УДК 517.9:519.46

А. Ф. Баранник (Ін-т математики; пед. ін-т, Слупськ, Польща),
І. І. Юрик (Держ. ун-т харч. технологій України, Київ)

НОВИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

A new simple method for constructing solutions of multidimensional nonlinear wave equations is proposed.

Запропоновано новий простий метод побудови розв'язків багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь.

1. Вступ. Одним з ефективних методів побудови розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики є метод симетрійної редукції рівняння до рівнянь з меншим числом змінних, зокрема до звичайних диференціальних рівнянь [1 – 3]. Цей метод грунтується на дослідженні підгрупової структури групи інваріантності даного диференціального рівняння. Розв'язки, одержувані при цьому, є інваріантними відносно підгрупи групи інваріантності рівняння. Слід відзначити, що інваріантність накладає дуже жорсткі умови на розв'язки, тому симетрійна редукція в багатьох випадках не дозволяє одержати достатньо широкі класи розв'язків.

В роботах [3 – 6] запропоновано ідею умовної інваріантності диференціальних рівнянь. Під умовною симетрією рівняння розуміють симетрію деякої підмножини розв'язків. Для багатьох важливих нелінійних рівнянь математичної фізики існують підмножини розв'язків, симетрія яких суттєво відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків. Такі підмножини виділяють, як правило, з допомогою додаткових умов, які є диференціальними рівняннями в частинних похідних. Опис в явному вигляді цих додаткових умов є складною проблемою і, на жаль, яких-небудь ефективних методів щодо її розв'язання не існує.

В даній статті запропоновано конструктивний спосіб побудови деяких класів точних розв'язків багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь. Суть методу полягає в наступному. Нехай маємо рівняння в частинних похідних

$$F(x, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0, \tag{1}$$

$u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R_{1,n}$, $\underset{m}{u}$ — сукупність всіх можливих похідних m-го порядку, і нехай рівняння (1) має нетривіальну алгебру симетрії. Для побудови розв'язків рівняння (1) використаємо симетрійний (або умовно-симетрійний) анзац [3]. Припустимо, що він має вигляд

$$u = f(x)\,\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_k) + g(x), \tag{2}$$

де $\omega_1 = \omega_1(x_0, x_1, \ldots, x_k), \ldots, \omega_k = \omega_k(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — нові незалежні змінні. Анзац (2) виділяє із всієї множини розв'язків рівняння (1) деяку підмножину S. Побудуємо (якщо це можливо) новий анзац

$$u = f(x)\,\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_L) + g(x), \tag{3}$$

який є узагальненням анзацу (2). Тут $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_L$ — нові змінні, які необхідно визначити. Змінні $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_L$ будемо визначати з умови, що редуковане рівняння, яке відповідає анзацу (3), співпадає з редукованим рівнянням, яке відповідає анзацу (2). Анзац (3) виділяє підмножину S_1 розв'язків рівняння (1), яке є розширенням підмножини S. Якщо відомі розв'язки підмножини S, то можна побудувати і розв'язки підмножини S_1. Ці розв'язки будуються в такий спосіб. Нехай $u = u(x, C_1, \ldots, C_t)$ — багатопараметрична сім'я розв'язків вигляду (2) рівняння (1), де $C_1, \ldots, C_t$ — довільні сталі. Одержимо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння (1), якщо в розв'язку $u = u(x, C_1, \ldots, C_t)$ сталі C_i вважити довільними гладкими функціями від $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_L$.

Відзначимо, що ідею цього методу було сформульовано в роботі [7] і розвинуто в [8, 9]. Для застосування даного методу до знаходження точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики необхідно використати анзаци (2), алгоритм побудови яких в [7] не вказаний. В цій статті, яка є логічним продовженням робіт [7 – 9], вказаний метод реалізується для нелінійних рівнянь Даламбера, Ейконала і рівнянь типу Шредінгера. З використанням підгрупової структури груп інваріантності даних рівнянь [10 – 12] виділено ефективні анзаци, які дозволили побудувати нові широкі класи точних розв'язків даних рівнянь, що містять довільні функції.

2. Нелінійне рівняння Даламбера. Розглянемо нелінійне пуанкаре-інваріантне рівняння Даламбера

$$\Box u + F(u) = 0, \tag{4}$$

де

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

$F(u)$ — довільна гладка функція. Побудові точних розв'язків рівняння (4) при різних обмеженнях на функцію $F(u)$ присвячені роботи [3, 11 – 13]. Більшість цих розв'язків інваріантні відносно підгрупи інваріантності рівняння (4), тобто є лієвськими. Один з методів побудови розв'язків — метод симетрійної редукції рівняння (4) до звичайних диференціальних рівнянь. Суть цього методу для рівняння (4) полягає в наступному.

Рівняння (4) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1, n)$ з базисними елементами

$$J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0, \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b,$$
$$P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \quad a, b = 1, 2, \ldots, n.$$

Нехай L — довільна підалгебра рангу n алгебри $AP(1, n)$. Підалгебра L має два основних інваріанти u, $\omega = \omega(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Анзац $u = \varphi(\omega)$, який відповідає підалгебрі L, редукує рівняння (4) до звичайного диференціального рівняння

$$\ddot{\varphi}(\nabla\omega)^2 + \dot{\varphi}\Box\omega + F(\varphi) = 0, \tag{5}$$
$$(\nabla\omega)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)^2.$$

Таку редукцію називають симетрійною, а сам анзац — симетрійним. Існує вісім типів нееквівалентних підалгебр рангу n алгебри $AP(1, n)$ [11].

В роботі [14] було запропоновано наступний метод редукції рівняння (4) до звичайних диференціальних рівнянь, який є узагальненням методу симетрійної редукції. Рівняння (4) з допомогою анзацу $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = \omega(x)$ — нова змінна, редукується до звичайного рівняння, якщо $\omega(x)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \Box\omega &= F_1(\omega), \\ (\nabla\omega)^2 &= F_2(\omega). \end{aligned} \tag{6}$$

Тут F_1, F_2 — довільні гладкі функції, які залежать тільки від ω.

Отже, якщо побудувати всі розв'язки системи (6), то тим самим буде знайдено набір змінних ω, при яких анзац $u = \varphi(\omega)$ редукує рівняння (4) до звичайного диференціального рівняння за змінною ω. Дослідженню системи (6) присвячені роботи [4, 15].

Відзначимо, однак, що анзацами, одержаними на основі системи (6), не вичерпується множина всіх анзаців, які редукують рівняння (4) до звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо з цією метою знаходження узагальнених анзаців (3) за відомими симетрійними анзацами (2) рівняння (4).

1. Розглянемо симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$ для рівняння (4), де $\omega_1 = (x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_k^2)^{1/2}$, $k \geq 2$. Анзац редукує рівняння (4) до рівняння

$$\varphi_{11} + \frac{k}{\omega_1}\varphi_1 + F(\varphi) = 0, \tag{7}$$

де $\varphi_{11} = \dfrac{d^2\varphi}{d\omega_1^2}$, $\varphi_1 = \dfrac{d\varphi}{d\omega_1}$. Цей анзац слід розглядати як частинний випадок більш загального анзацу $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, де ω_2 — невідома змінна. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ редукує рівняння

$$\varphi_{11} + \frac{k}{\omega_1}\varphi_1 + 2\varphi_{12}(\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2) + \varphi_2 \Box \omega_2 + \varphi_{22}(\nabla\omega_2)^2 + F(\varphi) = 0, \tag{8}$$

$$\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2 = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_0}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_0} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n}.$$

Накладемо на рівняння (8) умову, щоб воно співпадало з редукованим рівнянням (7). При цьому припущенні рівняння (8) розпадається на два:

$$\varphi_{11} + \frac{k}{\omega_1}\varphi_1 + F(\varphi) = 0, \tag{9}$$

$$2\varphi_{12}(\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2) + \varphi_{22}(\nabla\omega_2)^2 + \varphi_2 \Box \omega_2 = 0. \tag{10}$$

Рівняння (10) буде виконуватись для довільної функції φ, якщо на змінну ω_2 накласти умови

$$\Box\omega_2 = 0, \qquad (\nabla\omega_2)^2 = 0, \tag{11}$$

$$\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2 = 0. \tag{12}$$

Отже, якщо змінну ω_2 вибрати так, щоб задовольнялись умови (11), (12), то багатовимірне рівняння (4) редукується до звичайного диференціального рівняння (7) і його розв'язки дадуть нам розв'язки рівняння (4). Проблема редукції зведена до побудови загальних або частинних розв'язків системи (11), (12).

Перевизначена система (11) детально вивчалась в роботах [16, 17], де було побудовано широкий клас розв'язків системи (11). Ці розв'язки будуються в такий спосіб. Розглянемо лінійне алгебраїчне рівняння відносно змінних x_0, $x_1, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами, які залежать від невідомої ω_2:

$$a_0(\omega_2)x_0 - a_1(\omega_2)x_1 - \ldots - a_n(\omega_2)x_n - b(\omega_2) = 0. \tag{13}$$

Нехай коефіцієнти цього рівняння — аналітичні функції від ω_2, які задовольняють умову

$$[a_0(\omega_2)]^2 - [a_1(\omega_2)]^2 - \ldots - [a_n(\omega_2)]^2 = 0.$$

Припустимо, що рівняння (13) розв'язне відносно ω_2 і результат цього розв'язання є деякою функцією

$$\omega_2(x_0, x_1, \ldots, x_n), \tag{14}$$

дійсною або комплексною. Тоді функція (14) буде розв'язком системи (11). Виділимо ті розв'язки (14), які мають додаткову властивість $\nabla\omega_1 \nabla\omega_2 = 0$. Очевидно,

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x_0} = -\frac{a_0}{\delta'}, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} = \frac{a_1}{\delta'}, \ \ldots, \ \frac{\partial\omega_2}{\partial x_n} = \frac{a_n}{\delta'},$$

де $\delta(\omega_2) \equiv a_0(\omega_2)x_0 - a_1(\omega_2)x_1 - \ldots - a_n(\omega_2)x_n - b(\omega_2)$, а δ' — похідна від δ по ω_2. Оскільки

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_0} = \frac{x_0}{\omega_1}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} = -\frac{x_1}{\omega_1}, \ldots, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n} = -\frac{x_n}{\omega_1},$$

то

$$\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2 = -\frac{1}{\omega_1 \delta'}(a_0 x_0 - a_1 x_1 - \ldots - a_n x_n).$$

З урахуванням (13) рівність $\nabla\omega_1 \cdot \nabla\omega_2 = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $b(\omega_2) = 0$. Отже, побудовано широкий клас анзаців, які редукують рівняння Даламбера до звичайних диференціальних рівнянь. Довільність у виборі функції ω_2 може бути використана для того, щоб задовольнити які-небудь додаткові умови.

2. Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = (x_1^2 + \ldots + x_L^2)^{1/2}$, $L \geq 1$, $L < n-1$, узагальнюється в такий спосіб. Нехай ω_2 — довільний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_{L+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_n^2} = 0, \\ \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_{L+1}}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$ редукує рівняння (4) до рівняння

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} - \frac{L-1}{\omega_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + F(\varphi) = 0.$$

Якщо $L = n-1$, то узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1)$ є анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_2 = x_0 - x_n$.

Анзаци, які відповідають підалгебрам 2, 6 і 8 таблиці 1 в [9], є частинними випадками побудованого анзацу. В аналогічний спосіб можна отримати широкі класи анзаців, які редукують рівняння (4) до двовимірних і т. д. рівнянь. Наведемо деякі з них.

3. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_L, \omega_{L+1})$, де $\omega_1 = x_1, \ldots, \omega_L = x_L$, ω_{L+1} — довільний розв'язок системи (15), $L \leq n-1$, є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_L)$ і редукує рівняння (4) до рівняння

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_L^2} + F(\varphi) = 0.$$

4. Анзац $u = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_s, \omega_{s+1})$, де $\omega_1 = (x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_L^2)^{1/2}$, $\omega_2 = x_{L+1}, \ldots$ $\ldots, \omega_s = x_{L+s-1}$, $L \geq 2$, $L + s - 1 \leq n$, ω_{s+1} — довільний розв'язок системи

$$\Box\omega_{s+1} = 0, \quad (\nabla\omega_{s+1})^2 = 0,$$
$$\nabla\omega_i \cdot \nabla\omega_{s+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{16}$$

є узагальненням симетрійного анзацу $u = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_s)$ і редукує рівняння (4) до рівняння

$$\varphi_{11} - \frac{L}{\omega_1}\varphi_1 - \varphi_{22} - \ldots - \varphi_{ss} + F(\varphi) = 0.$$

3. Точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера. Побудуємо деякі класи точних розв'язків рівняння

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \quad k \neq 1. \tag{17}$$

Розглянемо інваріантний розв'язок рівняння (17) [12]

$$u^{1-k} = \sigma(k, L)(x_1^2 + \ldots + x_L^2), \tag{18}$$

$$\sigma(k, L) = \frac{\lambda(1-k)^2}{2(L - Lk + 2k)}, \quad L = 1, 2, \ldots, n.$$

Подіявши на розв'язок (18) груповим перетворенням, одержимо багатопараметричну сім'ю розв'язків

$$u^{1-k} = \sigma(k, L)[(x_1 + C_1)^2 + \ldots + (x_L + C_L)^2],$$

де $C_1, \ldots, C_L$ — довільні сталі. Отже, згідно з підпунктом 3 п. 2 для $L \leq n-1$ одержуємо наступну сім'ю розв'язків рівняння (17):

$$u^{1-k} = \sigma(k, L)[(x_1 + h_1(\omega))^2 + \ldots + (x_L + h_L(\omega))^2], \quad k \neq \frac{L}{L-2},$$

де ω — довільний розв'язок системи (15), а $h_1(\omega), \ldots, h_L(\omega)$ — довільні двічі диференційовні функції від ω. Зокрема, якщо $n = 3$ і $L = 1$, то рівняння (17) має в просторі $R_{1,3}$ сім'ю розв'язків

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(L-k)^2}{2(1+k)}[x_1 + h_1(\omega)]^2, \quad k \neq -1.$$

Розглянемо далі такий розв'язок рівняння (17) [12]:

$$u^{1-k} = \sigma(k, s)(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_s^2), \quad s = 2, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\sigma(k, s) = -\frac{\lambda(1-k)^2}{2(s - ks + k + 1)}, \quad k \neq \frac{s+1}{s-1}.$$

Розв'язок (19) визначає багатопараметричну сім'ю розв'язків

$$u^{1-k} = \sigma(k, s)[x_0^2 - x_1^2 - x_L^2 - (x_{L+1} + C_{L+1})^2 - \ldots - (x_s + C_s)^2],$$

де $C_{L+1}, \ldots, C_s$ — довільні сталі. Отже, згідно з підпунктом 4 п. 2 для $L \geq 2$ отримуємо сім'ю розв'язків

$$u^{1-k} = \sigma(k, s)[x_0^2 - x_1^2 - x_L^2 - (x_{L+1} + h_{L+1}(\omega))^2 - \ldots - (x_s + h_s(\omega))^2],$$

де ω — довільний розв'язок системи (16), а $h_{L+1}(\omega), \ldots, h_s(\omega)$ — довільні двічі диференційовні функції від ω. Зокрема, якщо $L = 2$ і $s = 3$, то рівняння (17) має в просторі $R_{1,3}$ сім'ю розв'язків

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(L-k)^2}{4(k-2)}[x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h_3(\omega))^2], \qquad k \neq 2.$$

Рівняння

$$\Box u + 6u^2 = 0 \tag{20}$$

має розв'язок $u = \mathcal{P}(x_3 + C_2)$, де $\mathcal{P}(x_3 + C_2)$ — еліптична функція Вейєрштрасса з інваріантами $g_1 = 0$ і $g_3 = C_1$. Тому згідно з підпунктом 3 п. 2 отримуємо наступну сім'ю розв'язків рівняння (20):

$$u = \mathcal{P}(x_3 + h(\omega)),$$

де ω — довільний розв'язок системи (15), а $h(\omega)$ — довільна двічі диференційовна функція.

Розглянемо частинний випадок рівняння (17), коли $k = 3$. Анзац $u = \varphi(\omega)$, $\omega = \omega(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$ редукує рівняння (17) до рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{3}{\omega}\frac{d\varphi}{d\omega} + \lambda\varphi^3 = 0. \tag{21}$$

Точні розв'язки рівняння (21) побудовані в [18]. Розглянемо, наприклад, наступну сім'ю розв'язків рівняння (21):

$$\varphi = \frac{1}{a\omega}\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{a^2}\ln(C_1\omega)\right), \qquad \lambda = -a^2 < 0. \tag{22}$$

Якщо стала C_1 — довільна двічі диференційовна функція $h_1(\omega_1)$, де ω_1 — довільний розв'язок системи

$$\Box\omega_1 = 0, \qquad (\nabla\omega_1)^2 = 0,$$
$$\nabla\omega \cdot \nabla\omega_1 = 0,$$

то отримуємо наступну сім'ю розв'язків рівняння (17):

$$u = \frac{1}{a\omega}\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{a^2}\ln(h_1(\omega_1)\omega)\right).$$

Ще одну сім'ю точних розв'язків рівняння (17) при $k = 3$ можна отримати в наступний спосіб. Діючи груповим перетворенням на розв'язок (22), отримуємо сім'ю розв'язків

$$u = \frac{1}{a}[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + C_1)^2 - x_0^2]^{-1}\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{a^2}\ln C_2[x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + C_1)^2 - x_0^2]\right).$$

Замінивши сталі C_1 і C_2 довільними функціями $h_1(\omega_1)$ і $h_2(\omega_1)$, одержимо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння (17).

Розглянемо рівняння Даламбера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \lambda u^k = 0, \qquad k \neq 1, \tag{23}$$

у псевдоевлідовому просторі $R_{2,2}$. Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = x_1 - x_4$, $\omega_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, редукує рівняння (23) до рівняння

$$4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + 8\varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0. \tag{24}$$

Узагальнений анзац має вигляд $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, де ω_3 — довільний розв'язок системи

$$\Box\omega_3 = 0, \quad \nabla\omega_3 \cdot \nabla\omega_1 = 0, \quad \nabla\omega_3 \cdot \nabla\omega_2 = 0. \tag{25}$$

Система (25) має, наприклад, розв'язок $\omega_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)^{-1}$, а отже, анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ редукує рівняння (23) до рівняння (24). Рівняння (24) детально досліджувалось в [19], де визначена алгебра інваріантності цього рівняння в розумінні С. Лі і побудовані деякі класи його точних розв'язків. Використаємо, наприклад, точний розв'язок рівняння (24):

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(\omega_2 + C_1\omega_1)(1 + C_2\omega_1^{k-2}),$$

де C_1 і C_2 — довільні константи. Замінивши сталі C_1 і C_2 довільними двічі диференційовними функціями $h_1(\omega_3)$ і $h_2(\omega_3)$, одержимо широкий клас розв'язків рівняння (23):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + h_1(\omega_3))(1 + h_2(\omega_3)(x_1 - x_4)^{k-2}).$$

4. Точні розв'язки рівняння Ліувілля і сінус-Гордона. Розглянемо рівняння Ліувілля

$$\Box u + \lambda \exp u = 0. \tag{26}$$

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = x_3$, редукує рівняння (26) до рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \lambda \exp \varphi(\omega_1).$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо, що φ співпадає з однією з таких функцій:

$$\ln\left\{\left(-\frac{C_1}{2\lambda}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-C_1}}{2}(\omega_1 + C_2)\right]\right\}, \qquad C_1 < 0, \quad \lambda > 0, \quad C_2 \in R;$$

$$\ln\left\{\frac{2C_1C_2\exp(\sqrt{C_1}\,\omega_1)}{\lambda\,[1 - C_2\exp(\sqrt{C_1}\,\omega_1)]}\right\}, \qquad C_1 > 0, \quad \lambda C_2 > 0;$$

$$-\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,\omega_1 + C\right)^2.$$

Отже, згідно з підпунктом 3 п. 2 отримуємо наступну сім'ю розв'язків рівняння (26):

$$u = \ln\left\{\left(-\frac{h_1(\omega)}{2\lambda}\right)\sec^2\left[\frac{\sqrt{-h_1(\omega)}}{2}(x_3 + h_2(\omega))\right]\right\}, \qquad h_1(\omega) < 0, \quad \lambda > 0;$$

$$u = \ln\left\{\frac{2h_1(\omega)\,h_2(\omega)\exp(\sqrt{h_1(\omega)}\,x_3)}{\lambda\,[1 - h_2(\omega)\exp(\sqrt{h_1(\omega)}\,x_3)]}\right\}, \qquad h_1(\omega) > 0, \quad \lambda h_2(\omega) > 0;$$

$$u = -\ln\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,x_3 + h(\omega)\right)^2,$$

де $h_1(\omega)$, $h_2(\omega)$, $h(\omega)$ — довільні двічі диференційовні функції, ω — довільний розв'язок системи (15).

Використовуючи, наприклад, розв'язок рівняння Ліувілля (26) [12]:

$$u = \ln \frac{2(s-2)}{\lambda\left[x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_s^2\right]}, \qquad s \neq 2,$$

знаходимо широкий клас розв'язків цього рівняння

$$u = \ln \frac{2(s-2)}{\lambda\left[x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_L^2 - (x_{L+1} + h_{L+1}(\omega))^2 - \ldots - (x_s + h_s(\omega))^2\right]},$$

де ω — довільний розв'язок системи (16), а $h_{L+1}(\omega), \ldots, h_s(\omega)$ — довільні двічі диференційовні функції. Якщо $s = 3$, то рівняння (26) має в просторі $R_{1,3}$ наступну сім'ю розв'язків:

$$u = \ln \frac{2}{\lambda\left[x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h_3(\omega))^2\right]}.$$

Для рівняння сінус-Гордона $\Box u + \sin u = 0$ в аналогічний спосіб отримуємо наступні розв'язки:

$$u = 4 \operatorname{arctg} h_1(\omega)\, e^{\varepsilon_0 x_3} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi, \qquad \varepsilon_0 = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$u = 2 \arccos\left[dn(x_3 + h_1(\omega), m)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \qquad 0 \leq m \leq 1,$$

$$u = 2 \arccos\left[cn\left(\frac{x_3 + h_1(\omega)}{m}, m\right)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \qquad 0 \leq m \leq 1,$$

де $h_1(\omega)$ — довільна двічі диференційовна функція, ω — довільний розв'язок системи (15).

5. Точні розв'язки рівняння Ейконала. Розглянемо рівняння Ейконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1. \tag{27}$$

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, редукує рівняння (27) до рівняння

$$4\omega_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 - 1 = 0. \tag{28}$$

Узагальнений анзац будемо шукати у вигляді $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$. Цей анзац редукує рівняння (27) до рівняння

$$4\omega_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 + 2(\nabla\omega_1\cdot\nabla\omega_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + (\nabla\omega_2)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\right)^2 = 1. \tag{29}$$

Накладемо на рівняння (29) умову, щоб воно збігалося з редукованим рівнянням (28). Очевидно, ця умова буде виконуватись, якщо на змінну ω_2 накласти умови

$$(\nabla\omega_2)^2 = 0, \quad \nabla\omega_1\cdot\nabla\omega_2 = 0. \tag{30}$$

Розв'язавши систему (30), знаходимо явний вигляд змінної ω_2. Легко бачити, що довільна функція від розв'язку (30) — розв'язок системи (30). Проінтегрувавши рівняння (28), знаходимо $(u + C)^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, де C — довільна стала. Ми отримуємо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння Ейконала, якщо C вважати довільним розв'язком системи (30).

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$, $\omega_2 = x_3$, узагальнюється в такий спосіб. Нехай ω_3 — довільний розв'язок системи рівнянь

$$\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}\right)^2 = 0, \tag{31}$$

$$x_0\frac{\partial\omega_3}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2} = 0.$$

Тоді рівняння $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ редукує рівняння Ейконала до рівняння

$$4\omega_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\right)^2 = 1. \tag{32}$$

Рівняння (32) має розв'язки [12]

$$\varphi = \frac{C_1^2+1}{2C_1}\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2} + \frac{C_1^2-1}{2C_1}x_3 + C_2,$$

$$(\varphi + C_2)^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + C_1)^2,$$

які легко знайти методом симетрійної редукції рівняння (32) до звичайних диференціальних рівнянь. Замінивши довільні сталі C_1 і C_2 довільними функціями $h_1(\omega_3)$ і $h_2(\omega_3)$, одержимо більш широкі класи точних розв'язків рівняння Ейконала:

$$u = \frac{h_1(\omega_3)^2+1}{2h_1(\omega_3)}\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2} + \frac{h_1(\omega_3)^2-1}{2h_1(\omega_3)}x_3 + h_2(\omega_3),$$

$$(u + h_2(\omega_3))^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h_1(\omega_3))^2.$$

Відзначимо, що оскільки рівняння Борна – Інфельда є диференціальним наслідком рівняння Ейконала [3], то цим побудовані також широкі класи точних розв'язків рівняння Борна – Інфельда.

Розглянемо наступне рівняння Ейконала:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = -1. \tag{33}$$

Симетрійний анзац $u = \varphi(\omega_1)$, $\omega_1 = x_3$, редукує рівняння (33) до рівняння $\dot{\varphi}^2 = 1$. Редуковане рівняння має розв'язок $\varphi = \varepsilon x_3 + C$, де $\varepsilon = \pm 1$, C — довільна константа. Замінивши сталу C довільною функцією $h(\omega_2)$, де ω_2 — розв'язок рівняння

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 0,$$

одержимо більш загальну сім'ю розв'язків рівняння (33):

$$u = \varepsilon x_3 + h(\omega_2).$$

6. Про точні розв'язки рівняння типу Шредінгера. Розглянемо рівняння

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = k\Box\psi + \psi F(|\psi|), \tag{34}$$

де $\psi = \psi(t, x_0, \ldots, x_n)$,

$$\Box\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}.$$

Симетрійний анзац $\psi = \varphi(t)$ редукує рівняння (34) до рівняння

$$i\dot\varphi - \varphi F(|\varphi|) = 0. \tag{35}$$

Цей анзац є частинним випадком більш загального анзацу

$$\psi = \varphi(t, \omega). \tag{36}$$

де ω — довільний розв'язок системи рівнянь

$$i\frac{\partial\omega}{\partial t} = k\Box\psi, \tag{37}$$

$$(\nabla\omega)^2 = 0.$$

Отже, формула (36) задає сім'ю розв'язків нелінійного багатовимірного рівняння (34), якщо φ задовольняє (35), а ω — розв'язок системи (37).

Формула

$$\psi = \exp\left\{-\frac{i\left(x_0^1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2\right)}{4kt}\right\}\varphi(\omega_1, \omega_2) \tag{38}$$

є анзацем для рівняння (34), якщо $\omega_1 = t$, а ω_2 задовольняє рівняння (37) і

$$x_0\frac{\partial\omega_2}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n} = 0. \tag{39}$$

Редуковане рівняння має вигляд

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(n+1)i}{2t}\varphi - \varphi F(|\varphi|) = 0. \tag{40}$$

Отже, розв'язавши рівняння (40) і систему рівнянь (37), (39) і підставивши ці розв'язки у формулу (38), одержимо широкі класи точних розв'язків рівняння (34).

7. Система нелінійних хвильових рівнянь Даламбера і Ейконала. Розглянемо систему рівнянь

$$\Box u = F(u),$$

$$(\nabla u)^2 = -1, \tag{41}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Система (41) була предметом досліджень в [14, 20], де доведено, зокрема, що вона сумісна тоді і тільки тоді, коли $F(u) = N(u+C)^{-1}$, де C — довільна константа, T — дискретний параметр, який набуває одного із значень 0, 1, 2, 3. Побудуємо широкі класи точних розв'язків системи (41) у вигляді $F(u) = 0$ і $F(u) = 3u^{-1}$. Очевидно, система

$$\Box u = 0, \quad (\nabla u)^2 = -1 \tag{42}$$

має інваріантний розв'язок $u = \varepsilon x_3 + C_1$, C_1 — довільна константа. Отже, згідно з підпунктом 4 п. 2 система (42) має сім'ю точних розв'язків $u = \varepsilon x_3 + h_1(\omega)$, де функція $\omega = \omega(x_0, x_1, x_2)$ — довільний розв'язок системи $\Box\omega = 0$, $(\nabla\omega)^2 = 0$. Система

$$\Box u = 3u^{-1}, \quad (\nabla u)^2 = -1 \tag{43}$$

має інваріантний розв'язок $u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Подіявши груповим перетворенням на цей розв'язок, отримаємо такий розв'язок: $u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + C)^2$. Отже, згідно з підпунктом 4 п.2 система (43) має наступну сім'ю розв'язків:

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - (x_3 + h(\omega))^2,$$

де функція $\omega = \omega(x_0, x_1, x_2)$ — розв'язок системи

$$\Box\omega_3 = 0, \quad (\nabla\omega)^2 = 0,$$

$$x_0\frac{\partial\omega}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2} = 0.$$

Узагальнення цих результатів для довільного числа n цілком очевидне.

1. *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. – London; New York: Acad. Press, 1982. – 400 p.
2. *Olver J.* Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986. – 497 p.
3. *Fushchych W. I., Shelten V. M. and Serov N. I.* Symmetry analysis and exact of equations of the nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 336 p.
4. *Fushchych W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of Mawell's equations. – Dordrecht: Reidel, 1987. – 214 p.
5. *Fushchych W. I., Tsyfra I. M.* On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1987. – **20**, № 2. – L45 – L48.
6. *Levi D., Winternitz P.* Non-cassical symmetry reduction — example of the Boussinesq equation // J. Phys. A. – 1989. – **22**, № 2. – P. 2915 – 2924.
7. *Фущич В. І., Баранник А. Ф.* Новий метод побудови точних розв'язків нелінійних хвильових рівнянь // Допов. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 48 – 51.
8. *Barannyk A. F., Yuryk I. I.* On some exact solutions of nonlinear wave equations // Proc. II Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Math. Phys." – 1997. – **1**, – P. 98 – 107.
9. *Barannyk A. F., Yuryk I. I.* On a new method for sonstructing the exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical phisics // J. Phis. A: Math. and Gen. – 1998. – **31**. – P. 4899 – 4907.
10. *Баранник А. Ф., Юрик І. І.* Класифікація максимальних підалгебр рангу n конформної алгебри $AC(1, n)$ // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 459 – 470.
11. *Grunland A. M., Harnad J. and Winternitz P.* Symmetry reduction of nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phis. – 1984. – **25**, № 4. – P. 791 – 806.
12. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ группы Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
13. *Cieciura G. and Grunland A.* A certain class of solutions of the nonlinear wave equations // J. Math. Phis. – 1984. – **25**, № 12. – P. 3460 – 3469.
14. *Фущич В. И., Жданов Р. З.* Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 288 с.
15. *Collins C. B.* Complex potential equations. I.A. technique for solutions // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1976. – № 9. – P. 225 – 236.
16. *Смирнов В. И., Соболев С. Л.* Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР. – 1932. – № 20. – С. 37 – 42.
17. *Смирнов В. И., Соболев С. Л.* О применении нового метода к изучению упругих колебаний // Там же. – 1933. – № 29. – С. 43 – 51.
18. *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhauss H.* Subgroups of the Poincare group and their invariants // J. Math. Phis. – 1976. – **17**, № 6. – P. 977 – 985.
19. *Фущич В. І., Баранник А. Ф., Москаленко Ю. Д.* Про нові точні розв'язки многомірного нелінійного рівняння Даламбера // Допов. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 33 – 37.
20. *Фущич В. И., Жданов Р. З., Ревенко И. В.* Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения Эйконала // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 11. – С. 1471 – 1487.

Одержано 21.10.97,
після доопрацювання — 26.02.98