p}{S(y)} = 0 \quad \forall p>0,$$

$$\lim_{y\to+0}\frac{y^p}{q(y)} = 0 \quad \forall p>0,$$

а теорема 2 и следствие 1 являются усилениями теоремы 1, доказанной Ю. Л. Далецким.

Заменить в теореме 1 соотношение (2) на соотношение

$$\sup_{t\geq 0}\|F(x,t)\| \leq o(\|x\|) \quad \text{при} \quad x\to 0 \tag{4}$$

нельзя. В [6, 8] показано, что выполнение соотношений (1) и (4) не обеспечивает неустойчивость нулевого решения уравнения (3) (нулевое решение в этом случае может быть даже асимптотически устойчивым).

В случае автономного уравнения (3) (когда $F(t,x)=F(0,x)$ для каждого $t\geq 0$ и $x\in E$) соотношения (1) и (4) также не гарантируют неустойчивость нулевого решения уравнения (3). В работе [10] построен пример уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x),$$

в котором оператор $A$ удовлетворяет соотношению (1), $F$ — непрерывный нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица на $E$,

$$\| F(x) \| = o(\| x \|) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

и нулевое решение устойчиво (по Ляпунову), а в работе [13] построен аналогичный пример уравнения, нулевое решение которого асимптотически устойчиво, причем отображение $F: E \to E$ может быть даже $C^1$-отображением.

В заключение этого пункта приведем еще одно утверждение о неустойчивости решения уравнения (3), которое потребуется в дальнейшем.

**Теорема 4.** *Пусть*: 1) $\sigma(A) \cap \{\lambda: \operatorname{Re}\lambda > \alpha\} \neq \varnothing$, $\sigma(A) \cap \{\lambda: \operatorname{Re}\lambda = \alpha\} = \varnothing$ $(\alpha \geq 0)$; 2) $\| F(t, x) \| \leq q \| x \|$ *для всех* $t \geq 0$ *и* $x \in \{ y \in E: \| y \| < r\}$, *где* $q$ *и* $r$ — *положительные постоянные. Тогда нулевое решение уравнения* (3) *для всех достаточно малых* $q$ *неустойчиво*.

Это утверждение в случае $\alpha = 0$ рассмотрено в [1], а в случае $\alpha > 0$ — в [3].

**2. Теорема о предельной точке аппроксимативного спектра.** Основным объектом исследования в статье является задача о неустойчивости нулевого решения уравнения (3) в случае, когда отображение $F: [0, +\infty) \times E \to E$ вполне непрерывно и для оператора $A$ выполняется соотношение (1). Чтобы перейти к решению этой задачи, рассмотрим сначала одно свойство предельных точек аппроксимативного спектра оператора $A$.

Напомним, что аппроксимативным спектром линейного непрерывного оператора $A: E \to E$ называется множество $\sigma_a(A)$, состоящее из точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для каждой из которых существует такая последовательность $\{x_n\}$ векторов $x_n \in E$, $n \geq 1$, не стремящаяся к нулю, для которой $Ax_n - \lambda x_n \to 0$. Частью этого спектра является дискретный спектр $\sigma_d(A)$, состоящий из точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$. Частью аппроксимативного спектра является также топологическая граница спектра оператора.

Рассмотрим два вспомогательных утверждения, которые представляют и самостоятельный интерес.

**Лемма 1.** *Пусть* $X$ *и* $Y$ — *банаховы пространства*, $\dim X = \infty$ *и* $B_p: X \to Y$, $p = \overline{1, m}$, — *линейные вполне непрерывные операторы. Тогда существует последовательность* $\{x_n\}$ *нормированных векторов* $x_n \in X$ $(n \geq 1)$, *не содержащая сходящейся подпоследовательности и такая, что*

$$\lim_{n \to \infty} \| B_p x_n \| = 0, \quad p = \overline{1, m}.$$

*Доказательство.* Пусть $X_1$ — сепарабельное бесконечномерное подпространство пространства $X$. Найдутся полная минимальная система $\{e_n\}$ нормированных векторов $e_n \in X_1$, $n \geq 1$, и соответствующая ей сопряженная система $\{f_n\}$ линейных функционалов $f_n \in X_1'$, $n \geq 1$, что $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера), образующая тотальное множество, т. е. из $f_k(x) = 0$, $x \in X_1$, $k = 1, 2, \ldots$, следует $x = 0$ [14, 15]. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $B: X_1 \to X_1$, определенный равенством

$$By = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(y)}{k^2 \| f_k \|} e_k.$$

Очевидно, что векторы $e_k$, $k \geq 1$, являются собственными векторами, а числа $1/(k^2 \| f_k \|)$, $k \geq 1$, — соответствующими собственными значениями оператора $B$, и

$$\lim_{n \to \infty} Be_n = 0. \tag{5}$$

Поэтому $0 \in \sigma_a(B)$. Если $x \in \operatorname{Ker} B$, то $f_k(Bx) = f_k(x)/(k^2 \| f_k \|) = 0$ для всех $k \geq 1$ и, следовательно, $x = 0$. Поэтому $0 \in \sigma_a(B) \setminus \sigma_d(B)$.

Последовательность $\{e_n\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности, иначе согласно (5) число 0 будет собственным значением оператора $B$. Поэтому

$$\inf_{p \geq r \geq 1} \left\| e_{n_p} - e_{n_r} \right\| > 0 \tag{6}$$

для некоторой подпоследовательности $\{n_p\}$ натуральных чисел $n_p$, $p \geq 1$.

Рассмотрим оператор $C\colon X \to Y^m$, определенный равенством

$$Cx = (B_1 x, B_2 x, \ldots, B_m x).$$

Этот оператор, очевидно, является линейным вполне непрерывным оператором. Поэтому найдется последовательность $\left\{ n_{p_q} \right\}$ натуральных чисел $n_{p_q}$, $q \geq 1$, для которой $n_{p_1} < n_{p_2} < n_{p_3} < \ldots$, такая, что последовательность $\left\{ Ce_{n_{p_q}} \right\}$ будет сходящейся (предел $\lim\limits_{q \to \infty} Ce_{n_{p_q}}$ может не равняться нулевому элементу пространства $Y^m$). Тогда

$$\lim_{q \to \infty} C\Delta e_{n_{p_q}} = (0, 0, \ldots, 0),$$

где $\Delta e_{n_{p_q}} = e_{n_{p_{q+1}}} - e_{n_{p_q}}$. Согласно (5)

$$\inf_{q \geq 1} \left\| \Delta e_{n_{p_q}} \right\| > 0.$$

Последнее соотношение позволяет рассмотреть последовательность $\{x_q\}$ нормированных векторов $x_q = \left\| \Delta e_{n_{p_q}} \right\|^{-1} \Delta e_{n_{p_q}}$, $q \geq 1$. Для этой последовательности, очевидно, выполняются соотношения

$$\lim_{q \to \infty} Bx_q = 0,$$

$$\lim_{q \to \infty} Cx_q = (0, 0, \ldots, 0)$$

и эта последовательность не содержит сходящейся подпоследовательности, иначе число 0 будет собственным значением оператора $B$. Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $X$, $Y$ и $Z$ — банаховы пространства, $Y \subset X$, $\dim Y = \infty$, $B\colon Y \to Y$ — линейный непрерывный оператор и $B_p\colon X \to Z$, $p = \overline{1, m}$, — линейные вполне непрерывные операторы. Тогда для каждого $\lambda \in \sigma_a(B) \setminus \sigma_d(B)$ существует последовательность $\{y_n\}$ нормированных векторов $y_n \in Y$, $n \geq 1$, не содержащая сходящейся подпоследовательности и такая, что*

$$\lim_{n \to \infty} \| By_n - \lambda y_n \| = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| B_p y_n \right\| = 0, \quad p = \overline{1, m}.$$

***Доказательство.*** Поскольку $\lambda \in \sigma_a(B) \setminus \sigma_d(B)$, то существует последовательность $\{e_n\}$ нормированных векторов $e_n \in Y$, $n \ge 1$, не содержащая сходящейся подпоследовательности, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|Be_n - \lambda e_n\| = 0.$$

Как и при доказательстве леммы 1, выделяем подпоследовательность $\{e_{n_q}\}$, для которой

$$\inf_{q\ge 1} \|\Delta e_{n_q}\| > 0$$

и

$$\lim_{q\to\infty} (B_1\Delta e_{n_q}, B_2\Delta e_{n_q}, \dots, B_m\Delta e_{n_q}) = (0, 0, \dots, 0).$$

Тогда $\{y_q\}$ $(y_q = \|e_{n_q}\|^{-1} e_{n_q})$ — последовательность с требуемыми свойствами.

Основным в этом пункте является следующее утверждение.

**Теорема 5.** *Пусть $\lambda$ — предельная точка аппроксимативного спектра линейного непрерывного оператора $A$, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве $E$, и $B_p$, $p = \overline{1, m}$, — линейные вполне непрерывные операторы, действующие в этом же пространстве $E$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ нормированных векторов $x_n \in E$, $n \ge 1$, не содержащая сходящейся подпоследовательности и такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \|B_p x_n\| = 0, \quad p = \overline{1, m}.$$

***Доказательство.*** Если $\lambda \in \sigma_a(A) \setminus \sigma_d(A)$, то утверждение теоремы справедливо на основании леммы 2.

Пусть $\lambda \in \sigma_d(A)$ и $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = \infty$. Тогда утверждение теоремы также справедливо на основании леммы 1 ( в качестве $X$ и $Y$ следует взять $E$, а в качестве $X_1$ — сепарабельное подпространство пространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$).

Пусть $\lambda \in \sigma_d(A)$ и $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) < \infty$. Покажем, что

$$\operatorname{Im}(A - \lambda I) \ne \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)}. \tag{7}$$

Предположим, что это соотношение не выполняется, т. е.

$$\operatorname{Im}(A - \lambda I) = \overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)}. \tag{8}$$

Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ различных точек $\lambda_n \in \sigma_d(A)$, $n \ge 1$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda.$$

Тогда

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_n I) \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \tag{9}$$

для всех достаточно больших $n$. Действительно, поскольку $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < < \infty$, то подпространство $E_1 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ дополняемо в $E$ (см. [16, с. 120]), т. е. существует подпространство $E_2 \subset E$ такое, что пространство $E$ является прямой суммой подпространств $E_1$ и $E_2$: $E = E_1 \oplus E_2$.

Обозначим через $D$ сужение оператора $A-\lambda I$ на подпространство $E_2$. Оператор $D$ отображает $E_2$ на $\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ и имеет ограниченный обратный, т. е.

$$\|x\| \le a\|Dx\|, \quad x\in E_2,$$

для некоторого числа $a>0$. Тогда при

$$a|\lambda-\lambda_n| < 1 \tag{10}$$

уравнение

$$(D+(\lambda-\lambda_n)I)x = y$$

корректно разрешимо, т. е. оператор $D+(\lambda-\lambda_n)I\colon E_2\to\operatorname{Im}(A-\lambda I)$ имеет ограниченный обратный и, следовательно, нормально разрешим. Оператор $A-$ $-\lambda_n I$, если выполняется соотношение (10), получается из оператора $D+$ $+(\lambda-\lambda_n)I$ расширением на конечное число $\dim E_1$ измерений. При этом размерность $\operatorname{Ker}(A-\lambda_n I)$ не возрастает больше, чем на $\dim E_1$, и $\operatorname{Ker}(A-\lambda_n I)$ пересекается с подпространством $E_2$ лишь в нуле. Отсюда следует, что выполняется соотношение (9) и

$$\operatorname{Im}(A-\lambda_n I) = \overline{\operatorname{Im}(A-\lambda_n I)} \tag{11}$$

для всех достаточно больших $n$.

Очевидно, что $\operatorname{Ker}(A-\lambda_n I)\ne\{0\}$ для бесконечного числа значений $n$ или $\operatorname{Ker}(A-\lambda_n I)=\{0\}$ для всех достаточно больших $n$. Первый случай невозможен в силу линейной независимости собственных векторов оператора $A$, которые соответствуют различным собственным значениям, соотношения (9) и конечномерности $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Второй случай в силу (11) также невозможен, поскольку тогда $\lambda_n\notin\sigma_d(A)$ для всех достаточно больших $n$, что противоречит определению последовательности $\{\lambda_n\}$.

Итак, предположение о выполнении соотношения (8) ложно.

Из (7) следует

$$\inf_{\|x\|=1,\, x\in E_2}\|(A-\lambda I)x\| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\|(A-\lambda I)x_n\| = 0 \tag{12}$$

для некоторой последовательности $\{x_n\}$ нормированных векторов $x_n\in E_2$, $n\ge 1$. Эта последовательность не содержит сходящейся подпоследовательности, поскольку в противном случае $E_1\cap E_2\ne\{0\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\inf_{p>q}\|x_p-x_q\| = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим такую подпоследовательность $\{n_k\}$ последовательности натуральных чисел, чтобы последовательности $\{B_1x_{n_k}\}$, $\{B_2x_{n_k}\}, \ldots, \{B_mx_{n_k}\}$ были сходящимися. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} B_p\Delta x_{n_k} = 0, \quad p=\overline{1,m},$$

где $\Delta x_{n_k} = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, и, следовательно (на основании (13)),

$$\lim_{k\to\infty} B_p \left\|\Delta x_{n_k}\right\|^{-1} \Delta x_{n_k} = 0, \quad p = \overline{1, m}. \tag{14}$$

Для последовательности нормированных векторов $y_k = \left\|\Delta x_{n_k}\right\|^{-1} \Delta x_{n_k}$, $k \geq 1$, на основании (12) будет выполняться также соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \|(A - \lambda I) y_k\| = 0.$$

Отсюда и из соотношения (14) следует утверждение теоремы, поскольку последовательность $\{y_k\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности ( в противном случае некоторый ненулевой вектор $a \in E_2$ будет собственным вектором оператора $A$).

Теорема 5 доказана.

***Замечание.*** В утверждениях, приведенных в данном пункте, конечное множество $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ линейных вполне непрерывных операторов можно заменить относительно компактным множеством вполне непрерывных операторов.

**3. Теоремы о неустойчивости решений уравнения (3) с компактным $F$.** Исследуем уравнение (3) в предположении, что отображение $F: [0, +\infty) \times \times E \to E$ вполне непрерывно.

Пусть $C$ — множество всех линейных вполне непрерывных операторов $B: E \to E$, $\mathcal{K}$ — множество всех непрерывных на $[0, +\infty)$ оператор-функций $K(t)$ со значениями в $C$, $\mathcal{F}$ — множество всех таких непрерывных отображений $F: [0, +\infty) \times E \to E$, для каждого из которых найдется функция $K(t) \in \mathcal{K}$ такая, что

$$\|F(t, x)\| \leq \|K(t)x\| \tag{15}$$

для всех $(t, x) \in [0, +\infty) \times S_r$, где $S_r = \{x \in E: \|x\| \leq r\}$ $(r > 0)$; $\mathcal{F}_q$ — множество всех отображений $F \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|F(t, x)\| \leq q\|x\|$$

для всех $(t, x) \in [0, +\infty) \times S_r$ $(r > 0)$.

Обозначим через $M^d$ множество всех предельных точек множества $M$.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** *Если* $(\sigma_a(A))^d \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\} \neq \varnothing$, *то для каждого* $F \in \mathcal{F}$ *нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

***Доказательство.*** Пусть $\lambda \in (\sigma_a(A))^d \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$, $\varepsilon$ — произвольный элемент интервала $(0, r/2)$ и $T(\varepsilon)$ — такое число, что

$$\left|e^{\lambda T(\varepsilon)}\right| \varepsilon = \frac{r}{2}. \tag{16}$$

Рассмотрим произвольное число $\delta > 0$, удовлетворяющее условию

$$\delta \varepsilon T(\varepsilon) \exp\left\{\|A\| T(\varepsilon) + e^{\|A\| T(\varepsilon)} \int_0^{T(\varepsilon)} \|K(s)\| ds\right\} \leq \frac{r}{8}. \tag{17}$$

Отображению $F \in \mathcal{F}$ соответствует функция $K(t) \in \mathcal{K}$, для которой выполняется соотношение (15). Эта функция равномерно непрерывна на отрезке $[0, T(\varepsilon)]$. Поэтому найдется число $\gamma > 0$ такое, что $\|K(t) - K(\tau)\| < \delta$, если $t, \tau \in$

$\in [0, T(\varepsilon)]$ и $|t-\tau|<\gamma$. Пусть $\{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ — подмножество отрезка $[0, T(\varepsilon)]$ такое, что каждому $t \in [0, T(\varepsilon)]$ соответствует по крайней мере одно $\tau \in \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$, что $|t-\tau|<\gamma$. Согласно теореме 4 найдется последовательность $\{x_n\}$ нормированных векторов $x_n \in E$, $n \geq 1$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|K(t_l)x_n\| = 0, \quad l = \overline{1, p}, \tag{18}$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\le t\le T(\varepsilon)} \|K(t)x_n\| \leq \delta. \tag{19}$$

Из соотношения (18) следует

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T(\varepsilon)} \left\|e^{At}x_n - e^{\lambda t}x_n\right\| = 0, \tag{20}$$

поскольку

$$e^{At} - e^{\lambda t}I = e^{\lambda t}\left(e^{(A-\lambda t)} - I\right) = e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{(A-\lambda I)\tau}\,d\tau\right)(A-\lambda I)$$

и

$$\left\|e^{At}x_n - e^{\lambda t}x_n\right\| \leq e^{\alpha t}\int_0^t \left\|e^{(A-\lambda I)\tau}\right\|d\tau\,\|(A-\lambda I)x_n\|.$$

Пусть $y_n(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $y_n(0) = \varepsilon x_n$. Тогда

$$y_n(t) = \varepsilon e^{At}x_n + \int_0^t e^{A(t-s)}F(s, y_n(s))\,ds. \tag{21}$$

Положим $z_n(t) = y_n(t) - \varepsilon e^{\lambda t}x_n$. Согласно (21)

$$z_n(t) = \varepsilon\left(e^{At} - e^{\lambda t}I\right)x_n + \int_0^t e^{A(t-s)}F\left(s, \varepsilon e^{\lambda s}x_n + z_n(s)\right)ds.$$

В силу непрерывности $y_n(t)$ на некотором отрезке $[0, T_1]$, $0 < T_1 \leq T(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$\|z_n(t)\| \leq \frac{r}{4}.$$

Поэтому на основании (16)

$$\|y_n(t)\| \leq \frac{3}{4}r, \quad t \in [0, T_1]. \tag{22}$$

Тогда для всех $t \in [0, T_1]$ для $F(t, y_n(t))$ справедлива оценка $\|F(t, y_n(t))\| \leq \|K(t)y_n(t)\|$ и

$$\|z_n(t)\| \leq \varepsilon\left\|e^{At}x_n - e^{\lambda t}x_n\right\| + \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\|K(s)(\varepsilon e^{\lambda s}x_n + z_n(s))\|\,ds \leq$$

$$\leq \varepsilon\left( \left\| e^{At}x_n - e^{\lambda t}x_n \right\| + \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\left|e^{\lambda s}\right| \| K(s)x_n \| ds \right) +$$

$$+ e^{\|A\|T(\varepsilon)} \int_0^t \| K(s) \| \| z_n(s) \| ds \leq$$

$$\leq \varepsilon\gamma_n + e^{\|A\|T(\varepsilon)} \int_0^t \| K(s) \| \| z_n(s) \| ds,$$

где

$$\gamma_n = \sup_{0 \leq t \leq T(\varepsilon)} \left\| e^{tA}x_n - e^{\lambda t}x_n \right\| + e^{\|A\|T(\varepsilon)} T(\varepsilon) \sup_{0 \leq s \leq T(\varepsilon)} \| K(s)x_n \|.$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла – Беллмана [17, с. 108]

$$\| z_n(t) \| \leq \varepsilon\gamma_n \exp\left\{ \exp\left\{ \|A\| T(\varepsilon) \int_0^t \|K(s)\| ds \right\} \right\}, \quad t \in [0, T_1].$$

Заметим, что в силу соотношений (19) и (20)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \gamma_n \in \left[0, T(\varepsilon)\delta\, e^{\|A\|T(\varepsilon)}\right].$$

Поэтому найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\gamma_{n_0} \leq 2T(\varepsilon)\delta\, e^{\|A\|T(\varepsilon)}$$

и

$$\| z_{n_0}(t) \| \leq 2\varepsilon T(\varepsilon)\delta \exp\left\{ \|A\| T(\varepsilon) + e^{\|A\|T(\varepsilon)} \int_0^{T(\varepsilon)} \|K(s)\| ds \right\}$$

для всех $t \in [0, T_1]$. Отсюда с учетом (17) приходим к выводу, что соотношение (22) при $n = n_0$ выполняется и для $T_1 = T(\varepsilon)$. Тогда

$$\left\| y_{n_0}(T(\varepsilon)) \right\| = \left\| \varepsilon e^{\lambda T(\varepsilon)} x_{n_0} + z_{n_0}(T(\varepsilon)) \right\| \geq$$

$$\geq \left\| \varepsilon e^{\lambda T(\varepsilon)} x_{n_0} \right\| - \left\| z_{n_0}(T(\varepsilon)) \right\| \geq$$

$$\geq \varepsilon \left| e^{\lambda T(\varepsilon)} \right| - \frac{r}{4} = \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4}.$$

Из этой оценки следует неустойчивость нулевого решения уравнения (3), поскольку $\varepsilon = \left\| y_{n_0}(0) \right\|$ можно взять произвольно малым и все-таки найдется значение $T(\varepsilon)$, при котором

$$\left\| y_{n_0}(T(\varepsilon)) \right\| \geq \frac{r}{4}.$$

Теорема 6 доказана.

Аналогично устанавливается следующая теорема.

**Теорема 7.** *Если существует такая точка* $\mu \in \sigma(A) \cap \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, *что* $\dim \operatorname{Ker}(A - \mu I) = \infty$, *то для каждого* $F \in \mathcal{F}$ *нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

При доказательстве этой теоремы нужно воспользоваться не теоремой 5, а леммой 1, где в качестве $X$ следует рассматривать $\operatorname{Ker}(A-\mu I)$.

Следствием теорем 5 и 6 является следующая теорема.

**Теорема 8.** *Пусть* $\sigma(A) \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\} \neq \varnothing$. *Тогда найдется число* $q > 0$, *что для каждого* $F \in \mathcal{F}_q$ *нулевое решение уравнения* (3) *неустойчиво.*

Действительно, если $(\sigma_a(A))^d \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\} = \varnothing$, то существует точка $\lambda \in \sigma(A) \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ такая, что $\sigma(A) \cap \{z: \operatorname{Re} z = \gamma\} = \varnothing$ для некоторого $\gamma \in (0, \operatorname{Re}\lambda)$, и утверждение теоремы справедливо на основании теоремы 4; если же $(\sigma(A))^d \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\} \neq \varnothing$, то $(\sigma_a(A))^d \cap \{z: \operatorname{Re} z > 0\} \neq \varnothing$ и утверждение теоремы также справедливо на основании теоремы 6.


1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
2. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. *Слюсарчук В. Е.* Разностные уравнения в функциональных пространствах // Дополнение II монографии Д. И. Мартынюка „Лекции по качественной теории разностных уравнений". – Киев: Наук. думка, 1972. – С. 197–222.
4. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу о неустойчивости по первому приближению // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 5. – С. 721–723.
5. *Слюсарчук В. Е.* О неустойчивости систем по первому приближению // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 4. – С. 760–761.
6. *Слюсарчук В. Е.* К теории устойчивости систем по первому приближению // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1981. – № 9. – С. 27–30.
7. *Слюсарчук В. Е.* Одно утверждение о неустойчивости по первому приближению // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 2. – С. 241–244.
8. *Слюсарчук В. Е.* Некоторые дополнения к теории устойчивости систем по первому приближению // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 4. – С. 595–603.
9. *Слюсарчук В. Е.* Новые теоремы о неустойчивости разностных систем по первому приближению // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 5. – С. 906–908.
10. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости дифференциальных уравнений по первому приближению // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 1. – С. 72–77.
11. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости разностных уравнений по первому приближению // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 722–723.
12. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения функциональных и функционально-дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Ровно, 1983. – 300 с.
13. *Слюсарчук В. Е.* К неустойчивости автономных систем по линейному приближению // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 112–114.
14. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, № 3. – С. 113–174.
15. *Функциональный* анализ / Под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
16. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 445 с.
17. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.


Получено 01.03.95