УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетр. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. I

For functions $f(x)$ representable by an integral operator of a special form, we investigate the behavior of second difference $\Delta_h^2 f(x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$, $h > 0$, depending on the location of a point x in the interval $[0, 1]$.

Досліджується поведінка другої різниці $\Delta_h^2 f(x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$, $h > 0$, в залежності від положення точки x на відрізку $[0, 1]$, функцій $f(x)$, які зображаються інтегральним оператором спеціального вигляду.

1. Введение. Рассмотрим класс функций f, определяемых на отрезке $[-1, 1]$ равенством

$$f(x) = \int_0^\pi K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где ядро

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma(r)}(\cos x - \cos t)_+^{r-1}\sin t - \left(D_r(t-x) + D_r(x+t)\right)\sin^r t,$$

$r \in (0, 1]$, $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, $(x-t)_+^{r-1}$ — усеченная степень, функция $\varphi(t)$ измерима и $|\varphi(t)| \le 1$ почти всюду, а

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}. \tag{2}$$

К изучению свойств функций вида (1) приводит задача о поточечном приближении функций, представимых на отрезке $[-1, 1]$ интегралами дробного порядка от ограниченных функций, алгебраическими многочленами.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Вторая разность любой функции $f(x)$, представимой равенством (1), удовлетворяет неравенству*

$$|\Delta_h^2 f(x)| \le C\begin{cases} h^{1+r}\sin^{r-1}x, & \text{если } \sin x \ge h, \\ h^{2r}, & \text{если } \sin x < h, \quad x \in [0, \pi], \end{cases} \tag{3}$$

где C — абсолютная константа.

Для доказательства теоремы нам необходимы некоторые вспомогательные определения и утверждения.

1. Положим для $t, u \in [0, \pi]$

$$\sin C(t,u) = \begin{cases} \sin t, & \text{если } t = u, \\ \dfrac{\cos t - \cos u}{u - t}, & \text{если } t \ne u. \end{cases}$$

Очевидны следующие свойства функции $\sin C(t, u)$:

а) $\sin t < \sin C(t,u) < \sin u$, если $0 < t < u \le \dfrac{\pi}{2}$, и соответственно $\sin t >$ $> \sin C(t,u) > \sin u$, если $\pi/2 < t < u \le \pi$;

© В. П. МОТОРНЫЙ, 1999

$$|\varphi(t,u)| \le M \quad \textit{и} \quad |\Delta_{t,h}\varphi(t,u)| \le M_1 h, \qquad h>0 \tag{7}$$

($\omega(t,h)$ — *функция типа модуля непрерывности*).

Тогда

$$\int_0^{\pi} |\Delta_{t,h}(g(t,u)\,\varphi(t,u))|\,du \;\le\; M_1 h \int_0^{\pi} |g(t,u)|\,du + MC\omega(t,h)\,. \tag{8}$$

Доказательство. Так как

$$|\Delta_{t,h}(g(t,u)\varphi(t,u))| \le |g(t,u)\varphi(t,u) - g(t,u)\varphi(t-h,u)| +$$

$$+ |g(t,u)\varphi(t-h,u) - g(t-h,u)\varphi(t-h,u)|,$$

то из условий (6) и (7) получаем (8). Лемма доказана.

***Замечание* 1.** Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а константы, зависящие от параметра r, — через C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

2. Доказательство теоремы. Докажем сначала неравенство

$$|\Delta_h^2 f(0)| \le C h^{2r}, \qquad 0 < h < \frac{\pi}{4}, \tag{9}$$

где C — некоторая абсолютная константа. Поскольку $f(x)$ — четная функция, а $|\varphi(t)| \le 1$ почти всюду, то

$$|\Delta_h^2 f(0)| = 2\left|\int_0^{\pi}\left\{\left[\frac{1}{\Gamma(r)}(\cos x - \cos t)_+^{r-1} - \frac{1}{\Gamma(r)}(1-\cos t)_+^{r-1}\right]\sin t \;+\right.\right.$$

$$\left.\left. + \;[2D_r(t) - D_r(t+h) - D_r(t-h)]\sin^r t\right\}\varphi(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{2}{\Gamma(r)}\int_0^{\pi} |(\cos h - \cos t)_+^{r-1} - (1-\cos t)_+^{r-1}|\sin t\,dt \;+$$

$$+\; 2\int_0^{\pi} |\Delta_h^2 D_r(t)|\sin^r t\,dt \;:=\; 2I_1 + 2I_2.$$

Оценим интеграл I_1:

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{h}(1-\cos t)_+^{r-1}\sin t\,dt \;+$$

$$+\; \frac{1}{\Gamma(r)}\int_h^{\pi}[(\cos h - \cos t)_+^{r-1} - (1-\cos t)_+^{r-1}]\sin t\,dt \;<\; \frac{2h^{2r}}{\Gamma(r+1)}. \tag{10}$$

Чтобы оценить интеграл I_2, воспользуемся равенством [1, с. 133]

$$D_r(t) = \frac{t_+^{r-1}}{\Gamma(r)} + G_r(t), \tag{11}$$

где $G_r(t)$ — аналитическая на полуинтервале $(-2\pi, 2\pi]$ функция, имеющая ограниченную на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ производную $|G_r^{(2)}(t)| \le M$. Поэтому

$$|\Delta_h^2 G_r(t)| \le M h^2, \quad t \in [0, \pi], \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tag{12}$$

что позволяет дать следующую оценку интеграла I_2:

$$I_2 \le \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^h [2t^{r-1} - (t+h)^{r-1}] \sin^r t\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_h^\pi \Delta_h^2 t^{r-1} \sin^r t\, dt + \int_0^\pi |\Delta_h^2 G_r(t)| \sin^r t\, dt \le$$

$$\le \frac{2\sin^r h}{\Gamma(r+1)} h^r + \pi M h^2 + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_h^2 t_+^{r-1} \sin^r |t|\, dt - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-h}^{h} \Delta_h^2 t_+^{r-1} \sin^r |t|\, dt <$$

$$< C h^{2r} + \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_h^2 D_r(t) \sin^r |t|\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_h^2 G_r(t) \sin^r |t|\, dt -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-h}^{h} [(t+h)_+^{r-1} - 2t_+^{r-1}] \sin^r |t|\, dt. \tag{13}$$

Очевидно, что третий интеграл не превышает $C_r h^{2r}$, а второй, в силу неравенства (12), не превышает $\pi M h^2$. Чтобы оценить первый интеграл, заметим, что функция

$$u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_r(t-x) \sin^r |t|\, dt$$

есть r-й периодический интеграл от 2π-периодической функции, равной на отрезке $[-\pi, \pi]$ $\sin^r |t| - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^r t\, dt$ и удовлетворяющей условию Липшица порядка r. Поэтому

$$|\Delta_h^2 u(x)| \le C h^{2r},$$

где C — некоторая абсолютная константа. Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_h^2 D_r(t) \sin^r |t|\, dt = \Delta_h^2 u(0),$$

первый интеграл в неравенстве (13) не превышает $C h^{2r}$. Из оценок (10) и (13) следует (9).

Аналогично доказывается неравенство

$$|\Delta_h^2 f(\pi)| \le C h^{2r}, \quad 0 < h < \frac{\pi}{4}, \tag{14}$$

где C — некоторая константа. Из неравенств (9) и (14) следует оценка второй разности с шагом h для $x \in [0, 2h]$ или $x \in [\pi - 2h, \pi]$:

$$|\Delta_h^2 f(x)| \le C h^{2r}, \quad 0 < h < \frac{\pi}{4}, \tag{15}$$

естественно, с несколько иной, чем в (9) или (14), константой C. Из оценки (15) для указанных x и h нетрудно получить неравенство

$$|\Delta_h^2 f(x)| \le 2^{1-r} C h^{1+r} \sin^{r-1} x, \quad 0 < h < \frac{\pi}{4}. \tag{16}$$

Докажем неравенство (16) для $x \in [2h, \pi - 2h]$. Для этого, использовав равенство (11), представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x),$$

где

$$\psi_1(x) = -\int_0^\pi (G_r(t-x) + G_r(t+x)) \sin^r t\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi (t+x)^{r-1} \sin^r t\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi [(\cos x - \cos t)_+^{r-1} \sin t - (t-x)_+^{r-1} \sin^r t]\, \varphi(t)\, dt.$$

В силу неравенства (12), для всех $x \in [0, \pi]$ и $h > 0$ следует оценка

$$|\Delta_h^2 \psi_1(x)| \le C h^2.$$

Оценим $\Delta_h^2 \psi_2(x)$. Пусть $2h \le x \le \dfrac{\pi}{2}$. Тогда, используя ограниченность функции $\varphi(t)$, выпуклость вниз функции t^{r-1} и представление второй разности от абсолютно непрерывной функции $g(t)$ в виде

$$\Delta_h^2 g(x) = \int_0^h [g'(x+u) - g'(x+u-h)]\, du, \tag{17}$$

получаем

$$|\Delta_h^2 \psi_2(x)| \le \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \Delta_{x,h}^2 (t+x)^{r-1} \sin^r t\, dt =$$

$$= \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \int_0^h \{(t+x+u-h)^{r-2} - (t+x+u)^{r-2}\} \sin^r t\, du\, dt.$$

Поменяв порядок интегрирования, для всех $u \in [0, h]$ будем иметь следующую оценку внутреннего интеграла:

$$\frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \{(t+x+u-h)^{r-2} - (t+x+u)^{r-2}\} \sin^r t\, dt =$$

$$= \frac{r}{\Gamma(r)} \int_0^\pi \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t \cos t\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(r)} \int_x^{\pi-x} \{(t+x+u-h)^{r-1} - (t+x+u)^{r-1}\} \sin^{r-1} t\, dt +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{\pi-x}^{\pi}\left\{(t+x+u-h)^{r-1}-(t+x+u)^{r-1}\right\}\sin^{r-1}t\,dt\ :=I_1+I_2+I_3.$$

Учитывая условие $2h \le x \le \pi/2$, нетрудно видеть, что

$$I_1 \le C_1 h x^{2r-2}, \quad I_2 \le C_2 h^r \sin^{r-1} x, \quad I_3 \le C_3 h x^r.$$

Из этих оценок следует, что для функции $\psi_2(t)$ выполняется неравенство (16), если $2h \le x \le \pi/2$. Так как функция $(t+x)^{r-1}$ имеет ограниченную вторую производную по переменной x для всех $t\in[0,\pi]$ и $x\in[\pi/4, 5\pi/4]$, то $|\Delta^2_{x,h}(t+x)^{r-1}| \le C h^2$, если $x \ge \pi/2$ и $h \in (0, \pi/4)$, и поэтому неравенство (16) имеет место и для $x \ge \pi/2$. Перейдем к оценке величины $\Delta_h^2\psi_3(x)$. Как и в случае функции $\psi_2(x)$, сначала получаем оценку

$$|\Delta_h^2\psi_3(x)| \le \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_0^{\pi}|\Delta^2_{x,h}K(x,t)|\,dt,$$

где $K(x,t)$ — разность

$$(\cos x - \cos t)_+^{r-1}\sin t - (t-x)_+^{r-1}\sin^r t.$$

Положим

$$p_1 = \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_0^{x+2h}|\Delta^2_{x,h}K(x,t)|\,dt,$$

$$p_2 = \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}|\Delta^2_{x,h}K(x,t)|\,dt$$

и оценим каждый интеграл. Чтобы оценить интеграл p_1, ядро $K(x,t)$ представим в виде

$$K(x,t) = (t-x)_+^{r-1}\sin^r t\left(\frac{\sin^{1-r}t}{\sin^{1-r}C(x,t)}-1\right)$$

и воспользуемся грубой оценкой для $\Delta^2_{x,h}K(x,t)$:

$$|\Delta^2_{x,h}K(x,t)| \le |K(x+h,t)| + |K(x-h,t)| + 2|K(x,t)|.$$

Тогда

$$p_1 \le \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{x-h}^{x+2h}(t-x+h)^{r-1}\sin^r t\left|\frac{\sin^{1-r}t}{\sin^{1-r}C(x-h,t)}-1\right|dt\ +$$

$$+\ 2\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{x}^{x+2h}(t-x)^{r-1}\sin^r t\left|\frac{\sin^{1-r}t}{\sin^{1-r}C(x,t)}-1\right|dt\ +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+h}^{x+2h}(t-x-h)^{r-1}\sin^r t\left|\frac{\sin^{1-r}t}{\sin^{1-r}C(x+h,t)}-1\right|dt\ := T_1+T_2+T_3.$$

Пусть $z(x,t) = \dfrac{\partial \sin C(x,t)}{\partial x}$ и $M_1 = \max\limits_{0\le t,x\le\pi}|z(x,t)|$. Воспользовавшись формулой Лагранжа, получим оценку разности $\dfrac{\sin^{1-r}t}{\sin^{1-r}C(x,t)}-1$:

$$\left|\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1\right| = \frac{|\sin^{1-r} C(t,t) - \sin^{1-r} C(x,t)|}{\sin^{1-r} C(x,t)} =$$

$$= (1-r)\frac{\sin^{-r} C(u,t)\,|z(u,t)|\,|t-x|}{\sin^{1-r} C(x,t)} \le$$

$$\le (1-r)\, M_1 \sin^{-r} C(u,t) \sin^{r-1} C(x,t)\,|t-x|, \qquad (18)$$

где u находится между точками x и t. Использовав оценку (18), неравенства $\sin C(u,t) > \frac{1}{2}\sin t$ и $\sin C(x-h,t) > \frac{1}{2}\sin(x-h)$, следующие из леммы 1, и условие $2h < x$, получим

$$T_1 \le \frac{(1-r)\,M_1}{\Gamma(r)} \int\limits_{x-h}^{x+2h} (t-x+h)^r \sin^r t \sin^{-r} C(u,t) \sin^{r-1} C(x-h,t)\,dt \le$$

$$\le 2\,\frac{3^{r+1}(1-r)\,M_1}{\Gamma(r)(r+1)}\, h^{r+1} \sin^{r-1}(x-h) \le C\,h^{r+1} \sin^{r-1} x.$$

Аналогично оцениваются интегралы T_2 и T_3. Таким образом,

$$p_1 \le C\,h^{r+1} \sin^{r-1} x. \qquad (19)$$

Чтобы оценить интеграл p_2, представим $\Delta^2_{x,h} K(x,t)$ по формуле (17):

$$\Delta^2_{x,h} K(x,t) = \int\limits_0^h \left[\frac{\partial K(x+u,t)}{\partial t} - \frac{\partial K(x+u-h,t)}{\partial t}\right] du.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$p_2 \le \int\limits_0^h \int\limits_{x+2h}^{\pi} |K'_x(x+u,t) - K'_x(x+u-h,t)|\,dt\,du,$$

где

$$K'_x(x,t) = \frac{r-1}{\Gamma(r)}(t-x)_+^{r-1} \sin t \sin^{r-2} C(x,t)\,\frac{\partial \sin C(x,t)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1-r}{\Gamma(r)}(t-x)_+^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1\right) := z_1(x,t) + z_2(x,t).$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\int\limits_{x+2h}^{\pi} |K'_x(x+u,t) - K'_x(x+u-h,t)|\,dt \le$$

$$\le \int\limits_{x+2h}^{\pi} |z_1(x+u,t) - z_1(x+u-h,t)|\,dt +$$

$$+ \int\limits_{x+2h}^{\pi} |z_2(x+u,t) - z_2(x+u-h,t)|\,dt := J_1 + J_2$$

и покажем, что интегралы J_1 и J_2 удовлетворяют неравенствам

$$J_1 \le C\sin^{r-1}x\,h^r \quad \text{и} \quad J_2 \le C\sin^{r-1}x\,h^r. \tag{20}$$

Поскольку частные производные $\dfrac{\partial \sin C(x,t)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 \sin C(x,t)}{\partial x^2}$ функции $\sin C(x,t)$ ограничены (см. свойство в), а

$$\frac{1-r}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}(t-x-u)_+^{r-1}\sin t\sin^{r-2}C(x+u,t)\,dt \le C\sin^{r-1}x, \tag{21}$$

то в силу леммы 2, чтобы оценить интеграл J_1, достаточно получить оценку (20) для интеграла

$$J^* = \frac{1-r}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}\left|\Delta_{x,h}\{(t-x-u)_+^{r-1}\sin t\sin^{r-2}C(x+u,t)\}\right|dt.$$

Очевидно, что

$$J^* \le \frac{1-r}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}\left|(t-x-u)_+^{r-1}-(t-x-u+h)_+^{r-1}\right|\sin t\sin^{r-2}C(x+u,t)\,dt\,+$$

$$+\,\frac{1-r}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}(t-x-u+h)_+^{r-1}\sin t\left|\sin^{r-2}C(x+u,t)-\sin^{r-2}C(x+u-h,t)\right|dt :=$$

$$:= A_1 + A_2.$$

В силу леммы 1 $\sin C(x+u,t) > \dfrac{1}{2}\sin t$ и $\sin C(x+u,t) > \dfrac{1}{2}\sin(x+u)$. Используя эти неравенства и условие на переменную x, получаем

$$A_1 \le \frac{2^{2-r}\sin^{r-1}(x+u)}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}\{(t-x-u)_+^{r-1}-(t-x-u+h)_+^{r-1}\}\,dt \le$$

$$\le 2^{3-2r}\frac{\sin^{r-1}x}{\Gamma(r+1)}h^r.$$

Для оценки интеграла A_2 воспользуемся неравенствами

$$\left|\sin^{r-2}C(x+u,t)-\sin^{r-2}C(x+u-h,t)\right| \le$$

$$\le (2-r)M_1 h\sin^{r-3}C(v,t),$$

где $v = v(t)\in[x+u-h,x+u]$, и $\sin C(v,t) > \dfrac{1}{2}\sin t$:

$$A_2 \le \frac{2M_1 h}{\Gamma(r)}\int\limits_{x+2h}^{\pi}(t-x-u+h)_+^{r-1}\sin^{r-2}C(v,t)\,dt. \tag{22}$$

Если $x+2h < \dfrac{\pi}{2}$, то снова используя неравенства $\sin C(v,t) > \dfrac{1}{2}\sin t > > \dfrac{1}{2}\sin x$ для $t\in\left[x+2h,\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\sin C(v,t) > \dfrac{2}{\pi}$ для $t \ge \dfrac{\pi}{2}$, из оценки (22) получаем

$$A_2 \le \frac{2^{3-r} M_1 h \sin^{r-1} x}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi/2} (t-x-u+h)_+^{r-1} \sin^{-1} t \, dt \; +$$

$$+ \; C_1 h \int_{\pi/2}^{\pi} (t-x-u+h)_+^{r-1} dt \le$$

$$\le C_2 h \sin^{r-1} x \int_{x+2h}^{\pi/2} (t-x-u+h)^{r-2} dt + C_3 h \le C h^r \sin^{r-1} x.$$

Пусть $\pi \ge x + 2h \ge \dfrac{\pi}{2}$. В этом случае, в силу леммы 1, $\sin C(v, t) > \dfrac{2}{\pi} \ge$ $\ge \dfrac{2}{\pi} \sin(x+h)$, если $v(t) \le \dfrac{\pi}{2}$, и $\sin C(v, t) > \dfrac{1}{2} \sin v > \dfrac{1}{2} \sin(x+h)$, если $v > \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$A_2 \le \frac{2^{3-r} M_1 h}{\Gamma(r)} \sin^{r-2}(x+h) \int_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-1} dt \le$$

$$\le C_4 h \sin^{2r-2} x \le C h^r \sin^{r-1} x.$$

Таким образом, интегралы A_1 и A_2 удовлетворяют неравенству (20). В силу леммы 2 из неравенства (21) следует, что для интеграла J_1 также выполняется неравенство (20). Оценим теперь J_2:

$$J_2 \le \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} \left| (t-x-u)^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u, t)} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \; (t-x-u+h)^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u-h, t)} - 1 \right) \right| dt \le$$

$$\le \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} \left| (t-x-u+h)^{r-2} \sin^r t \left(\frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u, t)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u-h, t)} \right) \right| dt \; +$$

$$+ \; \frac{1-r}{\Gamma(r)} \int_{x+2h}^{\pi} |(t-x-u)^{r-2} - (t-x-u+h)^{r-2}| \sin^r t \left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x+u, t)} - 1 \right| dt \; :=$$

$$:= B_1 + B_2.$$

Для оценки интеграла B_1 воспользуемся неравенством

$$|\sin^{r-1} C(x+u, t) - \sin^{r-1} C(x+u-h, t)| \le M_1 h \sin^{r-2} C(v, t),$$

где $v = v(t) \in [x+u-h, x+u]$ и $M_1 = \max\limits_{0 \le t, x \le \pi} \left| \dfrac{\partial \sin C(y, t)}{\partial y} \right|$.

Так же, как и для интеграла A_2, рассмотрим два случая. Если $x + 2h <$ $< \pi/2$, то

$$B_1 \le \frac{2^{2-r} M_1 h}{\Gamma(r)} \int\limits_{x+2h}^{\pi/2} (t-x-u+h)^{r-1} \sin^{r-1} t \, dt \; +$$

$$+ \; C_1 h \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2} \, dt \; \le$$

$$\le \frac{2^{2-r} M_1 h \sin^{r-1} x}{\Gamma(r)} (3h-u)^{r-1} + C_2 h^r. \tag{23}$$

В случае $x+2h \ge \dfrac{\pi}{2}$ сначала воспользуемся неравенством $\sin C(v,t) > \dfrac{1}{2}\sin t$, а затем неравенствами $\sin C(v,t) > \dfrac{2}{\pi} \ge \dfrac{2}{\pi}\sin(x+h)$, если $v(t) \le \dfrac{\pi}{2}$, и $\sin C(v,t) > \dfrac{1}{2}\sin v > \dfrac{1}{2}\sin(x+h)$, если $v > \dfrac{\pi}{2}$:

$$B_1 \le \frac{2 M_1 h}{\Gamma(r)} \int\limits_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2} \sin^{r-1} C(v,t) \, dt \; \le$$

$$\le \frac{2^{2-r} M_1 h}{\Gamma(r)} \sin^{r-1}(x+h) \int\limits_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2} \, t \, dt \le C h^r \sin^{r-1} x. \tag{24}$$

Чтобы оценить интеграл B_2, применим неравенства

$$\left| \frac{\sin^{1-r} t}{\sin^{1-r} C(x,t)} - 1 \right| \le M_1 (t-x) \sin^{r-1} C(x,t) \sin^{-r} C(v,t),$$

где $v = v(t) \in (x,t)$, и $\sin C(v,t) > \dfrac{1}{2}\sin t$:

$$B_2 \le \frac{2^r (1-r) M_1}{\Gamma(r)} \int\limits_{x+2h}^{\pi} [(t-x-u)^{r-2} \; -$$

$$- (t-x-u+h)^{r-2}] \sin^{r-1} C(x+u,t)(t-x-u) \, dt.$$

В случае $x+2h < \dfrac{\pi}{2}$, используя неравенства $\sin C(x+u,t) > \sin(x+u) > \sin x$, если $t \le \dfrac{\pi}{2}$, и $\sin C(x+u,t) > \dfrac{2}{\pi}$, если $t > \dfrac{\pi}{2}$, получаем

$$B_2 \le \frac{2(1-r) M_1 \sin^{r-1} x}{\Gamma(r)} \int\limits_{x+2h}^{\pi/2} [(t-x-u)^{r-2} \; -$$

$$- (t-x-u+h)^{r-2}](t-x-u) \, dt \; +$$

$$+ \frac{2^{2r-1} (1-r) \pi^{1-r} M_1}{\Gamma(r)} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} [(t-x-u)^{r-2} \; -$$

$$- (t-x-u+h)^{r-2}](t-x-u) \, dt \; \le$$

$$\le C_1 \sin^{r-1} x \left\{ \int\limits_{x+2h}^{\pi} [(t-x-u)^{r-1} - (t-x-u+h)^{r-1}] \, dt \; + \right.$$

$$+ \; h \int\limits_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2}\, dt \Biggr\} \le C \sin^{r-1} x\, h^r. \tag{25}$$

Если $x + 2h \ge \dfrac{\pi}{2}$, то, как и выше, применим неравенства $\sin C(x+u, t) > \\ > \dfrac{2}{\pi} \sin(x+u)$, если $(x+u) \le \dfrac{\pi}{2}$, и

$$\sin C(x+u, t) > \frac{1}{2} \sin(x+u) \ge \frac{1}{2} \sin(x+h),$$

если $(x+u) > \dfrac{\pi}{2}$:

$$B_2 \le \frac{2M_1 \sin^{r-1}(x+h)}{\Gamma(r)} \Biggl\{ \int\limits_{x+2h}^{\pi} \left[(t-x-u)^{r-1} - (t-x-u+h)^{r-1}\right] dt \; +$$

$$+ \; h \int\limits_{x+2h}^{\pi} (t-x-u+h)^{r-2}\, dt \Biggr\} \le C \sin^{r-1} x\, h^r. \tag{26}$$

Из неравенств (23) – (26) следует равномерная по переменной u оценка для интеграла J_2:

$$J_2 \le C h^r \sin^{r-1} x.$$

Следовательно, для интеграла p_2 имеет место неравенство (9). Таким образом, для функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, а следовательно, и для функции $f(x)$ выполняется неравенство (16), если $x \in [2h, \pi - 2h]$. Учитывая оценку (15), получаем утверждение теоремы.

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 21.10.97