УДК 517.929.4

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович (Днепропетр. ун-т)

О НАИЛУЧШИХ L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ СПЛАЙНАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

We find exact asymptotics (as $n \to \infty$) of the best L_1-approximations of classes W_1^r of periodic functions by splines $s \in S_{2n,r-1}$ ($S_{2n,r-1}$ is a set of 2π-periodic polynomial splines having order $r-1$, defect one, and knots at the points $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$) such that $\bigvee_0^{2\pi} s^{(r-1)} \le 1 + \varepsilon_n$, where $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a decreasing sequence of positive numbers such that $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ and $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Знайдено точну асимптотику (при $n \to \infty$) найкращих L_1-наближень класів W_1^r періодичних функцій сплайнами $s \in S_{2n,r-1}$ ($S_{2n,r-1}$ — множина 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку $r-1$, дефекту 1, з вузлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$) такими, що $\bigvee_0^{2\pi} s^{(r-1)} \le 1 + \varepsilon_n$, де $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — спадна послідовність додатних чисел така, що $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ і $\varepsilon_n \to 0$, якщо $n \to \infty$.

1. Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[0,2\pi]}$.

Через W_p^r, $r = 1, 2, \ldots$, обозначим класс функций $f \in L_\infty$ таких, что $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} := f$) локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_p \le 1$; W_v^r — класс функций $f \in L_\infty$ таких, что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r)}) \le 1$. Кроме того, пусть $S_{2n,r}$, $n = 1, 2, \ldots$, — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_p$ множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$ в метрике пространства L_p — это величина

$$E(f, \mathfrak{N})_p = \inf\{\|f - u\|_p : u \in \mathfrak{N}\}.$$

Наилучшее L_p-приближение функции f подпространством констант обозначим через $E(f)_p$.

Наилучшее приближение класса функций $\mathfrak{M} \subset L_p$ множеством $\mathfrak{N}$ в метрикс L_p определяется равенством

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_p = \sup\{E(f, \mathfrak{N})_p : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величина

$$d_n(\mathfrak{M}, L_p) = \inf\{E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_n)_p\colon \mathfrak{N}_n \text{— подпространства } L_p,\ \dim \mathfrak{N}_n \le n\}$$

называется n-поперечником по Колмогорову [1] класса $\mathfrak{M}$ в пространстве L_p. Пусть еще $\mathfrak{M}' \subset L_p$ — некоторый класс функций. Положим

$$d_n(\mathfrak{M}, L_p, \mathfrak{M}')_p =$$

$$= \inf\{E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_n \cap \mathfrak{M}')_p\colon \mathfrak{N}_n \text{— подпространства } L_p,\ \dim \mathfrak{N}_n \le n\}. \qquad (1)$$

Величины типа (1) введены в рассмотрение В. Н. Коноваловым [2]. Как известно (см., например, [3, с. 249]), для любых $r \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$ при $n \to \infty$

$$d_n(W_p^r, L_p) \asymp n^{-r}. \qquad (2)$$

Очевидно также, что при любом $r \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$

$$d_n(W_2^r, L_2, W_2^r) \asymp n^{-r}. \qquad (3)$$

В. Н. Коновалов [2] показал, что в отличие от (2) и (3) для каждого $r = 2, 3, \ldots$

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r) \asymp n^{-2}, \qquad n \to \infty.$$

Пусть $\varphi_{\lambda,0}(x) = \operatorname{sgn}\sin\lambda x$ и $\varphi_{\lambda,r}(x)$ — r-й $2\pi/\lambda$-периодический интеграл от $\varphi_{\lambda,0}(x)$, имеющий нулевое среднее значение на периоде.

В. Ф. Бабенко [4] было найдено точное значение величины $E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_v^{r-1})_1$:

$$E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_v^{r-1})_1 = \varphi_{1,r}(t_{\max}), - \varphi_{1,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right),$$

где $t_{\max} \in \mathbb{R}\colon \|\varphi_{1,r}\|_\infty = \varphi_{1,r}(t_{\max})$, и доказано, что при $n \to \infty$

$$d_n(W_1^r, L_1, W_v^{r-1}) \asymp E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_v^{r-1})_1 \asymp n^{-2}. \qquad (4)$$

Кроме того, в [5] найдено точное значение величины $E(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r)_1$ и отмечено, что при $n \to \infty$

$$d_n(W_1^r, L_1, W_1^r) \asymp n^{-2}. \qquad (5)$$

С. Б. Стечкин высказал предположение, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ при всех $r = 2, 3, \ldots$ будет

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, (1+\varepsilon) W_\infty^r) \asymp n^{-r}, \qquad n \to \infty. \qquad (6)$$

Справедливость этой гипотезы была доказана В. Ф. Бабенко в [6]. При этом В. Ф. Бабенко доказал следующее более общее утверждение.

Теорема А. *Пусть* $r = 2, 3, \ldots$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ *— невозрастающая последовательность положительных чисел. Тогда при* $n \to \infty$

$$E(W_\infty^r, S_{2n,r} \cap (1+\varepsilon_n) W_\infty^r)_\infty \asymp \begin{cases} n^{-r}\varepsilon^{1-\frac{r}{2}}, & \varepsilon_n n^2 \to \infty; \\ n^{-2}, & \varepsilon_n n^2 = O(1). \end{cases}$$

***Следствие* 1.** *При всех* $r = 2, 3, \ldots$ *и любом* $\varepsilon \ge 0$

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, (1+\varepsilon) W_\infty^r) \asymp n^{-r}.$$

Следующий результат, аналогичный теореме А, для L_1-приближений был получен В. Ф. Бабенко в [7].

Теорема В. *Пусть* $r = 3, 4, \ldots$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел. Тогда при* $n \to \infty$

$$E(W_1^r, S_{2n, r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_v^{r-1})_1 \asymp \begin{cases} n^{-r}\varepsilon^{1-\frac{r}{2}}, & \varepsilon_n n^2 \to \infty; \\ n^{-2}, & \varepsilon_n n^2 = O(1). \end{cases}$$

Из теоремы В вытекает такое следствие.

***Следствие* 2.** *При всех* $r = 3, 4, \ldots$ *и любом* $\varepsilon > 0$

$$d_n(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon) W_v^{r-1}) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

В данной статье получена точная асимптотика (при $n \to \infty$) величины $E(W_1^r, S_{2n, r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_v^{r-1})_1$ в случае $\varepsilon_n n^2 \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$.

2. Основные результаты.

Теорема. *Пусть* $r = 3, 4, \ldots$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел такая, что* $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ *и* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$E(W_1^r, S_{2n, r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_v^{r-1})_1 = \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

где

$$C_r = \left(\frac{\pi^2 \|\varphi_{1,r-2}\|_\infty}{4r}\right)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r-2}{2\|\varphi_{1,r}\|_\infty}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Доказательство. Для сокращения записей положим

$$E_n = E(W_1^r, S_{2n, r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_v^{r-1})_1.$$

Мы будем существенно использовать некоторые факты, установленные в ходе доказательства теоремы В в [7]. Для полноты изложения кратко приведем здесь соответствующие рассуждения из [7].

Пусть

$$A_n = \left\{a = (a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}: \sum_{k=1}^{2n} a_k = 0, \ \sum_{k=1}^{2n} |a_k| \le 1\right\}.$$

Любой сплайн $u \in S_{2n, r-1}$ можно представить в виде (см., например, [8], предложение 1.1.5)

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{2n} a_k B_r\left(t - \frac{k\pi}{n}\right),$$

где

$$B_r(x) = \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos\left(mx - \frac{\pi r}{2}\right)$$

— ядро Бернулли; $a_1, \ldots, a_{2m} \in \mathbb{R}$ и $\sum_{k=0}^{2n} a_k = 0$. При этом условие $\bigvee\limits_0^{2\pi}(u^{(r-1)}) \le 1$ означает, что $a = (a_1, \ldots, a_{2n}) \in A_n$.

Применяя теорему двойственности для наилучших L_1-приближений выпуклыми множествами (см. [8], предложение 3.4.4) и учитывая то обстоятельство, что множество $S_{2n,\,r-1} \bigcap (1+\varepsilon_n) W_v^{r-1}$ содержит константы, нетрудно установить, что

$$E_n = \sup_{f \in W_1^r} \sup_{\left\{\substack{\|g\|_\infty = 1 \\ g \perp 1}\right\}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt - (1+\varepsilon_n) \sup_{u \in S_{2n,r-1} \bigcap W_v^{r-1}} \int_0^{2\pi} u(t) g(t)\, dt \right\} =$$

$$= \sup_{\substack{g \in W_\infty^r \\ \|g_+\|_\infty = \|g_-\|_\infty}} \left\{ \|g\|_\infty - (1+\varepsilon_n) \sup_{a \in A_n} \sum_{k=1}^{2n} a_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right\}. \tag{8}$$

Для любой функции $g \in W_\infty^r$ такой, что $E(g)_\infty = \|g\|_\infty$, при подходящем $\lambda \ge 1$ имеем

$$\|g\|_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty. \tag{9}$$

Если в (9) $\lambda > n$, то (см. [9], теорема 5.2.8)

$$\|g\|_\infty - (1+\varepsilon_n) \sup_{a \in A_n} \sum_{k=1}^{2n} a_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) < \left\|\varphi_{n,r}\right\|_\infty = E(W_1^r, S_{2n,\,r-1})_1.$$

Поэтому, вычисляя последнее выражение, в цепочке равенств (8) внешнюю верхнюю грань можно брать только по таким g, для которых в (9) $\lambda \le n$.

Зафиксируем такую функцию g и выберем λ из условия (9). Пусть $t_{\max}$ и $t_{\min}$ — точки максимума и минимума функции $\varphi_{\lambda,r}$, а $t'_{\max}$ и $t'_{\min}$ — точки максимума и минимума функции g. Очевидно, что найдутся числа $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\left|t'_{\max} - \frac{k_1\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad \left|t'_{\min} - \frac{k_2\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Положим $a_{k_1} = 1/2$, $a_{k_2} = -1/2$, $a_k = 0$, если $k \ne k_1, k_2$. Учитывая (9) и используя теорему сравнения Колмогорова (см. [8], теорема 2.4.1), получаем

$$g\left(\frac{k_1\pi}{n}\right) \ge \varphi_{\lambda,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right)$$

и

$$g\left(\frac{k_2\pi}{n}\right) \le \varphi_{\lambda,r}\left(t_{\min} + \frac{\pi}{2n}\right) = -\varphi_{\lambda,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right),$$

так что

$$\sup_{a \in A_n} \sum_{k=1}^{2n} a_k g\left(\frac{k\pi}{n}\right) \ge \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{k_1\pi}{n}\right) - g\left(\frac{k_2\pi}{n}\right)\right] \ge \varphi_{\lambda,r}\left(t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{10}$$

В дальнейшем, не уменьшая общности, для сокращения записей будем считать, что $t_{\max} = 0$, т. е. $\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty = \varphi_{\lambda,r}(0)$.

Сопоставляя (8) – (10), получаем

$$E_n \le \max_{1\le\lambda\le n} F_n(\lambda), \tag{11}$$

где

$$F_n(\lambda) = \varphi_{\lambda,r}(0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{\lambda^r}\left[\varphi_{1,r}(0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right] =$$
$$= \frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^r}\int_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|dt - \frac{\varepsilon_n}{\lambda^r}\varphi_{1,r}(0). \tag{12}$$

Ясно, что

$$F_n'(\lambda) = -\frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\left[r\int_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right|\right] + \frac{\varepsilon_n r}{\lambda^{r+1}}\varphi_{1,r}(0) =$$
$$= -\frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}r\left[\varphi_{1,r}(0) - \varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right] + \frac{\lambda\pi}{2n}\frac{(1+\varepsilon_n)}{\lambda^{r+1}}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right| + \frac{\varepsilon_n r}{\lambda^{r+1}}\varphi_{1,r}(0). \tag{13}$$

Так как $\varphi_{1,r}(0) - \varphi_{1,r}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \asymp n^{-2}$ и $\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| \asymp n^{-1}$ при $n\to\infty$, то, учитывая условие $\varepsilon_n n^2 \to \infty$, убеждаемся, что для достаточно больших n будет $F_n'(1) > 0$.

Функция $\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|$ выпукла вверх на отрезке $[0, \pi/2]$. Поэтому при $r\ge 3$ имеем

$$r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|dt > \frac{\pi}{2}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Отсюда и из (13) получаем, что при достаточно больших n, с учетом того, что $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, будет $F_n'(n) < 0$. Значит, если $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, то при всех достаточно больших n функция $F_n(\lambda)$ достигает максимума внутри отрезка $[1, n]$.

Учитывая (13), необходимое условие $F_n'(\lambda) = 0$ экстремума функции $F_n(\lambda)$ во внутренней точке отрезка $[1, n]$ можно записать в виде

$$(1+\varepsilon_n)r\int_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|dt - (1+\varepsilon_n)\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right| = \varepsilon_n r\varphi_{1,r}(0). \tag{14}$$

Если

$$\Phi_n(\lambda) := \varepsilon_n r\varphi_{1,r}(0) - (1+\varepsilon_n)\left[r\int_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right|\right],$$

то

$$\Phi_n'(\lambda) = -\frac{(1+\varepsilon_n)\pi}{2n}\left[(r-1)\int_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}}\left|\varphi_{1,r-2}(t)\right|dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-2}\left(\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right|\right]. \tag{15}$$

При $r > 3$ функция $\varphi_{1,r-2}$ выпукла на отрезке $[0, \pi/2]$. Отсюда и из (15) следует $\Phi_n'(\lambda) < 0 \ \forall \lambda \in (1, n)$.

Если $r = 3$, справедливость неравенства $\Phi_n'(\lambda) < 0$ следует из того, что функция $\varphi_{1,r-2} = \varphi_{1,1}$ линейна на $[0, \pi/2]$ и, монотонно возрастая, с ростом t стремится к нулю при $t \to \pi/2 - 0$.

Таким образом, при $r \geq 3$ и достаточно больших n условие (14) выполняется в единственной точке $\lambda_n \in (1, n)$, которая является точкой максимума функции $F_n(\lambda)$.

Учитывая, что при $r \geq 3$ функция $\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|$ выпукла вверх на отрезке $[0, \pi/2]$, имеем

$$r \int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt - \frac{\lambda_n\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right| \leq (r-1)\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \leq$$

$$\leq (r-1)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} t\,dt = (r-1)\frac{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2.$$

Отсюда с учетом (14) получаем

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \geq \frac{2\varepsilon_n r\varphi_{1,r}(0)}{(1+\varepsilon_n)(r-1)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$r \int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt - \frac{\lambda_n\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right| \geq (r-2)\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \geq$$

$$\geq \frac{(r-2)\left\|\varphi_{1,r-1}\right\|_\infty}{\pi/2}\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} t\,dt = \frac{(r-2)\left\|\varphi_{1,r-1}\right\|_\infty}{\pi}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2,$$

и с учетом (14) получаем

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon_n r\varphi_{1,r}(0)\pi}{(1+\varepsilon_n)(r-2)\left\|\varphi_{1,r-1}\right\|_\infty}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$c_1 n\sqrt{\varepsilon_n} \leq \lambda_n \leq c_2 n\sqrt{\varepsilon_n} \tag{18}$$

(c_1 и c_2 — положительные константы, не зависящие от n).

Из (18) получаем

$$\frac{\pi\lambda_n}{2n} \asymp \frac{\pi\sqrt{\varepsilon_n}}{2}$$

при $n \to \infty$. Так как по условию $\varepsilon_n \to 0$, устанавливаем, что $\dfrac{\pi\lambda_n}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|$ выпукла вверх на $\left[0, \dfrac{\lambda_n\pi}{2n}\right]$, то

$$\int_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \;\geq\; \frac{1}{2}\frac{\lambda_n\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|.$$

Ясно, что при $n \to \infty$

$$\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right| \;=\; \left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \frac{\lambda_n\pi}{2n} + o\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right). \tag{19}$$

Поэтому

$$\int_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \;\geq\; \frac{1}{2}\frac{\lambda_n\pi}{2n}\left(\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \frac{\lambda_n\pi}{2n} + o\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right) \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty + o\left(\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\right).$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \;=\; \int_0^{\frac{\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|}{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt + \int_{\frac{\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|}{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}}^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \;\leq$$

$$\leq\; \frac{1}{2}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right| \frac{\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|}{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty} + \left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right| \left(\frac{\lambda_n\pi}{2n} - \frac{\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|}{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}\right) \;=$$

$$=\; \left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right| \left(\frac{\lambda_n\pi}{2n} - \frac{1}{2}\frac{\left|\varphi_{2,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|}{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}\right) \;=$$

$$=\; \left(\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \frac{\lambda_n\pi}{2n} + o\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}\left(\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \frac{\lambda_n\pi}{2n} + o\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right)\right) \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\right).$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\int_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \left|\varphi_{1,r-1}(t)\right| dt \;=\; \frac{1}{2}\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty \left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\right). \tag{20}$$

Сопоставляя (20) и (14), получаем

$$(1+\varepsilon_n)\left[\left(\frac{r}{2}-1\right)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty + o\left(\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\right)\right] \;=\; \varepsilon_n r \varphi_{1,r}(0).$$

Отсюда будем иметь

$$(1+\varepsilon_n)\left(\frac{r}{2}-1\right)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\left[\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty + o(1)\right] = \varepsilon_n r\varphi_{1,r}(0)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 = \frac{\varepsilon_n r\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left(\frac{r}{2}-1\right)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}(1+o(1)), \tag{21}$$

или

$$\lambda_n = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_n r\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{\left(\frac{r}{2}-1\right)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}(1+o(1))\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Учитывая (12), (14), (19) и (22), можем записать

$$F_n(\lambda_n) = \frac{1+\varepsilon_n}{\lambda_n^r}\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\left|\varphi_{1,r-1}(t)\right|dt - \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n}\varphi_{1,r}(0) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^r}\left[\frac{1+\varepsilon_n}{r}\frac{\lambda_n\pi}{2n}\left|\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right|\right] = \frac{1+\varepsilon_n}{r}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\frac{1}{\lambda_n^{r-2}}\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty(1+o(1)) =$$

$$= \frac{1+\varepsilon_n}{r}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{r-2}\left(\frac{\left(\frac{r}{2}-1\right)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{\varepsilon_n r\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}\cdot\frac{1}{1+o(1)}\right)^{\frac{r}{2}-1}\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty(1+o(1)) =$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^r\varepsilon_n^{r/2-1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^r\frac{\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{r}\left(\frac{\left(\frac{r}{2}-1\right)\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{r\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}\right)^{\frac{r}{2}-1} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{r-2}{2\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}\right)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{n^r\varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)).$$

Полагая

$$C_r = \left(\frac{\pi^2\left\|\varphi_{1,r-2}\right\|_\infty}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{r-2}{2\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}\right)^{\frac{r}{2}-1} \tag{23}$$

и учитывая (11), имеем

$$E_n \le \frac{C_r}{n^r\varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)). \tag{24}$$

Нужная оценка сверху для E_n получена.

Получим для E_n оценку снизу. Из (8), учитывая, что $\varphi_{l,r}(\cdot+\alpha)\in W_\infty^r$ $\forall l = 1, \ldots, n$ и $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, получаем

$$E_n \geq \sup_{\alpha} \max_{l=\overline{1,n}} \left\{ \left\| \varphi_{l,r} \right\| - (1+\varepsilon_n) \sup_{a \in A_n} \sum_{k=1}^{2n} a_k \varphi_{l,r}\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right) \right\} \geq$$

$$\geq \max_{l=\overline{1,n}} \left\{ \varphi_{l,r}(0) - (1+\varepsilon_n) \max_{k=1,\ldots,2n} \left| \varphi_{l,r}\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) \right| \right\} =$$

$$= \max_{l=1,\ldots,n} \left\{ \varphi_{l,r}(0) - (1+\varepsilon_n) \varphi_{l,r}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} = \max_{l=1,\ldots,n} F_n(l). \tag{25}$$

Выберем $l_n \in \{1, \ldots, n\}$ так, чтобы

$$l_n - 1 \leq \lambda_n \leq l_n,$$

где λ_n — единственная точка из $(1, n)$ такая, что $F_n'(\lambda_n) = 0$.

Тогда, учитывая (12), (14), (18) и (19), имеем

$$E_n \geq F_n(l_n) \geq \frac{1}{l_n^r} \left[-\varepsilon_n \varphi_{1,r}(0) + (1+\varepsilon_n) \int_0^{\frac{\lambda_n \pi}{2n}} \left| \varphi_{1,r-1}(t) \right| dt \right] =$$

$$= \frac{1}{r l_n^r} (1+\varepsilon_n) \frac{\lambda_n \pi}{2n} \left| \varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda_n \pi}{2n}\right) \right| = \frac{1}{r l_n^r} (1+\varepsilon_n) \left(\frac{\lambda_n \pi}{2n}\right)^2 \left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty (1+o(1)) =$$

$$= \frac{1+\varepsilon_n}{r} \frac{(l_n-1)^r}{l_n^r} \frac{1}{(l_n-1)^r} \left(\frac{\lambda_n \pi}{2n}\right)^2 \left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty (1+o(1)) \geq$$

$$\geq \frac{1+\varepsilon_n}{r} \left(\frac{l_n-1}{l_n}\right)^r \frac{1}{\lambda_n^{r-2}} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty (1+o(1)).$$

Используя полученное ранее выражение (22) для λ_n, находим

$$E_n \geq \left(\frac{l_n-1}{l_n}\right)^r \frac{1+\varepsilon_n}{r} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{r-2} \times$$

$$\times \left(\frac{\left(\frac{r}{2}-1\right) \left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty}{\varepsilon_n r \left\| \varphi_{1,r} \right\|_\infty} (1+o(1)) \right)^{\frac{r}{2}-1} \left(\left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty (1+o(1)) \right) =$$

$$= \left(\frac{l_n-1}{l_n}\right)^r \frac{1}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^r \frac{\left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty}{r} \left(\frac{\left(\frac{r}{2}-1\right) \left\| \varphi_{1,r-2} \right\|_\infty}{\varepsilon_n r \left\| \varphi_{1,r} \right\|_\infty} \right)^{\frac{r}{2}-1} \right] (1+o(1)). \tag{26}$$

Из левой части системы неравенств (18) следует, что при $n \to \infty$ $\lambda_n \to \infty$, а значит, и $l_n \to \infty$, поэтому

$$\left(\frac{l_n-1}{l_n}\right)^r \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому из (26) с учетом (23) следует оценка

$$E_n \geq \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)). \tag{27}$$

Из (24) и (27) вытекает

$$E_n = \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)).$$

Теорема доказана.

1. *Колмогоров А. Н.* О наилучшем приближении функций заданного функционального класса // Математика и механика. Избр. труды. – М.: Наука, 1985. – С. 186 – 189.
2. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, вып. 3. – С. 369 – 380.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
4. *Бабенко В. Ф.* Приближение в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9 – 18.
5. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие L_1-приближения классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1410 – 1413.
6. *Бабенко В. Ф.* О наилучшем равномерном приближении сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. – 1991. – **50**, вып. 6. – С. 24 – 29.
7. *Бабенко В. Ф.* О наилучших L_1-приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Там же. – 1992. – **51**, вып. 5 – С. 12 – 19.
8. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 20.02.97