УДК 531.36

Ю. А. Мартынюк-Черниенко (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ НЕТОЧНОЙ СИСТЕМЫ

We generalized the direct Lyapunov method in such a way that this generalization can be used to establish new conditions of the uniform asymptotic stability of solutions of uncertain system with respect to invariant moving set.

Узагальнено прямий метод Ляпунова, який може бути використаний для встановлення нових умов рівномірної асимптотичної стійкості розв'язків неточної системи відносно інваріантної рухомої множини.

Введение. В настоящей статье исследуются модели неточных систем, которые описываются квазилинейными системами с точно заданным линейным приближением. Функции, содержащие неточные значения параметров, осуществляют связь между точными линейными подсистемами.

Одним из источников „неточностей" в рассматриваемой задаче является процедура декомпозиции (реальной или формальной) крупномасштабной системы с последующей линеаризацией. Эти неточности могут быть как внутренними, так и внешними. Внутренние неточности связаны с природой каждой подсистемы, в то время как внешние являются следствием взаимодействия подсистем.

В отличие от ранее проведенных исследований (см. [1] и приведенную в ней библиографию) неточных систем в данной статье исследуется динамика квазилинейной системы относительно подвижного инвариантного множества. Здесь продолжены исследования, начатые в работах [2–4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение неточной системы, описываемой квазилинейными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Pz + Q(z, w, \alpha), \\ \frac{dw}{dt} &= Hw + G(z, w, \alpha). \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $z \in R^n$, $w \in R^m$, $\alpha \in R^d$ — параметр неточности системы (1), P, H — постоянные матрицы соответствующих размерностей, характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ которых имеют простые элементарные делители, Q: $R^n \times R^m \times R^d \to R^n$ и $G\colon R^n \times R^m \times R^d \to R^m$ имеют компонентами ряды по целым положительным степеням z и w, начинающиеся с членов не ниже второго порядка и абсолютно сходящиеся в произведении сколь угодно больших открытых связных окрестностей $\mathcal{N}_z$ и $\mathcal{N}_w$ состояний $z = 0$ и $w = 0$ при любых значениях параметра неточности $\alpha \in R^d$.

Будем предполагать, что нулевое решение уравнений первого приближения системы (1) неустойчиво и при $\alpha = 0$ система (1) имеет ненулевое периодическое решение. Целью данной работы является построение достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости решений $(z(t, \alpha), w(t, \alpha))$ системы (1) относительно подвижного инвариантного множества $A^*(\kappa)$, которое определено ниже.

2. Преобразование неточной системы. С помощью линейного неособого преобразования $z = Tx$ и $w = Ry$ $(\det T \neq 0,\ \det R \neq 0)$ приведем линейную часть системы (1) к диагональному виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + f_1(x, y, \alpha), \\ \frac{dy}{dt} &= By + f_2(x, y, \alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$, $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $B = \operatorname{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $f_1(x, y, \alpha) = T^{-1} Q(Tx, Ry, \alpha)$, $f_2(x, y, \alpha) = R^{-1} G(Tx, Ry, \alpha)$.

В системе уравнений (2) компоненты x_s, $s = 1, 2, \dots, n$, соответствующие вещественным собственным числам λ_s, будут вещественными, а соответствующие комплексным — комплексными. Аналогичное утверждение справедливо и для переменных y_k, $k = 1, 2, \dots, m$. Каждой паре комплексно-сопряженных корней будет соответствовать пара комплексно-сопряженных переменных x_s, y_k соответственно. Для вещественных переменных x_s и y_k будем иметь $x_s = \pm r_s$, $\theta_s = 0, \pi$; $y_k = \pm \rho_k$, $\varphi_k = 0, \pi$.

Для компонент x_s и y_k векторов x и y будем рассматривать переменные [5]

$$\begin{gathered} x_s = r_s \exp(i\theta_s), \quad \bar{x}_s = r_s \exp(i\theta_s), \\ y_k = \rho_k \exp(i\varphi_k), \quad \bar{y}_k = \rho_k \exp(i\varphi_k), \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{gathered} \tag{3}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} r_s = x_s \exp(-i\theta_s), \quad r_s = \bar{x}_s \exp(i\theta_s), \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \rho_k = y_k \exp(-i\varphi_k), \quad \rho_k = \bar{y}_k \exp(i\varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{gathered}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dr_s}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dx_s}{dt} e^{-i\theta_s} + \frac{d\bar{x}_s}{dt} e^{i\theta_s}\right), \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{d\rho_k}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dy_k}{dt} e^{-i\varphi_k} + \frac{d\bar{y}_k}{dt} e^{i\varphi_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Учитывая систему уравнений (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dr_s}{dt} &= \operatorname{Re}\lambda_s r_s + \frac{1}{2}\left(f_{1s} e^{-i\theta_s} + \bar{f}_{1s} e^{i\theta_s}\right), \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{d\rho_k}{dt} &= \operatorname{Re}\beta_k \rho_k + \frac{1}{2}\left(f_{2k} e^{-i\varphi_k} + \bar{f}_{2k} e^{i\varphi_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

В системах (4) уравнения, соответствующие комплексно-сопряженным корням, будут повторяться, так как соответствующие переменные имеют одинаковые модули. Поэтому число различных уравнений в системах (4) будет $n_1 < n$ и $m_1 < m$ соответственно.

Замечание. Если в системе (2) функции f_1 и f_2 представить в виде

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \alpha) &= f_1^*(x, y, 0) + \Delta f_1(\cdot, \alpha), \\ f_2(x, y, \alpha) &= f_2^*(x, y, 0) + \Delta f_2(\cdot, \alpha), \end{aligned}$$

где $\Delta f_1 = f_1(x, y, \alpha) - f_1^*(x, y, 0)$, $\Delta f_2 = f_2(x, y, \alpha) - f_2^*(x, y, 0)$, $\alpha \in R^d$, то система (4) преобразуется к следующей:

$$\frac{dr_s}{dt} = \operatorname{Re}\lambda_s r_s + \frac{1}{2}\left(f_{1s}^* e^{-i\theta_s} + \bar{f}_{1s}^* e^{i\theta_s}\right) + \frac{1}{2}\left(\Delta f_{1s} e^{-i\theta_s} + \Delta\bar{f}_{1s} e^{i\theta_s}\right),$$
$$\frac{d\rho_k}{dt} = \operatorname{Re}\beta_k\rho_k + \frac{1}{2}\left(f_{2k}^* e^{-i\varphi_k} + \bar{f}_{2k}^* e^{i\varphi_k}\right) + \frac{1}{2}\left(\Delta f_{2k} e^{-i\varphi_k} + \Delta\bar{f}_{2k} e^{i\varphi_k}\right). \tag{5}$$

В системе (5) влияние неточностей $\alpha \in R^d$ „сосредоточено" в последних слагаемых правой части уравнений. Иногда такое преобразование системы может облегчить оценку влияния „неточности" на динамику системы (1).

Для системы (4) будем рассматривать подвижное множество $A^*(\kappa)$, определенное формулой

$$A^*(\kappa) = \{r \in R^n,\ \rho \in R^m\colon \|r\| + \|\rho\| = \kappa(\alpha)\}.$$

Здесь предполагается, что $\kappa(\alpha) > 0$ и, кроме того, $\kappa(\alpha) \to \kappa_0$ ($\kappa_0 = \text{const} > 0$) при $\|\alpha\| \to 0$ и $\kappa(\alpha) \to \infty$ при $\|\alpha\| \to \infty$.

3. Применение канонической матричнозначной функции. Исследование системы (4) будем проводить с помощью матричнозначной функции

$$U(r, \rho) = \begin{pmatrix} u_{11}(r) & u_{12}(r,\rho) \\ u_{21}(r,\rho) & u_{22}(\rho) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

элементы $u_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, 2$, которой определяются формулами

$$u_{11}(r) = \sum_{s=1}^{n_1} \nu_s r_s^2, \quad s = 1, 2, \ldots, n_1,$$
$$u_{22}(\rho) = \sum_{k=1}^{m_1} \psi_k \rho_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{7}$$
$$u_{12}(r,\rho) = u_{21}(r,\rho) = \gamma \sum_{s=k}^{\min(n_1, m_1)} r_s \rho_k,$$

где ν_s, ψ_k — положительные постоянные, γ — произвольная постоянная.

Функцию (6) с элементами (7) будем называть канонической, учитывая, что ее элементы построены на основе канонического преобразования линейного приближения системы (2).

Обозначим $\nu_m = \min\limits_s(\nu_s)$, $\nu_M = \max\limits_s(\nu_s)$, $\psi_m = \min\limits_k(\psi_k)$, $\psi_M = \max\limits_k(\psi_k)$. Нетрудно проверить, что для функций (7) верны оценки

$$\nu_m\|r\|^2 \le u_{11}(r) \le \nu_M\|r\|^2 \quad \forall r \in R^{n_1},$$
$$\psi_m\|\rho\|^2 \le u_{22}(\rho) \le \psi_M\|\rho\|^2 \quad \forall \rho \in R^{m_1}, \tag{8}$$
$$-\gamma\|r\|\|\rho\| \le u_{12}(r,\rho) \le \gamma\|r\|\|\rho\| \quad \forall (r,\rho) \in R^{n_1}\times R^{m_1}.$$

Далее применяется функция

$$V(r,\rho) = \eta^T U(r,\rho)\eta, \quad \eta \in R_+^2, \quad \eta > 0, \tag{9}$$

для которой верны оценки

$$v^T H^T A_1 H v \le V(r,\rho) \quad \text{при } \|r\| + \|\rho\| > \kappa(\alpha),$$
$$V(r,\rho) \le v^T H^T A_2 H v \quad \text{при } \|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha), \tag{10}$$

где $v^T = (\|r\|, \|\rho\|)$, $H = \operatorname{diag}(\eta_1, \eta_2)$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \nu_m & -\gamma \\ -\gamma & \psi_m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \nu_M & \gamma \\ \gamma & \psi_M \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить обобщенный в статье [4] прямой метод Ляпунова для исследования системы (4) на основе функции (9), установим вначале структуру ее полной производной в силу системы (4). Для этого введем некоторые предположения.

Предположение 1. Существуют постоянные $\overline{\mu}_{jl}$, $j = 1, 2$; $l = 1, 2, 3, 4$, такие, что при $\|r\| + \|\rho\| > \kappa(\alpha)$ выполняются неравенства

$$\sum_{s=1}^{n_1} \nu_s \left(f_{1s} e^{-i\theta_s} + \bar{f}_{1s} e^{i\theta_s} \right) r_s \le \overline{\mu}_{11} \|r\|^2 + \overline{\mu}_{12} \|\rho\| \|r\|;$$

$$\sum_{k=1}^{m_1} \psi_k \left(f_{2k} e^{-i\varphi_k} + \bar{f}_{2k} e^{i\varphi_k} \right) \rho_k \le \overline{\mu}_{21} \|\rho\|^2 + \overline{\mu}_{22} \|\rho\| \|r\|;$$

$$\sum_{s=k} \gamma \left(f_{1s} e^{-i\theta_s} + \bar{f}_{1s} e^{i\theta_s} \right) \rho_k \le \overline{\mu}_{13} \|\rho\| \|r\| + \overline{\mu}_{14} \|\rho\|^2;$$

$$\sum_{s=k} \gamma \left(f_{2k} e^{-i\varphi_k} + \bar{f}_{2k} e^{i\varphi_k} \right) r_s \le \overline{\mu}_{23} \|\rho\| \|r\| + \overline{\mu}_{24} \|r\|^2.$$

Предположение 2. Существуют постоянные $\overline{\mu}_{jl}$, $j = 1, 2$; $l = 1, 2, 3, 4$, такие, что при $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha)$ выполняются неравенства из предположения 1 со знаком $\ge$ вместо $\le$.

Обозначим

$$a = \max_s (\operatorname{Re} \lambda_s), \quad b = \max_k (\operatorname{Re} \beta_k), \quad \overline{a} = \min_s (\operatorname{Re} \lambda_s), \quad \overline{b} = \min_s (\operatorname{Re} \beta_k).$$

Если выполняются все условия предположений 1 и 2, то для полных производных элементов матричнозначной функции (6) вдоль решений системы (4) верны оценки:

а) при всех $\|r\| + \|\rho\| > \kappa(\alpha)$, $\alpha \in R^d$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11}(r) &\le (2\nu_M a + \mu_{11}) \|r\|^2 + \mu_{12} \|r\| \|\rho\|, \\ \dot{u}_{22}(\rho) &\le (2\psi_M b + \mu_{21}) \|\rho\|^2 + \mu_{22} \|r\| \|\rho\|, \\ \dot{u}_{12}(r, \rho) &\le \frac{1}{2} \mu_{24} \|r\|^2 + \left[\gamma(a + b) + \frac{1}{2}(\mu_{13} + \mu_{23}) \right] \|r\| \|\rho\| + \frac{1}{2} \mu_{14} \|\rho\|^2; \end{aligned} \tag{11}$$

б) при всех $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha)$, $\alpha \in R^d$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11}(r) &\ge (2\nu_m \overline{a} + \overline{\mu}_{11}) \|r\|^2 + \overline{\mu}_{12} \|r\| \|\rho\|, \\ \dot{u}_{22}(\rho) &\ge (2\psi_m \overline{b} + \overline{\mu}_{21}) \|\rho\|^2 + \overline{\mu}_{22} \|r\| \|\rho\|, \\ \dot{u}_{12}(r, \rho) &\ge \frac{1}{2} \overline{\mu}_{24} \|r\|^2 + \left[\gamma(\overline{a} + \overline{b}) + \frac{1}{2}(\overline{\mu}_{13} + \overline{\mu}_{23}) \right] \|r\| \|\rho\| + \frac{1}{2} \overline{\mu}_{14} \|\rho\|^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Лемма. *Пусть выполняются все условия предположений* 1 *и* 2. *Тогда для полной производной функции* (9) *в силу системы* (4) *верны оценки:*

а) *при* $\|r\| + \|\rho\| > \kappa(\alpha)$ *и при всех* $\alpha \in R^d$

$$\left. \frac{dV(r, \rho)}{dt} \right|_{(4)} \le v^T C v, \tag{13}$$

где $v^T = (\|r\|, \|\rho\|)$ *и*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad c_{12} = c_{21},$$

$$c_{11} = \eta_1^2(2\nu_M a + \mu_{11}) + \eta_1\eta_2\mu_{24},$$

$$c_{22} = \eta_2^2(2\psi_M b + \mu_{21}) + \eta_1\eta_2\mu_{14},$$

$$c_{12} = \frac{1}{2}\eta_1^2\mu_{12} + \frac{1}{2}\eta_2^2\mu_{22} + \eta_1\eta_2\left[\gamma(a+b) + \frac{1}{2}(\mu_{13}+\mu_{23})\right];$$

б) *при* $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha)$ *и при всех* $\alpha \in R^d$

$$\left.\frac{dV(r,\rho)}{dt}\right|_{(4)} \ge v^T D v, \tag{14}$$

где $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$, $d_{12} = d_{21}$,

$$d_{11} = \eta_1^2(2\nu_m \overline{a} + \overline{\mu}_{11}) + \eta_1\eta_2\overline{\mu}_{24},$$

$$d_{22} = \eta_2^2(2\psi_m \overline{b} + \overline{\mu}_{21}) + \eta_1\eta_2\overline{\mu}_{14},$$

$$d_{12} = \frac{1}{2}\eta_1^2\overline{\mu}_{12} + \frac{1}{2}\eta_2^2\overline{\mu}_{22} + \eta_1\eta_2\left[\gamma(\overline{a}+\overline{b}) + \frac{1}{2}(\overline{\mu}_{13}+\overline{\mu}_{23})\right].$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 из работы [6].

4. Основной результат. Оценки (10) и неравенства (13), (14) позволяют установить достаточные условия равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости решений системы (1) относительно подвижного инвариантного множества $A^*(\kappa)$.

Теорема. *Предположим, что в системе* (2) *функции* $f_1(z, w, \alpha)$ *и* $f_2(z, w, \alpha)$ *непрерывны на* $R^n \times R^m \times R^d$ *и выполняются условия*:

1) *для любого* $\alpha \in R^d$ *существует функция* $\kappa(\alpha) > 0$ *такая, что множество* $A^*(\kappa)$ *непустое при всех* $\alpha \in R^d$;

2) *для преобразованной системы* (4) *построена матричнозначная функция* (6) *с элементами* (7);

3) *выполняются все условия предположений* 1 *и* 2;

4) *в неравенствах* (10) *матрицы* A_1 *и* A_2 *положительно определенные*;

5) *в неравенствах* (13) *и* (14)

   а) *матрица* C *полуопределенно (определенно) отрицательная*;

   б) *матрица* D *полуопределенно (определенно) положительная*;

6) *для любого* $\kappa(\alpha) > 0$ *верно соотношение*

$$v^T H^T A_1 H v = v^T H^T A_2 H v$$

как только $\|r\| + \|\rho\| = \kappa(\alpha)$.

Тогда решения $(x(t, \alpha), y(t, \alpha))$ *системы* (2) *равномерно (асимптотически) устойчивы относительно инвариантного подвижного множества* $A^*(\kappa)$.

Доказательство. Согласно условию 1 теоремы, существует непустое при всех $\alpha \in R^d$ подвижное множество $A^*(\kappa)$. Его инвариантность относительно системы (2) следует из теоремы 1 работы [4], так как при выполнении условий $2-6$ теоремы выполняются все условия теоремы 1 из статьи [4] для функции $V(r, \rho)$.

Равномерная асимптотическая устойчивость решений системы (2) относительно множества $A^*(\kappa)$ будет доказана, если при выполнении всех условий теоремы найдутся $T = T(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, H)$, $H = \text{const} > 0$ такие, что из условия

$$\kappa(\alpha) - \delta_0 < \|r(t_0, \alpha)\| + \|\rho(t_0, \alpha)\| < \kappa(\alpha) + \delta_0, \tag{15}$$

где $\delta_0 = \delta_0(\kappa)$, следует существование $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, для которого

$$\kappa(\alpha)-\delta < \left\|r(t^*,\alpha)\right\| + \left\|\rho(t^*,\alpha)\right\| < \kappa(\alpha)+\delta, \tag{16}$$

где $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Пусть при выполнении условий теоремы не существует $t^* \in [t_0, t_0+T(\varepsilon)]$, для которого выполняется неравенство (16). При этом возможны два случая:

$$\|r(t,\alpha)\| + \|\rho(t,\alpha)\| > \kappa+\delta \quad \text{при всех} \quad t\in[t_0, t_0+T]$$

либо

$$\|r(t,\alpha)\| + \|\rho(t,\alpha)\| \le \kappa-\delta \quad \text{при всех} \quad t\in[t_0, t_0+T].$$

Рассмотрим первый случай. Так как в силу условия 5а) теоремы

$$\frac{dV(r,\rho)}{dt} < 0 \quad \text{при} \quad \|r\|+\|\rho\| > \kappa(\alpha), \quad t_0\le t<\infty, \tag{17}$$

то функция $V(r(t),\rho(t))$ монотонно убывает вдоль решений системы (2)

$$\lim_{t\to\infty} V(r(t),\rho(t)) = \inf_t V(r(t),\rho(t)) = \Delta(\kappa).$$

Поскольку матрица C определенно отрицательная, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_M(C)<0$, то

$$\frac{dV(r,\rho)}{dt} \le -\lambda_M(C)\,\Phi(\|r\|+\|\rho\|) \quad \text{при} \quad \|r\|+\|\rho\| > \kappa(\alpha), \tag{18}$$

где $\Phi(\|r\|+\|\rho\|) \le (\|r\|,\|\rho\|)^T(\|r\|,\|\rho\|)$, $\Phi(0)=0$ и $\Phi\in K$-классу.

Согласно условиям теоремы 1 из [4] система (2) равномерно устойчива, и, значит, можно предполагать, что $\|r(t,\alpha)\|+\|\rho(t,\alpha)\|\le H<+\infty$ при всех $\alpha\in$ $\in R^d$.

На множестве $\kappa(\alpha)+\delta\le\|r\|+\|\rho\|\le H$ вычислим

$$\gamma(\kappa) = \inf_{\kappa+\delta\le\|r\|+\|\rho\|\le H} \Phi(\|r\|+\|\rho\|).$$

Ясно, что $\gamma(\kappa)\ge 0$. Из неравенства (18) имеем

$$V\big(r(t_0+T(\varepsilon)),\ \rho(t_0+T(\varepsilon))\big) \le$$

$$\le V\big(r(t_0),\ \rho(t_0)\big) - \lambda_M(C)\int_{t_0}^{t_0+T(\varepsilon)} \Phi(\|r(\tau)\|+\|\rho(\tau)\|)\,d\tau,$$

или

$$V\big(r(t_0+T(\varepsilon)),\ \rho(t_0+T(\varepsilon))\big) \le V(r(t_0),\rho(t_0)) - \lambda_M(C)\int_{t_0}^{t_0+T(\varepsilon)}\lambda(\kappa)\,d\tau \le$$

$$\le V(r(t_0),\rho(t_0)) - \lambda_M(C)\,\gamma(\kappa)\,T(\varepsilon),$$

поскольку

$$-\Phi(\|r\|+\|\rho\|) \le -\gamma(\kappa) \quad \text{при} \quad \kappa(\alpha)+\delta \le \|r\|+\|\rho\| \le H.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $T=T(\varepsilon)$

$$V(r(T),\rho(T)) < 0 \quad \text{при} \quad \|r\|+\|\rho\| > \kappa(\alpha).$$

Но это противоречит условию 4 теоремы. Следовательно, первый случай невозможен, т. е. должно существовать значение $t^*\in[t_0, t_0+T]$, для которого

$$\left\|r(t^*,\alpha)\right\| + \left\|\rho(t^*,\alpha)\right\| \le \kappa(\alpha)+\delta. \tag{19}$$

Покажем теперь, что $\|r(t,\alpha)\|+\|\rho(t,\alpha)\|\to\kappa(\alpha)$ при $t\to\infty$. Действительно, пусть $\varepsilon>0$ — произвольно малое число и

$$l(\kappa) = \inf \lambda_M(C)\,\Phi(\|r\| + \|\rho\|) > 0 \quad \text{при} \quad \kappa(\alpha) + \varepsilon \le \|r\| + \|\rho\| \le H.$$

Из (18) следует, что существует $T(\varepsilon) > t_0$ такое, что

$$V(r(T(\varepsilon)), \rho(T(\varepsilon))) > l(\kappa). \tag{20}$$

Но в силу условий (17) функция $V(r(t), \rho(t))$ монотонно убывает, поэтому

$$V(r(t), \rho(t)) < l(\kappa) \quad \forall t > T(\varepsilon) \tag{21}$$

при $\|r\| + \|\rho\| > \kappa(\alpha)$. Следовательно, при $t > T(\varepsilon)$ имеем $\|r(t, \alpha)\| + \|\rho(t, \alpha)\| \le \kappa(\alpha) + \varepsilon$.

Пусть это не так, и существует $t_1 > T(\varepsilon)$, для которого

$$\|r(t_1, \alpha)\| + \|\rho(t_1, \alpha)\| > \kappa(\alpha) + \varepsilon.$$

Тогда из (20) и (21) следует

$$l(\kappa) > V(r(t_1), \rho(t_1)) \ge \lambda_M(C)\,\Phi(\|r\| + \|\rho\|) \ge l(\kappa),$$

что является противоречием. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} (\|r(t, \alpha)\| + \|\rho(t, \alpha)\|) = \kappa(\alpha).$$

Далее рассмотрим второй случай. Так как матрица D положительно определенная для функции $dV(r, \rho)/dt$, нетрудно получить оценку

$$\frac{dV(r,\rho)}{dt} \ge \lambda_m(D)\,W(\|r\| + \|\rho\|) \quad \text{при} \quad \|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha), \tag{22}$$

где $W(\|r\| + \|\rho\|) \ge (\|r\|, \|\rho\|)^T(\|r\|, \|\rho\|)$, $W(0) = 0$, $W \in K$-классу, $\lambda_m(D)$ — минимальное собственное значение матрицы D. Из второго из условий (10) имеем

$$V(r, \rho) \le b(\|r\| + \|\rho\|) \quad \text{при} \quad \|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha).$$

Отсюда следует, что функция $V(r, \rho)$ ограничена, т. е. существует $M > 0$ такое, что

$$|V(r, \rho)| \le M$$

при $t_0 \le t < \infty$ и $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha) < H$, где M и H — некоторые положительные числа.

Пусть $\delta > 0$ ($\delta < \kappa(\alpha)$ $\forall \alpha \in R^d$) — произвольно малое число. В силу условия 4 теоремы существует точка r_0, ρ_0: $0 < \|r_0\| + \|\rho_0\| < \kappa(\alpha)$ такая, что

$$V(r_0, \rho_0) = \sigma > 0. \tag{23}$$

Пусть решение $(r^T(t, \alpha), \rho^T(t, \alpha))^T$ неточной системы (2) определяется начальными условиями $r(t_0, \alpha) = r_0$, $\rho(t_0, \alpha) = \rho_0$ и

$$0 < \|r(t, \alpha)\| + \|\rho(t, \alpha)\| < \kappa(\alpha) - \delta \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{24}$$

Вследствие условия 5б) теоремы функция $V(r(t), \rho(t))$ при $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha)$ монотонно возрастает вместе с t, и, следовательно, при $t \ge t_0$ имеем

$$V(r(t), \rho(t)) \ge V(r_0, \rho_0) = \sigma > 0.$$

Покажем, что при некотором $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ будет выполнено неравенство

$$\left\|r(t^*, \alpha)\right\| + \left\|\rho(t^*, \alpha)\right\| > \kappa(\alpha) - \delta. \tag{25}$$

Действительно, пусть это не так, и

$$\|r(t, \alpha)\| + \|\rho(t, \alpha)\| < \kappa(\alpha) - \delta \qquad \forall t \ge t_0.$$

Решение $(r^T(t,\alpha), \rho^T(t,\alpha))^T$ бесконечно продолжаемо вправо и найдется $\beta < \kappa(\alpha) - \delta$ при всех $\alpha \in R^d$ такое, что

$$0 < \beta \le \|r(t,\alpha)\| + \|\rho(t,\alpha)\| \le \kappa(\alpha) - \delta \quad \text{при} \quad t_0 \le t < \infty.$$

Вычислим

$$\gamma(\kappa) = \inf_{\beta \le \|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha) - \delta} W(\|r\| + \|\rho\|). \tag{26}$$

Ясно, что $\gamma(\kappa) > 0$ и в области $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha)$ имеем

$$\frac{dV(r,\rho)}{dt} \ge \lambda_m(D)\,\gamma(\kappa) \quad \text{при} \quad t_0 \le t < \infty.$$

Следовательно, при $t_0 \le t < \infty$ получим

$$V(r(t), \rho(t)) \ge V(r_0, \rho_0) + \lambda_m(D)\,\gamma(\kappa)\,(t - t_0), \tag{27}$$

что противоречит ограниченности функции $V(r, \rho)$ в области $\|r\| + \|\rho\| \le \kappa(\alpha)$, $t_0 \le t < \infty$. Итак, доказано, что существует $t^* \in [t_0, t_0 + T]$, для которого выполняется неравенство (25). Вместе с неравенством (19) выполняется оценка

$$\kappa(\alpha) - \delta < \left\|r(t^*, \alpha)\right\| + \left\|\rho(t^*, \alpha)\right\| < \kappa(\alpha) + \delta$$

при $t^* \in [t_0, t_0 + T]$. Этим доказана равномерная асимптотическая устойчивость решений неточной системы (2) относительно множества $A^*(\kappa)$.

1. *Han M. C., Chen Y. H.* Decentralized control design: uncertain systems with strong interconnections // Int. J. Control. – 1995. – **61**, № 6. – P. 1363 – 1385.
2. *Lakshmikantham V., Vatsala A. S.* Stability of moving invariant sets // Advances in Nonlinear Dynamics / Eds. Sivasundaram S. and Martynyuk A. A. – Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1997. – **5**. – P. 79 – 83.
3. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Об устойчивости движения систем с неточным значением параметров // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 2. – С. 101 – 104.
4. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* К теории устойчивости движения неточных систем // Допов. НАН України. – 1998. – № 1. – С. 28 – 31.
5. *Тихонов А. А.* Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1969. – Вып. 1, № 1. – С. 95 – 101.
6. *Мартынюк А. А., Миладжанов В. Г.* Анализ устойчивости в целом динамической системы на основе матриц-функций Ляпунова. – Киев, 1987. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.62).

Получено 11.03.98