УДК 517.4944: 519.46

В. В. Третиник (Ин-т математики НАН України, Київ)

ПРИХОВАНІ СИМЕТРІЇ ДВОЧАСТИНКОВОГО РІВНЯННЯ ДІРАКА З ЛІНІЙНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

We investigate Lie and non-Lie symmetries of the two-particle Dirac equation with linear interaction in one space dimension. The integrals of motion and hidden parasupersymmetries are found. By using algebraic method and non-Lie symmetries, we obtain the energy spectra of the considered system.

Досліджено ліївські та неліївські симетрії двочастинкового рівняння Дірака з лінійною взаємодією в одному вимірі. Знайдено інтеграли руху та приховані парасуперсиметрії цього рівняння. Одержано енергетичний спектр даної системи з використанням алгебраїчного методу та неліївських симетрій.

Ефективним методом розв'язку рівнянь математичної фізики є теоретико-груповий підхід, фундамент якого заклав Софус Лі. Але добре відомо, що ці рівняння мають більш широку симетрію, ніж та, яку можна знайти у класичному підході Лі. Загальний метод знаходження неліївських симетрій лінійних та нелінійних рівнянь запропоновано в [1, 2].

Неліївський метод збагачує можливості у досліджені симетрій. Так, у роботах [3–7] знайдені приховані супер- та парасуперсиметрії важливих рівнянь теоретичної фізики. Цей підхід також дає змогу знаходити нові закони збереження та інтеграли руху [8, 9], які не пов'язані безпосередньо з геометричною симетрією заданої системи, та успішно використовувати їх для розв'язку рівнянь методом розділення змінних.

У даній роботі досліджуються ліївські та неліївські симетрії двочастинкового рівняння Дірака з лінійною взаємодією в одному вимірі, яке було запропоновано в [10]. У системі центру мас це рівняння має вигляд

$$L\psi \equiv (H-E)\psi =$$
$$= \left[(\alpha_1-\alpha_2)p+m(\beta_1+\beta_2)-\frac{im\omega}{2}(\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2)x-E\right]\psi = 0,$$

де p, x — відносний імпульс та координата системи;

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Для спрощення подальших обчислень за допомогою перетворення

$$\psi \to \psi' = \beta_2\psi, \quad L \to L' = \beta_2 L \beta_2$$

перейдемо до еквівалентного рівняння

$$L'\psi' \equiv \left(H-\frac{1}{2}E\right)\psi' \equiv \left(Q+\hat{\beta}_0 m-\frac{1}{2}E\right)\psi' = 0, \tag{1}$$

де

$$Q = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]p + \frac{im\omega x\hat{\beta}_1}{2}, \quad \hat{\beta}_a = \frac{1}{2}\left(\gamma_a^{(1)}+\gamma_a^{(2)}\right),$$

$$\gamma_0^{(i)} = \beta_i, \quad \gamma_1^{(i)} = \beta_i\alpha_i, \quad i=1,2, \ a=0,1.$$

Дослідимо симметрію рівняння (1). Використовуючи класичний метод Лі [11, 12], можна довести, що максимальна симетрія рівняння (1) визначається абелевою алгеброю, базисні елементи якої мають вигляд

$$\beta_1 = \left(1-\hat{\beta}_0^2\right)\left(1+\hat{\beta}_1^2\right)f(x), \qquad X_2 = \hat{\beta}_0^2 - \hat{\beta}_1\hat{\beta}_0^2\hat{\beta}_1, \tag{2}$$

де $f(x)$ — довільна функція.

Зауважимо, що рівняння (1) інваріантне відносно оператора дискретної симетрії — просторової інверсії $\psi'(x) \to \eta\psi'(-x)$, де $\eta = \hat{\beta}_0^2 - 1$.

Для знаходження інших неліївських симетрій проаналізуємо трилінійні співвідношення для операторів H та Q. Прямим обчисленням знаходимо

$$H^3 = (X_3 + m^2)H + \frac{m^2\omega}{2}X_2, \tag{3}$$

$$Q^3 = QX_3, \qquad X_3 = p^2 + \frac{m^2\omega^2x^2}{4} - m\omega\hat{\beta}_0, \tag{4}$$

де X_2 — ліївський оператор, визначений у (2). Оскільки X_3 комутує з $\hat{\beta}_0$, з (3), (4) випливає $[X_3, H] = 0$.

Крім того, неважко пересвідчитися, що $[X_2, X_3] = 0$.

Отже, X_3 є неліївським інтегралом руху рівняння (1).

Покажемо, що приховані парасуперсиметрії рівняння (1) генерують структуру, типову для парасуперсиметричної квантової механіки (ПССКМ).

Справді, оператори $Q_1 = Q$, $Q_2 = i\eta Q$, $H_{PSS} = X_3$ задовольняють співвідношення

$$[H_{PSS}, Q_A] = 0, \qquad A,\ B,\ C = 1, 2,$$

$$Q_A(\{Q_B, Q_C\} - 2\delta_{BC}H_{PSS}) + Q_B(\{Q_C, Q_A\} - 2\delta_{CA}H_{PSS}) +$$

$$+ Q_C(\{Q_A, Q_B\} - 2\delta_{AB}H_{PSS}) = 0,$$

що характеризують ПССКМ Рубакова–Спірідонова [13]. З іншого боку ці оператори задовольняють співвідношення

$$[H_{PSS}, Q_A] = 0, \qquad A,\ B,\ C = 1, 2,$$

$$[Q_A, [Q_B, Q_C]] = 4(\delta_{AB}Q_C - \delta_{AC}Q_B)H_{PSS},$$

що властиві ПССКМ Бекерса–Деберг [14].

Розв'яжемо задачу на власні значення гамільтоніана рівняння (1), використовуючи (3). Оскільки H, X_2 та X_3 — комутуючи оператори, для власних значень цих операторів одержуємо

$$E^3 = 4E\left[\omega m\left(n + \frac{1}{2}\right) - m\omega\varepsilon_1 + m^2\right] + 4m^2\omega\varepsilon_2$$

де ε_1, ε_2 — власні значення матриць $\hat{\beta}_0$ та $\left(\hat{\beta}_0^2 - \hat{\beta}_1\hat{\beta}_0^2\hat{\beta}_1\right)$.

Використовуючи нерелятивістське наближення, можна показати, що $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$. Отже,

$$E^2 = 4m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + 4m^2\left(1 + \frac{\omega}{E}\right),$$

що добре узгоджується з результатом роботи [10].

Таким чином, знайдені лiївські та нелiївські симетрії рівняння (1). Показано, що приховані парасуперсиметрії генерують алгебри ПССКМ. Нелiївські симетрії (парасуперсиметрії) дали змогу легко розв'язати задачу на власні значення, користуючись алгебраїчним методом.

Автор щиро вдячний А. Г. Нікітіну за постановку задачі та корисні поради під час виконання роботи.

1. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наук. думка, 1983. – 199 с.
2. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of equations of quantum mechanics. – New York: Allerton Press, 1994. – 460 p.
3. *Beckers J., Debergh N., Nikitin A. G.* More on supersymmetries of the Schrödinger equation // Mod. Phys. Lett. – 1992. – **A 7**, № 18. – P. 1609–1616.
4. *Beckers J., Debergh N., Nikitin A. G.* Lie extended symmetries and relativistic particles // J. Phys. – 1992. – **A 25**. – P. 6145–6154.
5. *Beckers J., Debergh N., Nikitin A. G.* More on parasupersymmetries of the Schrödinger equation // Mod. Phys. Lett. – 1992. – **A 8**, № 5. – P. 435–444.
6. *Beckers J., Debergh N., Nikitin A. G.* Extended Dirac symmetries and hidden supesymmetry // Phys. Lett. – 1992. – **B 279**. – P. 333–335.
7. *Beckers J., Debergh N., Nikitin A. G.* On supersymmetries in nonrelativistic quantum mechanics // J. Math. Phys. – 1992. – **33 (1)**. – P. 152–160.
8. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* The complete sets of conservations laws for the electromagnetic field // J. Phys. – 1992. – **A25**. – P. L231–L233.
9. *Никитин А. Г., Фущич В. И.* Нелиевские интегралы движения для частиц произвольного спина и для систем взаимодействующих частиц // Теорет. и мат. физика. – 1991. – **88,** № 3. – С. 405–415.
10. *Dominguez-Adame F., Mendez B. A.* Solvable two-body Dirac equation in the one space dimension // Can. J. Phys. – 1991. – **69.** – P. 780–785.
11. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
12. *Olver P.* Application of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986. – 496 p.
13. *Rubakov V. A., Spiridonov V. P.* Parasupersymmetric quantum mechanics // Mod. Phys. Lett. – 1988. – **3**, № 14. – P. 1337–1347.
13. *Beckers J.* Parastatistics and supersymmetry in quantum mechanics // Nucl. Phys. – 1990. – **B 340**. – P. 767–776.

Одержано 19.08.95