УДК 517.98

Ю. М. Арлинский (Восточноукр. ун-т, Луганск)

МАКСИМАЛЬНЫЕ СЕКТОРИАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ ЗАМКНУТЫЕ ФОРМЫ*

A description of all closed sesquilinear forms associated with m-sectorial extensions of a densely defined sectorial operator with the vertex at the origin is obtained.

Наведено опис усіх замкнених півторалінійних форм, асоційованих з m-секторними розширеннями щільно визначеного секторного оператора з вершиною в нулі.

1. Введение. Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Согласно Т. Като [1] линейный оператор S в H с областью определения $\mathcal{D}(S)$ называется секториальным с вершиной в нуле и полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$, если его числовая область $W(S) = \{(Sf, f),\ f \in \mathcal{D}(S),\ \|f\| = 1\}$ есть подмножество сектора $\Theta(\alpha) = \{z : |\arg z| \leq \alpha\}$. В дальнейшем такие операторы будем называть α-секториальными (α-сект.).

Таким образом, 1) 0-сект. операторы — неотрицательные эрмитовы операторы; 2) всякий α-сект. оператор является аккретивным [1] и справедливо также

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{Re}(Sf, f) \geq |\operatorname{Im}(Sf, f)| \quad \forall f \in \mathcal{D}(S). \tag{1}$$

Максимально аккретивные (m-аккретивные [1]) α-сект. операторы будем называть m-α-секториальными. В [1] m-аккретивный оператор, являющийся α-секториальным при некотором $\alpha \in [0, \pi/2)$, называется m-секториальным.

Известно [1, 2], что m-α-сект. операторы плотно определены и их резольвентные множества содержат внешность сектора $\Theta(\alpha)$, m-α-сект. операторы и только они являются генераторами сжимающих, аналитических внутри сектора $\Theta(\pi/2 - \alpha)$ однопараметрических полугрупп.

Пусть на линеале $\mathcal{D}[\tau] \subseteq H$ определена полуторалинейная секториальная форма τ с вершиной в нуле и полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$ (α-секториальная форма), $\tau[u] = \tau[u, u]$ — соответствующая квадратичная форма. Тогда справедливы неравенства [1]

$$|\tau[u, v]|^2 \leq (1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 \operatorname{Re}\tau[u] \operatorname{Re}\tau[v] \quad \forall u, v \in \mathcal{D}[\tau]. \tag{2}$$

Согласно первой теореме о представлении [1] для плотно определенной замкнутой [1] α-секториальной формы τ существует m-α-сект. оператор T_τ, ассоциированный с формой τ в следующем смысле:

$$(T_\tau u, v) = \tau[u, v] \quad \forall u \in \mathcal{D}(T_\tau), \quad \forall v \in \mathcal{D}[\tau],$$

причем $\mathcal{D}(T_\tau)$ является ядром формы τ. С сопряженной формой $\tau^*[u, v] = \overline{\tau[v, u]}$ ассоциирован сопряженный m-сект. оператор T_τ^*.

* Выполнена при частичной поддержке Международной Соросовской программы поддержки образования в области точных наук (грант АРИ 051009).

Если S — α-сект. оператор, то α-сект. форма (Su, v), $u, v \in \mathcal{D}(S)$, допускает замыкание [1]. В дальнейшем это замыкание будем обозначать $S[u, v]$, а его область определения — $\mathcal{D}[S]$.

Если S — плотно заданный α-сект. оператор, то оператор S_F, ассоциированный с формой $S[u, v]$, называется фридрихсовым расширением оператора S [1], причем для любого m-сект. расширения $\tilde{S}$ оператора S справедливо [1] $\mathcal{D}[\tilde{S}] \supseteq \mathcal{D}[S] = \mathcal{D}[S_F]$, $\tilde{S}[u, v] = S_F[u, v] = S[u, v] \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}[S]$.

Мы рассматриваем задачу об описании m-сект. расширений и ассоциированных с ними замкнутых форм для плотно заданного α-сект. оператора.

Наиболее полные результаты, относящиеся к этой задаче, получены для случая неотрицательного симметрического (н. с.) оператора S и его собственных расширений $\tilde{S}\left(S \subset \tilde{S} \subset S^*\right)$.

По теореме М. Г. Крейна [3] неотрицательный самосопряженный оператор $\tilde{S}$ является расширением н. с. оператора S, если и только если

$$(S_F + aI)^{-1} \le (\tilde{S} + aI)^{-1} \le (S_N + aI)^{-1}$$

хотя бы при одном $a > 0$, где S_N — так называемое мягкое неотрицательное самосопряженное расширение S_N, которое в случае положительно определенного (п. о.) S имеет вид $S_N = S^* \mid (\mathcal{D}(S) \dotplus \operatorname{Ker} S^*)$. Указанные выше неравенства эквивалентны тому, что расширение S_N является минимальным в следующем смысле [3, 4]:

для любого неотрицательного самосопряженного расширения $\tilde{S}$ оператора S справедливо $\mathcal{D}[\tilde{S}] \subseteq \mathcal{D}[S_N]$, $\tilde{S}[u] \ge S_N[u] \ \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$.

В [4] предложена отличная от [3] конструкция расширения S_N и название „нейманово расширение".

Все неотрицательные самосопряженные расширения п. о. оператора S и ассоциированые с ними формы параметризованы М. Ш. Бирманом [5] с помощью „граничных операторов", действующих в подпространстве $\operatorname{Ker} S^*$.

В [6 – 18] различные классы собственных расширений н. с. оператора охарактеризованы в терминах абстрактных граничных условий, а в [11] — в этих же терминах все m-аккретивные, в том числе и несобственные, расширения п. о. оператора с конечными дефектными числами.

Резольвенты неотрицательных самосопряженных и m-сект. собственных расширений описаны в [19, 20].

Р. Филлипс [21] для описания m-аккретивных расширений привлек геометрию пространств с индефинитной метрикой. Метод Филлипса в [22] реализован для описания m-аккретивных граничных задач для обыкновенного дифференциального оператора, а также в [11] — для абстрактного случая п. о. оператора.

В настоящей статье для плотно заданного α-сект. оператора S определяется аналогично [4] нейманово расширение S_N, установлены аналоги результатов из [3 – 5], касающиеся описания областей определений замкнутых форм, ассоциированных с m-сект. расширениями $\tilde{S}$ оператора S. Определяется класс m-сект. расширений $\mathfrak{S}_*(S)$, для которого установлено его совпадение (в случае трансверсальности фридрихсова и нейманова расширений) с множеством всех m-сект. расширений дуальной пары α-сект. операторов (S, S_*), где $S_* = S^* \mid \left(\mathcal{D}(S_F^*) \cap \mathcal{D}(S_N^*)\right)$.

Основным результатом является описание всех замкнутых форм, ассоциированных с m-сект. расширениями оператора S, которое проведено в терминах так называемой граничной пары $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ оператора S и замкнутых форм во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Часть результатов работы анонсирована в [23].

Пусть $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ — банахово пространство всех непрерывных линейных операторов, определенных на гильбертовом пространстве H_1 со значениями в гильбертовом пространстве H_2, $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H, H)$; $\mathcal{D}(B)$, $\mathcal{R}(B)$, $\operatorname{Ker} B$ и $\rho(B)$ — соответственно область определения, область значений, ядро и резольвентное множество линейного оператора B.

Если T — m-сект. оператор, то его „ реальную часть" [1], т. е. неотрицательный самосопряженный оператор, ассоциированный с замкнутой неотрицательной формой $T_R[u, v] = (T[u, v] + \overline{T[v, u]})/2$, будем обозначать T_R. Справедливо равенство [1, 2]

$$T = T_R^{1/2}(I + iG)T_R^{1/2}, \tag{3}$$

где $G = G^* \in \mathcal{L}\left(\overline{\mathcal{R}(T)}\right)$, кроме того,

$$T[u, v] = \left((I + iG)T_R^{1/2}u, T_R^{1/2}v\right) \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}[T] = \mathcal{D}(T_R^{1/2}).$$

2. Нейманово расширение. В дальнейшем S — плотно заданный замкнутый α-сект. оператор в H.

Приведем конструкцию и свойства его нейманова m-α-сект. расширения, которые полностью аналогичны случаю $\alpha = 0$, рассмотреному Т. Андо и К. Нишио [4].

Пусть $H_N = \overline{\mathcal{R}(S)}$, P_N — ортопроектор на H_N. Из (2) для формы (Su, v) следует, что корректно определен оператор $Q(S\varphi) = P_N\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(S)$, являющийся плотно заданным в H_N α-сект. оператором.

Пусть Q_F — фридрихсово расширение Q в H_N. Так как $\mathcal{R}(Q)$ плотно в H_N, то

$$\operatorname{Ker} Q_F = \{0\}. \tag{4}$$

Используя (4), определим оператор

$$S_N = Q_F^{-1}P_N, \tag{5}$$

являющийся m-α-сект. расширением S. Следуя [4], будем называть S_N неймановым расширением S.

Из определения замыкания формы $(S\varphi, \psi)$ [1] имеем

$$\inf\{\|u - \varphi\|^2 + \operatorname{Re} S[u - \varphi],\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[S]. \tag{6}$$

Поэтому, если S_{FR} — реальная часть S_F, то

$$\mathcal{R}(S_{FR}^{1/2}) = \{f \in H:\ \sup[|(f, \varphi)|^2/\operatorname{Re}(S\varphi, \varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)] < \infty\}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если S — плотно заданный замкнутый секториальный оператор и S_N — его нейманово расширение, то:*

1) $\mathcal{D}[S_N] = \{u \in H:\ \sup[|(u, S\varphi)|^2/\operatorname{Re}(S\varphi, \varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)] < \infty\};$ (8)

2) *для любого $u \in \mathcal{D}(S_N)$ выполняется равенство*

$$\inf\{\|S_N u - S\varphi\|^2 + \operatorname{Re}(S_N(u - \varphi), u - \varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} = 0; \tag{9}$$

3) *для любого m-сект. расширения $\tilde{S}$ оператора S справедливо*

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] \subseteq \mathcal{D}[S_N];$$

4) *если линеал $\mathcal{R}(S)$ замкнут, то*

$$\mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S) + \operatorname{Ker} S^*. \tag{10}$$

$$S_N(\varphi + \varphi_0) = S\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S), \quad \forall\, \varphi_0 \in \operatorname{Ker} S^*. \tag{11}$$

В частности, если квадратичная форма $\operatorname{Re}(S\varphi, \varphi)$ *является положительно определенной, то*

$$\mathcal{D}[S_N] = \mathcal{D}[S] \dotplus \operatorname{Ker} S^*, \tag{12}$$

$$S_N[u, v] = S[\pi_F u, \pi_F v], \tag{13}$$

где π_F — *проектор в* $\mathcal{D}[S_N]$ *на* $\mathcal{D}[S]$, *соответствующий* (12).

Доказательство. 1. Из (5) имеем $\mathcal{D}[S_N] = \mathcal{D}[Q_F^{-1}] \oplus \operatorname{Ker} S^*$. Нетрудно видеть, что для обратимого m-сект. оператора T верно равенство $\mathcal{D}[T^{-1}] = \mathcal{R}(T_R^{1/2})$, где T_R — реальная часть T, поэтому из (7) для Q_{FR} получаем (8).

2. Равенство (9) следует из определения фридрихсова расширения, применимого к Q_F.

3. Пусть $\tilde{S}$ — m-сект. расширение оператора S. Тогда из (3) получаем

$$\tilde{S} = \tilde{S}_R^{1/2}\left(I + i\tilde{G}\right)\tilde{S}_R^{1/2}, \quad \mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}\left(\tilde{S}_R^{1/2}\right).$$

Для $u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$ имеем

$$|(u, S\varphi)|^2 = \left|\left(\left(I - i\tilde{G}\right)\tilde{S}_R^{1/2}u, \tilde{S}_R^{1/2}\varphi\right)\right|^2 \le$$

$$\le \left\|\left(I - i\tilde{G}\right)\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2 \operatorname{Re}(S\varphi, \varphi) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S).$$

Из (8) следует $u \in \mathcal{D}[S_N]$.

4. Из замкнутости $\mathcal{R}(S)$ следует $Q_F = Q \in \mathcal{L}(H_N)$, поэтому из (5) получаем (10) и (11).

Если квадратичная форма $\operatorname{Re}(S\varphi, \varphi)$ является п. о. на $\mathcal{D}(S)$, то это же верно и для $\operatorname{Re} S[u]$ на $\mathcal{D}[S]$. Поэтому из определения замыкания получаем $\mathcal{D}[S] \cap \operatorname{Ker} S^* = \{0\}$.

Так как из (10) и (11) имеем $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(S_N)$: $(S_N u, v) = (S\pi_F u, \pi_F v)$, то, переходя к замыканию, получаем (12) и (13).

Теорема доказана.

Из (9) с учетом того, что $\mathcal{D}(S_N)$ — ядро формы $S_N[u, v]$, находим

$$\inf\{\operatorname{Re} S_N[u - \varphi],\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[S_N]. \tag{14}$$

Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda = \operatorname{Ker}(S^* - \lambda I)$ дефектное подпространство оператора S.

Предложение 1. 1. *Для любого* $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{D}[S_N] = \mathcal{D}[S] \dotplus (\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathcal{D}[S_N]). \tag{15}$$

2. *Для того чтобы оператор* S *имел единственное* m*-сект. расширение, необходимо для любого* $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$ *и достаточно хотя бы для одного такого* λ *выполнения равенства*

$$\sup\{|(\varphi_\lambda, \varphi)|^2 / \operatorname{Re}(S\varphi, \varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} = \infty \quad \forall\, \varphi_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda \setminus \{0\}.$$

Доказательство. Из теоремы 1 при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ имеем

$$\mathcal{D}[S_N] = \mathcal{D}[S_N - \bar{\lambda} I] \subseteq \mathcal{D}[(S - \bar{\lambda} I)_N] = \mathcal{D}[S] \dotplus \mathfrak{N}_\lambda.$$

Кроме того,

$$\left(I + (\mu - \lambda)\left(S_F^* - \mu I\right)^{-1}\right)\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{N}_\mu \quad \forall\, \lambda, \mu \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha),$$

$|S[\varphi]-\lambda\|\varphi\|^2| \geq d(\lambda)\|\varphi\|^2$, где $d(\lambda)$ — расстояние от точки λ до $\overline{W(S)}$. Отсюда получаем (15). Второе утверждение следует из (15) и (8).

Из теоремы 1 и (15) получаем равенство

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dotplus (\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathcal{D}[\tilde{S}]) \tag{16}$$

для любого m-сект. расширения $\tilde{S}$ оператора S и для произвольного $\lambda \in \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$.

***Замечание* 1.** Как отмечалось, конструкция нейманова расширения заимствована из [4] для неотрицательного эрмитова оператора. Теорема 1 для этого случая имеется в [3 – 5] (п. 3) (для неотрицательных самосопряженных расширений), а предложение 2 для н. с. оператора — в [3] при $\lambda < 0$.

3. Класс $\mathfrak{S}_*(S)$. Пусть $\tilde{S} = \tilde{S}_R^{1/2}(I+i\tilde{G})\tilde{S}_R^{1/2}$ — m-сект. расширение S. Обозначим $\tilde{H} = \overline{\mathcal{R}(S_R^{1/2})}$, $\tilde{H}_0 = \overline{\tilde{S}_R^{1/2}\mathcal{D}(S)}$, $\tilde{H}_0^\perp = \tilde{H} \ominus \tilde{H}_0$, $\tilde{P}_0$, $\tilde{P}_0^\perp$ — ортопроекторы на $\tilde{H}_0$ и $\tilde{H}_0^\perp$ соответственно.

Для нейманова расширения $S_N = S_{NR}^{1/2}(I+iG_N)S_{NR}^{1/2}$ из его определения и (14) получаем

$$H_N = \overline{\mathcal{R}(S)} = \overline{\mathcal{R}(S_{NR}^{1/2})} = \overline{S_{NR}^{1/2}\mathcal{D}(S)}.$$

Из равенства $(\tilde{S}\varphi,\psi) = (S_N\varphi,\psi)$ $\forall\, \varphi,\psi \in \mathcal{D}(S)$ имеем

$$\left((I+i\tilde{G})\tilde{S}_R^{1/2}\varphi, \tilde{S}_R^{1/2}\psi\right) = \left((I+iG_N)S_{NR}^{1/2}\varphi, S_{NR}^{1/2}\psi\right).$$

Отсюда

$$S_{NR}^{1/2}\varphi = \tilde{U}\,\tilde{S}_R^{1/2}\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S), \tag{17}$$

$$\left(\tilde{U}^* G_N \tilde{U} - \tilde{P}_0\tilde{G}\right)\Big|\tilde{H}_0 = 0, \tag{18}$$

где $\tilde{U}$ — изометрическое отображение $\tilde{H}_0$ на H_N.

Для любого $u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$ имеем

$$\sup\{|(u,S\varphi)|^2/\operatorname{Re}(S\varphi,\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} = \left\|\tilde{P}_0(I-i\tilde{G})\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2.$$

Отсюда следует

$$\left\|(I-iG_N)S_{NR}^{1/2}u\right\|^2 = \left\|\tilde{P}_0(I-i\tilde{G})\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{19}$$

Из (19) с учетом (17) и (18) получаем

$$(I-iG_N)S_{NR}^{1/2}u = \tilde{U}\,\tilde{P}_0(I-i\tilde{G})\tilde{S}_R^{1/2}u \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть $\tilde{S}$ — m-сект. расширение S. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{Re}(\tilde{S}u,u) \geq \operatorname{Re} S_N[u]$ $\forall\, u \in \mathcal{D}(\tilde{S})$;

2) *полуторалинейная форма*

$$\tau[u,v] = (\tilde{S}u,v) - S_N[u,v] \tag{21}$$

является секториальной на $\mathcal{D}(\tilde{S})$;

3) *подпространство $\tilde{H}_0$ инвариантно относительно оператора $\tilde{G}$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 3). Из $\operatorname{Re}(\tilde{S}u,u) \geq \operatorname{Re} S_N[u]$ следует $\left\|\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2 \geq \geq \left\|S_{NR}^{1/2}u\right\|^2$ $\forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$. Отсюда и из (17) имеем

$$S_{NR}^{1/2}u = \tilde{U}\tilde{P}_0\,\tilde{S}_R^{1/2}u \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{22}$$

Теперь из (22), (20) и (18) получаем $\tilde{P}_0 \tilde{G} \tilde{P}_0^{\perp} = 0$, т. е. $\tilde{H}_0$ инвариантно относительно $\tilde{G}$.

2) $\Rightarrow$ 1) очевидно. 3) $\Rightarrow$ 2). Из (18), (20) и $\tilde{P}_0 \tilde{G} = \tilde{G} \tilde{P}_0$ следует (22). Поэтому для $\forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$

$$\tau[u, v] = \left(\left(I + i\tilde{G}\right)\tilde{S}_R^{1/2} u, \tilde{S}_R^{1/2} v\right) - \left(\left(I + iG_N\right)S_{NR}^{1/2} u, S_{NR}^{1/2} v\right) =$$
$$= \left(\left(I + i\tilde{G}\right)\tilde{P}_0^{\perp} \tilde{S}_R^{1/2} u, \tilde{P}_0^{\perp} \tilde{S}_R^{1/2} v\right).$$

Значит, τ — секториальная форма.

Определение 1. *Множество всех m-сект. расширений оператора S, удовлетворяющих одному из условий теоремы 2, будем относить к классу $\mathfrak{S}_*(S)$.*

Определение 2. *Назовем m-сект. расширение $\tilde{S}$ оператора S экстремальным, если выполняется равенство*

$$\inf\{\operatorname{Re}(\tilde{S}(u - \varphi), u - \varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} = 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\tilde{S}).$$

Из определения фридрихсова расширения следует его экстремальность, а из (14) — экстремальность нейманова расширения.

Для экстремального m-сект. расширения $\tilde{S} = \tilde{S}_R^{1/2}\left(I + i\tilde{G}\right)\tilde{S}_R^{1/2}$ справедливо $\tilde{H} = \tilde{H}_0$. Поэтому из (18) и (20) имеем

$$\tilde{S}[u, v] = S_N[u, v] \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}].$$

Это означает, что все m-сект. экстремальные расширения содержатся в классе $\mathfrak{S}_*(S)$.

Отметим, что если $\tilde{S}$ — m-сект. экстремальное расширение S и $\mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}[S_N]$, то $\tilde{S} = S_N$.

В [24] доказано, что если S — н. с. оператор, то класс $\mathfrak{S}_*(S)$ совпадает с классом всех собственных m-сект. расширений S. Далее мы покажем, что аналогичная ситуация имеет место и в общем случае $\alpha \neq 0$.

Теорема 3. *Пусть S — замкнутый плотно заданный α-секториальный оператор, S_F и S_N — его фридрихсово и нейманово расширения. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{D}(S_F) \cap \mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S)$ *и оператор Q, определенный на $\mathcal{D}(S_F) + \mathcal{D}(S_N)$ равенством*

$$Q(f_F + f_N) = S_F f_F + S_N f_N \quad \forall\, f_F \in \mathcal{D}(S_F),\ \forall\, f_N \in \mathcal{D}(S_N), \tag{23}$$

является замкнутым;

2) $\mathcal{D}\left(S_F^*\right) + \mathcal{D}\left(S_N^*\right) = \mathcal{D}(S^*)$;

3) *при некотором $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$ образ оператора $L_\lambda = \left(S_N^* - \lambda I\right)^{-1} - \left(S_F^* - \lambda I\right)^{-1}$ совпадает с $\mathfrak{N}_\lambda$.*

Доказательство. Если $\tilde{S}$ — m-сект. расширение S и $f \in \mathcal{D}(S_F) \cap \mathcal{D}(\tilde{S})$, то из $\mathcal{D}[S] \subseteq \mathcal{D}[\tilde{S}]$ и $S[f, g] = \tilde{S}[f, g]$ $\forall\, g \in \mathcal{D}[S]$ следует $\tilde{S} f = S_F f$, поэтому оператор Q, заданный равенством (23), определен корректно.

Поскольку $\rho(S_N) \cap \rho(S_F) \supseteq \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$, то $\mathcal{R}(L_\lambda) \subseteq \mathfrak{N}_\lambda$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\mathcal{D}\left(S_F^*\right) + \mathcal{D}\left(S_N^*\right) = \mathcal{D}(S^*)$. Тогда для любого $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$ имеем $\mathfrak{N}_\lambda \subseteq \mathcal{D}\left(S_F^*\right) + \mathcal{D}\left(S_N^*\right)$. Поэтому $\mathfrak{N}_\lambda = L_\lambda\left(S_N^* - \lambda I\right)\mathcal{D}\left(S_N^*\right)$.

3) $\Rightarrow$ 2). Так как $\mathcal{D}(S_F^*) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda = \mathcal{D}(S^*)$ $\forall\ \lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$, то из $\mathcal{R}(L_\lambda) = \mathfrak{N}_\lambda$ при некотором $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$ следует

$$\mathcal{D}(S_F^*) + \mathcal{D}(S_N^*) = \mathcal{D}(S^*).$$

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$. Из замкнутости оператора Q следует, что $\operatorname{Ker}(Q - \bar{\lambda} I)$ — подпространство. Из (23) получаем $\mathcal{R}(L_\lambda^*) = \operatorname{Ker}(Q - \bar{\lambda} I)$, значит, $\mathcal{R}(L_\lambda)$ — подпространство. Ввиду $\mathcal{D}(S_F) \cap \mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S)$ имеем $\mathcal{R}(L_\lambda) = \overline{\mathcal{R}(L_\lambda)} = \mathfrak{N}_\lambda$.

3) $\Rightarrow$ 1). Если при некотором $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$ справедливо $\mathcal{R}(L_\lambda) = \mathfrak{N}_\lambda$, то $\operatorname{Ker} L_\lambda^* = (S - \bar{\lambda} I)\mathcal{D}(S)$, поэтому $\mathcal{D}(S_F) \cap \mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S)$. Поскольку $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(S_F) \dotplus \operatorname{Ker}(Q - \bar{\lambda} I) = \mathcal{D}(S_F) \dotplus \mathcal{R}(L_\lambda^*)$ и $\mathcal{R}(L_\lambda^*)$ — подпространство, то Q — замкнутый оператор.

Определение 3. *Назовем фридрихсово и нейманово расширения оператора S трансверсальными, если выполняется одно из условий теоремы* 3.

Пусть S_F и S_N трансверсальны. Тогда оператор Q (23) замкнут и плотно задан. Положим $S_* = Q^*$. Тогда S_* — плотно определенный замкнутый оператор, $\mathcal{D}(S_*) = \mathcal{D}(S_F^*) \cap \mathcal{D}(S_N^*)$, $S_* = S_F^* \restriction \mathcal{D}(S_*)$. Поэтому S_* — α-сект. оператор и $Q = S_*^*$.

Если $\operatorname{Re}(S\varphi, \varphi) \geq m\|\varphi\|^2$ $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(S)$, $m > 0$, то операторы S_F и S_N трансверсальны. Действительно, в этом случае $\operatorname{Re}(S_F\varphi, \varphi) \geq m\|\varphi\|^2$ $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(S_F)$ и по теореме 1 $\mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S) \dotplus \operatorname{Ker} S^*$. Так как $\operatorname{Ker} S_N = \operatorname{Ker} S_N^* = \operatorname{Ker} S^*$, $\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S_F^*) \dotplus \operatorname{Ker} S^*$, то

$$\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S_F^*) + \mathcal{D}(S_N^*).$$

В этом случае справедливы равенства

$$\mathcal{D}(S_*) = S_F^{*-1}\mathcal{R}(S), \quad S_*(S_F^{*-1}S\varphi) = S\varphi \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S).$$

Трансверсальность также имеет место в случае

$$\mathcal{D}(S_F) \cap \mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S), \quad \dim \mathfrak{N}_\lambda < \infty, \quad \lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha).$$

Напомним, что операторы A и B образуют дуальную пару, если $(Af, g) = (f, Bg)$ $\forall f \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\ g \in \mathcal{D}(B)$. Замкнутый оператор T в H называют расширением дуальной пары (A, B), если $T \supset A$, $T^* \supset B$.

Если фридрихсово и нейманово расширения оператора S трансверсальны, то операторы S и S_* образуют дуальную пару.

Теорема 4. *Пусть S_F и S_N трансверсальны. Тогда*:

1) *фридрихсово и нейманово расширения оператора S_* совпадают соответственно с S_F^* и S_N^**;

2) *класс $\mathfrak{S}_\alpha(S)$ совпадает с множеством всех m-сект. расширений дуальной пары (S, S_*).*

Доказательство. 1. Положим $\mathfrak{N}_{*\lambda} = \operatorname{Ker}(S_*^* - \lambda I)$. Из доказательства теоремы 3 следует $\forall\ \lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$: $\mathcal{R}(L_{\bar{\lambda}}^*) = \mathfrak{N}_{*\lambda}$, где $L_\lambda = (S_N^* - \lambda I)^{-1} - (S_F^* - \lambda I)^{-1}$.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{N}_{*\lambda} \cap \mathcal{D}[S]$ при некотором $\lambda \in \operatorname{Ext}\Theta(\alpha)$. Тогда $\varphi = L_{\bar\lambda}^{*} h$ и поэтому $f_N = (S_N - \lambda I)^{-1} h \in \mathcal{D}(S_N) \cap \mathcal{D}(S_F)$. По теореме 3 $f_N \in \mathcal{D}(S)$ и $h = (S - \lambda I) f_N$, значит, $L_{\bar\lambda}^{*} h = \varphi = 0$. Таким образом, $\mathfrak{N}_{*\lambda} \cap \mathcal{D}[S] = \{0\}$.

Поскольку S_F^* — m-сект. расширение S_*, то из (16) имеем

$$\mathcal{D}[S] = \mathcal{D}[S_F^*] = \mathcal{D}[S_*] \dotplus (\mathfrak{N}_{*\lambda} \cap \mathcal{D}[S_F^*]) = \mathcal{D}[S_*].$$

Отсюда $(S_*)_F = S_F^*$.

Так как $\mathcal{D}(S_F) + \mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S_*^*)$, то $\mathfrak{N}_{*\lambda} \subset \mathcal{D}[S_N]$. Согласно теореме 2 из (16) получаем $\mathcal{D}[S_N^*] = \mathcal{D}[(S_*)_N]$.

Так как $\mathcal{D}[S] = \mathcal{D}[S_*]$, то из (14) следует, что S_N^* — экстремальное m-сект. расширение S_*. Значит, $(S_*)_N = S_N^*$.

2. Пусть $\tilde S \in \mathfrak{S}_*(S)$. По теореме 2 полуторалинейная форма τ (21) является секториальной. Поскольку $\tau[\varphi] = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}[S]$, то из (2) имеем

$$\tau[\varphi, v] = \tau[v, \varphi] = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}[\tilde S], \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[S].$$

Переходя к сопряженной форме $\tau^*[u, v] = \overline{\tau[v, u]}$, получаем

$$\tilde S^*[\varphi, v] = (S_N^* \varphi, v) = (S_* \varphi, v) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(S_*), \quad \forall v \in \mathcal{D}[\tilde S].$$

Отсюда $\tilde S^* \supset S_*$.

Наоборот, пусть $\tilde S$ — m-сект. расширение дуальной пары (S, S_*). Из (17) и (20) следует, что для любых $\varphi \in \mathcal{D}[S]$ и $v \in \mathcal{D}[\tilde S]$ справедливо $\tilde S[\varphi, v] = S_N[\varphi, v]$. Поэтому $\tau[\varphi, v] = 0$.

Так как S_N^* — нейманово расширение S_* и $\mathcal{D}[S] = \mathcal{D}[S_*]$, то также $\tau^*[\varphi, v] = 0$. Значит,

$$\tau[v] = \tilde S[v - \varphi] - S_N[v - \varphi].$$

Из (14) следует $\operatorname{Re}\tau[v] \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{D}[\tilde S]$ и поэтому $\tilde S \in \mathfrak{S}_*(S)$.

Теорема доказана.

4. Полуторалинейные формы, ассоциированные с m-сект. расширениями.

Предложение 2. *Пусть $\tilde S = \tilde S_R^{1/2}(I + i\tilde G)\tilde S_R^{1/2}$ — m-сект. расширение оператора S. Тогда для любых $u, v \in \mathcal{D}[\tilde S]$ справедливо равенство*

$$S_N[u, v] = \left((I + i\tilde G)\tilde\pi \tilde S_R^{1/2} u, \tilde\pi \tilde S_R^{1/2} v\right), \tag{24}$$

где $\tilde\pi$ — ограниченный проектор в H, причем $\tilde\pi$ является ортопроектором в том и только в том случае, когда $\tilde S \in \mathfrak{S}_*(S)$.

Доказательство. Сохраняя обозначения п. 3, из (18), (20) имеем

$$S_{NR}^{1/2} u = \tilde U\left(I - i\tilde G_0\right)^{-1} \tilde P_0 \left(I - i\tilde G\right)\tilde S_R^{1/2} u \quad \forall u \in \mathcal{D}[\tilde S],$$

где $\tilde G_0 = \tilde P_0 \tilde G \big| \tilde H_0$.

Положим

$$\tilde\pi = \left(I - i\tilde G_0\right)^{-1} \tilde P_0 \left(I - i\tilde G\right). \tag{25}$$

Очевидно, что $\tilde{\pi}$ — проектор, $\mathcal{R}(\tilde{\pi}) = \tilde{H}_0$, $\operatorname{Ker}\tilde{\pi} = \left(I - i\tilde{G}\right)^{-1}\tilde{H}_0^{\perp}$. Отсюда

$$S_{NR}^{1/2}u = \tilde{U}\,\tilde{\pi}\tilde{S}_R^{1/2}u \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{26}$$

Из (26) и (18) получаем (24). Из (25) имеем

$$\tilde{\pi} = \tilde{P}_0 - i\left(I - i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{P}_0\tilde{G}\tilde{P}_0^{\perp}. \tag{27}$$

Поэтому $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}^*$ тогда и только тогда, когда $\tilde{P}_0\tilde{G}\tilde{P}_0^{\perp} = 0$, т. е. когда $\tilde{S} \in$ $\in \mathfrak{S}_*(S)$.

Обозначим $\tilde{X} = \tilde{P}_0^{\perp}\tilde{G}\big|\tilde{H}_0^{\perp}$, $\tilde{Z} = \tilde{P}_0\tilde{G}\big|\tilde{H}_0^{\perp}$.

Непосредственным вычислением из (27) получим

$$I + i\tilde{G} - \tilde{\pi}^*\left(I + i\tilde{G}\right)\tilde{\pi} = \left(I + i\tilde{X}\right)\tilde{P}_0^{\perp} + \tilde{Z}^*\left(I + i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\tilde{P}_0^{\perp} +$$
$$+ 2i\tilde{\pi}^*\left(I - i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\tilde{P}_0^{\perp}.$$

Отсюда и из (24) следует

$$\tilde{S}[u,v] = S_N[u,v] + \left(\left(I + i\tilde{X} + \tilde{Z}^*\left(I + i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\right)\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u, \tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}v\right) +$$
$$+ 2i\left(\left(I - i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u, \tilde{\pi}\tilde{S}_R^{1/2}v\right) \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{28}$$

Линеал $\mathcal{D}[S_N]$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)_N = (u,v) + \left(S_{NR}^{1/2}u, S_{NR}^{1/2}v\right).$$

Предложение 3. *Пусть $\tilde{S}$ — m-сект. расширение оператора S. Тогда на $\mathcal{D}[\tilde{S}]$ секториальная полуторалинейная форма*

$$\tilde{\eta}[u,v] = \left(\left(\left(I + i\tilde{X}\right) + \tilde{Z}^*\left(I + i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\right)\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u, \tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}v\right) \tag{29}$$

является замкнутой в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}[S_N]$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{u_N\} \subset \mathcal{D}[\tilde{S}]$ является $\tilde{\eta}$-сходящейся к u в $\mathcal{D}[S_N]$. Тогда $\lim u_n = u$ в H и из (29) имеем

$$\lim_{n,m\to\infty} \tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}(u_n - u_m) = 0.$$

Поскольку $\lim S_{NR}^{1/2}u_n = S_{NR}^{1/2}u$, то из (26) следует фундаментальность в H последовательности $\{\tilde{\pi}\tilde{S}_R^{1/2}u_n\}$. С учетом (27) получаем фундаментальность $\{\tilde{S}_R^{1/2}u_n\}$ в H. Из замкнутости оператора $\tilde{S}_R^{1/2}$ следует $u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$ и $\tilde{S}_R^{1/2}u =$ $= \lim \tilde{S}_R^{1/2}u_n$, поэтому $\lim \tilde{\eta}[u - u_n] = 0$.

Предложение доказано.

В дальнейшем предполагаем, что $S_F \neq S_N$.

Определение 4. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{D}[S_N],$ $\mathcal{H})$. Совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ назовем граничной парой оператора S, если:* 1) $\operatorname{Ker}\Gamma = \mathcal{D}[S]$; 2) $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{H}$.

Поскольку $\mathcal{D}[S]$ — подпространство в $\mathcal{D}[S_N]$, то, очевидно, что граничные пары оператора S существуют.

Если $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ — граничная пара оператора S, то соотношения

$$\eta[u, v] = \omega[\Gamma u, \Gamma v], \quad \mathcal{D}[\omega] = \Gamma\mathcal{D}[\eta]$$

осуществляют биективное соответствие между замкнутыми секториальными формами ω в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и замкнутыми секториальными формами η в $\mathcal{D}[S_N]$ такими, что

$$\mathcal{D}[\eta] \supseteq \mathcal{D}[S], \quad \eta[\varphi] = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}[S].$$

Из первой и второй теорем о представлении [1] следует, что любая замкнутая секториальная форма ω в $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\omega[e, h] = ((I + iC)We, Wh) \quad \forall\, e, h \in \mathcal{D}[\omega] = \mathcal{D}(W), \tag{30}$$

где W — замкнутый оператор в $\mathcal{H}$, C — ограниченный самосопряженный оператор в подпространстве $\overline{\mathcal{R}(W)}$.

Операторы W и C по форме ω определяются неоднозначно, однако, если наряду с (30) верно и

$$\omega[e, h] = ((I + iC_1)W_1 e, W_1 h) \quad e, h \in \mathcal{D}[\omega],$$

то $W_1 = VW$, где V — изометрическое отображение $\overline{\mathcal{R}(W)}$ на $\overline{\mathcal{R}(W_1)}$ и $C_1 = V^* C V$.

Теорема 5. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ — граничная пара оператора S. Тогда все замкнутые формы, ассоциированные с m-сект. расширениями оператора S, и только они имеют вид*

$$\tilde{S}[u, v] = S_N[u, v] + \omega[\Gamma u, \Gamma v] + 2t[u, v], \tag{31}$$

где ω — замкнутая секториальная форма в $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}[\tilde{S}] = \Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega]$, $t[u, v]$ — полуторалинейная форма на $\mathcal{D}[\tilde{S}]$ такая, что

$$|t[u, v]|^2 \le \delta^2 \operatorname{Re}\omega[\Gamma u] \operatorname{Re} S_N[v] \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}], \tag{32}$$

причем

$$\delta \in [0, 1). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{S}$ — m-сект. расширение S. Тогда для $\tilde{S}[u, v]$ справедливо (28). По предложению 3 форма $\tilde{\eta}[u, v]$ (29) замкнута в гильбертовом пространстве $\mathcal{D}[S_N]$. На $\mathcal{D}[\omega] = \Gamma\mathcal{D}[\tilde{S}]$ зададим полуторалинейную замкнутую секториальную форму $\omega[\Gamma u, \Gamma v] = \tilde{\eta}[u, v]$. Из (29) имеем

$$\operatorname{Re}\omega[\Gamma u] = \operatorname{Re}\tilde{\eta}[u] = \left\|\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2 + \left\|\left(I + i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2.$$

Отсюда

$$\left\|\left(I - i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u\right\|^2 \le \delta^2 \operatorname{Re}\omega[\Gamma u] \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}], \tag{34}$$

причем $\delta \in [0, 1)$. Если $\|\tilde{G}\| \le \operatorname{tg}\beta$, то в (34) можно считать $\delta = \sin\beta$.

Определим на $\mathcal{D}[\tilde{S}]$ полуторалинейную форму

$$t[u, v] = i\left(\left(I - i\tilde{G}_0\right)^{-1}\tilde{Z}\tilde{P}_0^{\perp}\tilde{S}_R^{1/2}u, \tilde{\pi}\tilde{S}_R^{1/2}v\right).$$

Тогда из (26) и (34) следуют (32) и (33).

Наоборот, пусть ω — замкнутая секториальная форма в $\mathcal{H}$. Положим $\mathcal{D}[\tilde{S}] = \Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega]$. Пусть $t[u,v]$ — полуторалинейная форма на $\mathcal{D}[\tilde{S}]$, удовлетворяющая условиям (32) и (33).

Рассмотрим полуторалинейную форму $\tilde{S}[u,v]$, определяемую правой частью равенства (31). Из (32) имеем

$$2\,|t[u,v]| \le \delta(\operatorname{Re}\omega[\Gamma u] + \operatorname{Re} S_N[v]) \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{35}$$

Из (35) получаем

$$(1-\delta)(\operatorname{Re}\omega[\Gamma u] + \operatorname{Re} S_N[v]) \le \operatorname{Re}\tilde{S}[u] \le$$
$$\le (1+\delta)(\operatorname{Re}\omega[\Gamma u] + \operatorname{Re} S_N[v]) \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]. \tag{36}$$

Отсюда

$$|\operatorname{Im}\tilde{S}[u]| \le c\operatorname{Re}\tilde{S}[u].$$

Поэтому $\tilde{S}[u,v]$ — секториальная форма, причем если форма ω имеет полуугол $\beta \in [0, \pi/2)$, то для полуугла γ формы $\tilde{S}[u,v]$ справедлива оценка $\alpha \le \gamma \le \operatorname{arctg}[(\max(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) + \delta)/(1-\delta)]$. Из (36) следует также замкнутость в H формы $\tilde{S}[u,v]$.

Пусть $\tilde{S}$ ассоциирован с формой $\tilde{S}[u,v]$. Тогда для $u \in \mathcal{D}(S)$ и для любого $v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$ из (31) и (32) имеем $\tilde{S}[u,v] = S_N[u,v] = (Su, v)$. Поэтому $\tilde{S} \supset$ $\supset S$, что и завершает доказательство теоремы.

***Следствие* 1.** *Пара форм ω и t определяется по m-сект. расширению оператора S однозначно.*

Доказательство. Пусть $\tilde{S}[u,v] = S_N[u,v] + \omega_j[\Gamma u, \Gamma v] + 2t_j[u,v]$, $j = 1$, 2. Тогда при $u \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$, $v \in \mathcal{D}[S]$ имеем

$$2t_j[u,v] = \tilde{S}[u,v] - S_N[u,v], \quad j = 1, 2.$$

Теперь из (32) и (14) следует $t_1[u,v] = t_2[u,v]$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$. Тогда и $\omega_1 \equiv$ $\equiv \omega_2$.

***Следствие* 2.** *Замкнутые секториальные формы, ассоциированные с m-сект. расширениями $\tilde{S}$ класса $\mathfrak{S}_*(S)$, и только они имеют вид*

$$\tilde{S}[u,v] = S_N[u,v] + \omega[\Gamma u, \Gamma v], \tag{37}$$

где ω — замкнутая секториальная форма в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{D}[\tilde{S}] = \Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega]$.

Доказательство. Если верно (37), то $\tau[u,v] = \tilde{S}[u,v] - S_N[u,v]$ — секториальная форма на $\mathcal{D}[\tilde{S}]$. По теореме 2 $\tilde{S} \in \mathfrak{S}_*(S)$.

Наоборот, если $\tilde{S} \in \mathfrak{S}_*(S)$, то снова по теореме 2 форма (21) секториальна и $\tau[\varphi] = 0$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}[S]$. Из (2) следует

$$0 = \tau[u,\varphi] = \tau[\varphi, u] \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}], \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}[S].$$

Из (31) получаем $t[u,\varphi] = 0$. Из (14) и (32) $t[u,v] = 0$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$, т. е. верно (37).

Пусть замкнутая секториальная форма ω в $\mathcal{H}$ имеет представление (30), а форма $t[u,v]$, определенная на $\Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega]$, удовлетворяет (32). Применяя теорему Рисса к форме $\tilde{t}\left[W\Gamma u, S_{NR}^{1/2}v\right] = t[u,v]$, получаем представление

$$t[u,v] = \left(BW\Gamma u, S_{NR}^{1/2}v\right), \quad B \in \mathcal{L}\left(\overline{\mathcal{R}(W)}, H_N\right). \tag{38}$$

Из (38) и теоремы 5 получаем, что в заданной граничной паре $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ оператора S все замкнутые формы, ассоциированные с m-секториальными расширениями $\tilde{S}$ оператора S, и только они имеют вид

$$\tilde{S}[u,v] = S_N[u,v] + ((I+iC)W\Gamma u, W\Gamma v) + 2\left(BW\Gamma u, S_{NR}^{1/2}v\right), \tag{39}$$

где W — замкнутый оператор в $\mathcal{H}$, $C = C^* \in \mathcal{L}\left(\overline{\mathcal{R}(W)}\right)$, $B \in \mathcal{L}\left(\overline{\mathcal{R}(W)}, H_N\right)$, $\|B\| < 1$, $\mathcal{D}[\tilde{S}] = \Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega]$.

Отметим, что если ω — замкнутая секториальная форма в $\mathcal{H}$, то $\mathcal{D}[\omega]$ является гильбертовым пространством с нормой

$$\|e\|_{\omega}^2 = \|e\|_{\mathcal{H}}^2 + \operatorname{Re}\omega[e].$$

Далее полуторалинейную форму ω будем называть коэрцитивной, если квадратичная форма $\operatorname{Re}\omega[e]$ является положительно определенной.

Теорема 6. *Пусть S — плотно заданный замкнутый секториальный оператор и форма (Su,v) является коэрцитивной, $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ — граничная пара оператора S. Тогда все замкнутые формы, ассоциированные с m-сект. расширениями оператора S, и только они имеют вид*

$$\tilde{S}[u,v] = S[\pi_F u + 2Y\Gamma u, \pi_F v] + \omega[\Gamma u, \Gamma v], \tag{40}$$

где ω — замкнутая секториальная форма в $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}[\tilde{S}] = \Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega]$, $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{D}[\omega], \mathcal{D}[S])$ удовлетворяет условиям

$$|(Y\Gamma u, S\varphi)|^2 \le \delta^2 \operatorname{Re}\omega[\Gamma u]\operatorname{Re}(S\varphi,\varphi) \quad \forall u \in \mathcal{D}[\tilde{S}], \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(S), \tag{41}$$

$$\delta \in [0,1). \tag{42}$$

При этом для того чтобы форма (40) была коэрцитивной, необходимо и достаточно, чтобы форма ω была коэрцитивной.

Доказательство. Пусть $S_F = S_{FR}^{1/2}(I+iG_F)S_{FR}^{1/2}$. Как уже отмечалось, $\mathcal{R}(S_F) = \mathcal{R}\left(S_{FR}^{1/2}\right) = H$. Из (13) $\left\|S_{NR}^{1/2}u\right\|^2 = \left\|S_{FR}^{1/2}\pi_F u\right\|^2$, $u \in \mathcal{D}[S_N]$, поэтому

$$S_{NR}^{1/2}u = U_F S_{FR}^{1/2}\pi_F u \quad \forall u \in \mathcal{D}[S_N], \tag{43}$$

где U_F — изометрическое отображение H на H_N.

Из (38) и (43) для любых $u, v \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$ имеем

$$t[u,v] = \left((I+iG_F)S_{FR}^{1/2}S_{FR}^{-1/2}(I+iG_F)^{-1}U_F^* BW\Gamma u, S_{FR}^{1/2}\pi_F v\right).$$

Обозначим $Y = S_{FR}^{-1/2}(I+iG_F)^{-1}U_F^*BW$. Тогда $\mathcal{R}(Y) \subset \mathcal{D}[S]$, $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{D}[\omega], \mathcal{D}[S])$. Так как $\|B\| < 1$, то

$$\left\|(I+iG_F)S_{FR}^{1/2}Ye\right\|^2 \le \delta^2\|We\|^2 \quad \forall e \in \mathcal{D}(W), \quad \delta \in [0,1).$$

Поскольку

$$\left\|(I+iG_F)S_{FR}^{1/2}u\right\|^2 = \sup\{|(S\varphi,u)|^2/\operatorname{Re}(S\varphi,\varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(S)\} \quad \forall u \in \mathcal{D}[S],$$

то получаем условия (41) и (42). Так как $t[u, v] = S[Y\Gamma u, \pi_F v]$, то из (13) и (31) получаем (40).

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим $\mathfrak{N}_0 = \operatorname{Ker} S^*$, π_0 — косой проектор на $\mathfrak{N}_0$ в $\mathcal{D}[S_N]$ параллельно $\mathcal{D}[S]$, $\pi_0 = I - \pi_F$. Для любого m-сект. расширения $\tilde{S}$ из $\mathcal{D}[S] \subseteq \mathcal{D}[\tilde{S}] \subseteq \mathcal{D}[S_N]$ и (12) следует $\pi_0 \mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathfrak{N}_0 \cap \mathcal{D}[\tilde{S}]$. Пусть $\hat{S} \in \mathfrak{S}_*(S)$. Из (22) с учетом $\operatorname{Ker} S_N = \mathfrak{N}_0$ получаем

$$\hat{S}_R^{1/2}\left(\pi_0 D[\hat{S}]\right) \subseteq \hat{H}_0^{\perp}.$$

Так как $\left\|\hat{S}_R^{1/2}\varphi\right\|^2 = \left\|\hat{S}_{FR}^{1/2}\varphi\right\|^2$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}[S]$, то условие $\hat{S}_R^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ эквивалентно $\left\|\hat{S}_R^{1/2}\pi_0 u\right\|^2 \geq l\|\pi_0 u\|^2$ $\forall\, u \in \mathcal{D}[\hat{S}]$, $l > 0$. Последнее ввиду $\operatorname{Ker}\Gamma = \mathcal{D}[S]$, $\mathcal{R}(\Gamma) = \mathcal{H}$ и определения формы $\hat{\eta}$ (29) эквивалентно следующему:

$$\operatorname{Re}\omega[\Gamma u] = \operatorname{Re}\hat{\eta}[\pi_0 u] \geq c\|\Gamma u\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}[\hat{S}].$$

Таким образом, замкнутая секториальная форма

$$\hat{S}[u, v] = S[\pi_F u, \pi_F v] + \omega[\Gamma u, \Gamma v], \quad u, v \in \Gamma^{-1}\mathcal{D}[\omega],$$

ассоциированная с $\hat{S}$, является коэрцитивной в том и только в том случае, когда коэрцитивна форма ω.

В общем случае для замкнутой секториальной формы

$$\tilde{S}[u, v] = S[\pi_F u, \pi_F v] + \omega[\Gamma u, \Gamma v] + 2t[u, v]$$

из (36) ее коэрцитивность эквивалентна коэрцитивности формы

$$\hat{S}[u, v] = S[\pi_F u, \pi_F v] + \omega[\Gamma u, \Gamma v],$$

которая также является замкнутой и секториальной на $\mathcal{D}[\tilde{S}]$, ассоциированной с $\hat{S} \in \mathfrak{S}_*(S)$. Теорема доказана.

Отметим, что если S — п. о. симметрический оператор, $\|u\|_F^2 = \left\|S_F^{1/2}u\right\|^2 = S[u]$, то условия (41) и (42) эквивалентны условиям

$$\|Ye\|_F^2 \leq \delta^2 \operatorname{Re}\omega[e], \quad \delta \in [0, 1) \quad \forall\, e \in \mathcal{D}[\omega].$$

Замечание 2. Для п. о. оператора S описание замкнутых форм $\tilde{S}[u, v]$ и их областей определения $\mathcal{D}[\tilde{S}]$ в терминах „граничного оператора", действующего в подпространстве $\operatorname{Ker} S^*$, имеется в [3, 5] для неотрицательных самосопряженных и в [15] для m-сект. собственных расширений оператора S. В [14] описание этих объектов для случая m-сект. собственных расширений н. с. оператора дано в терминах пространства граничных значений и функций Вейля.

5. Примеры. Пусть $H = L_2[0, \infty)$; W_2^1, $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, W_2^2 и $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ — соболевские пространства на $[0, \infty)$. Рассмотрим оператор $S = -d^2/dx^2$, $\mathcal{D}(S) = \overset{\circ}{W}{}_2^2$.

Оператор S является замкнутым н. с. оператором с индексами дефекта (1, 1). Его фридрихсовым расширением является оператор

$$S_F = -d^2/dx^2, \quad \mathcal{D}(S_F) = \{\, f \in W_2^2,\ f(0) = 0 \,\},$$

а нейманово расширение $S_N = -d^2/dx^2$, $\mathcal{D}(S_N) = \{ f \in W_2^2,\ f'(0) = 0 \}$. При этом $\mathcal{D}[S] = \overset{\circ}{W}{}_2^1$, $\mathcal{D}[S_N] = W_2^1$, $\overline{\mathcal{R}(S_N)} = H$, $\mathcal{D}(S^*) = W_2^2$, $S^* = -d^2/dx^2$. Так как $\mathcal{D}(S_F) \cap \mathcal{D}(S_N) = \mathcal{D}(S)$, то операторы S_F и S_N трансверсальны. В качестве граничной пары для S выберем $\{\mathbb{C}, \Gamma\}$, где $\Gamma u = u(0)$, $u \in W_2^1$.

Для любых $u, v \in \mathcal{D}[S_N]$ справедливо

$$S_N[u, v] = \int_0^\infty u'(x)\overline{v'(x)}\,dx.$$

Пусть $A = d/dx$, $\mathcal{D}(A) = W_2^1$. Тогда $H = \overline{\mathcal{R}(A)}$ и

$$\| Au \|^2 = \left\| S_N^{1/2} u \right\|^2 \quad \forall\, u \in W_2^1.$$

Отсюда следует равенство $S_N^{1/2} = VA$, где V — изометрическое отображение H на H. Поэтому $\left(f, S_N^{1/2} u\right) = (V^* f, Au)$ $\forall\, f \in H$. Отсюда, из теоремы 5, (38) и (39) получаем описание всех замкнутых форм, ассоциированных с m-сект. расширениями $\tilde{S}$ оператора S:

$$\tilde{S}[u, v] = \int_0^\infty \left(u'(x) + 2\sqrt{\operatorname{Re} q}\, u(0)\varphi(x)\right)\overline{v'(x)}\,dx + q u(0)\overline{v(0)},$$

где $v, u \in \mathcal{D}[\tilde{S}] = W_2^1$, $\operatorname{Re} q > 0$, $\varphi(x) \in H$, $\|\varphi\|^2 = \int_0^\infty |\varphi(x)|^2\,dx < 1$.

Формы, ассоциированные с собственными m-сект. расширениями, получаются при $\varphi(x) = 0$ почти всюду. Учитывая равенства $\mathcal{D}(A^*) = \overset{\circ}{W}{}_2^1$, $A^* = -A \Big| \overset{\circ}{W}{}_2^1$, для $\tilde{S}$ получаем

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \Big\{ u \in W_2^1 :\ u'(x) + 2\sqrt{\operatorname{Re} q}\, u(0)\varphi(x) \in W_2^1,$$

$$\left(u'(x) + 2\sqrt{\operatorname{Re} q}\, u(0)\varphi(x)\right)\Big|_{x=0} = q u(0) \Big\},$$

$$\tilde{S} u = -\left(u'(x) + 2\sqrt{\operatorname{Re} q}\, u(0)\varphi(x)\right)'.$$

Следующий пример непосредственно примыкает к примерам 1.4, 1.14, 1.24, 2.14 гл. VI из [1].

Рассмотрим гильбертово пространство l_2. Пусть последовательность чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что

$$\operatorname{Re}\alpha_k > 0, \quad |\operatorname{Im}\alpha_k| \le \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{Re}\alpha_k, \quad \theta \in [0, \pi/2), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{44}$$

На линеале $\mathcal{D} = \left\{ u = \{u_k\} \in l_2 :\ \sum |\alpha_k| |u_k|^2 < \infty \right\}$ зададим θ-сект. форму

$$t[u, v] = \sum \alpha_k u_k \overline{v_k}.$$

Как показано в [1], форма является замкнутой на $\mathcal{D}$.

Пусть $\beta = \beta_k$ — последовательность комплексных чисел со свойствами

$$\sum |\beta_k|^2 = \infty, \quad \sum |\beta_k|^2 / (1 + |\alpha_k|) < \infty. \tag{45}$$

Линейное многообразие

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ u \in \mathcal{D} : (u, \beta) \overset{\text{def}}{=} \sum u_k \overline{\beta}_k = 0 \right\}$$

плотно в l_2 и является подпространством в $\mathcal{D}$ (с нормой $\|u\|_t^2 = \|u\|_{l_2}^2 + \operatorname{Re} t[u]$) [1] и θ-сект. форма

$$t_0[u, v] = t[u, v], \quad u, v \in \mathcal{D}_0,$$

является замкнутой на $\mathcal{D}_0$.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}(T_0) = \left\{ u \in \mathcal{D}_0 : \{ \alpha_k u_k \} \in l_2 \right\}, \quad T_0 u = \{ \alpha_k u_k \}.$$

Тогда T_0 — замкнутый плотно заданный θ-сект. оператор. Его расширением по Фридрихсу является оператор T_{0F}:

$$\mathcal{D}(T_{0F}) = \left\{ u \in \mathcal{D}_0 : \{ \alpha_k u_k + \rho(u)\beta_k \} \in l_2 \right\}, \quad T_{0F} u = \{ \alpha_k u_k + \rho(u)\beta_k \},$$

где $\rho(u)$ — линейный функционал: $\{ \alpha_k u_k + \rho(u)\beta_k \} \in l_2$, $u \in \mathcal{D}_0$. Оператор T_{0F} ассоциирован с формой t_0 [1].

С формой t ассоциирован оператор T:

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u \in \mathcal{D} : \{ \alpha_k u_k \} \in l_2 \right\}, \quad Tu = \{ \alpha_k u_k \},$$

который также является m-сект. расширением оператора T_0.

Далее предположим, что

$$\operatorname{Re} \alpha_k \geq m, \quad m > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{46}$$

Из (45) и (46) следует, что вектор $e_0 = \{ \beta_k / \overline{\alpha}_k \}$ лежит в $\mathcal{D}$.

Обозначим $a_0 = t[e_0] = \sum |\beta_k|^2 / \overline{\alpha}_k$. Имеем

$$(e_0, \beta) = a_0, \quad t[u, e_0] = (u, \beta) \quad \forall u \in \mathcal{D}.$$

Из (46) получаем $\operatorname{Re} (T_0 u, u)_{l_2} \geq m \|u\|_{l_2}^2$ $\forall u \in \mathcal{D}(T_0)$, $\mathfrak{N}_0 = \operatorname{Ker} T_0^* = \{ \lambda e_0 : \lambda \in \mathbb{C} \}$.

Пусть T_N — нейманово расширение T_0. По предложению 1

$$\mathcal{D}[T_N] = \mathcal{D}_0 \dotplus \mathfrak{N}_0 = \mathcal{D}, \quad T_N[u, v] = t_0[\pi_F u, \pi_F v], \quad u, v \in \mathcal{D},$$

где π_F — проектор на $\mathcal{D}_0$ параллельно $\mathfrak{N}_0$ в $\mathcal{D}$ ($\pi_F u = u - e_0 (u, \beta) / a_0$).

Обозначим $\gamma = \{ \beta_k \alpha_k / \overline{\alpha}_k \}$, тогда $(\gamma, e_0) = a_0$. Вычисляя форму $T_N[u, v]$, получаем

$$T_N[u, v] = t[u, v] - (u, \beta)(\gamma, v) / a_0. \tag{47}$$

Опишем все замкнутые секториальные формы, ассоциированные с m-сект. расширениями оператора T_0. Все они, кроме t_0, определены на $\mathcal{D}$. Положим для $u \in \mathcal{D}$: $\Gamma u = (u, \beta)$, тогда $\{ \mathbb{C}, \Gamma \}$ — граничная пара оператора T_0. Из теоремы 6 и (47) получаем

$$\tilde{t}[u, v] = t[u + 2(u, \beta) y, v] - (u, \beta)(\gamma, v) / a_0 + q(u, \beta)(\beta, v), \tag{48}$$

где $\operatorname{Re} q > 0$, $y = \{ y_k \} \in \mathcal{D}_0$ и

$$\left| \sum \alpha_k u_k \overline{y}_k \right|^2 \leq \delta^2 \operatorname{Re} q \sum \operatorname{Re} \alpha_k |u_k|^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(T_0), \quad \delta \in [0, 1). \tag{49}$$

Все такие формы коэрцитивны, если $q \neq 0$. Все формы, ассоциированные с m-

сект. расширениями класса $\mathfrak{S}_*(T_0)$, и только они получаются из (48) при $y = 0$.

Параметры q и $y_k \in \mathcal{D}_0$, соответствующие форме $t[u, v]$, таковы:

$$q = 1/\overline{a}_0, \quad y_k = \beta_k(\overline{a}_0 \alpha_k - a_0 \overline{\alpha}_k)/(2|\alpha_k|^2|a_0|^2), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Условие (49) для этих параметров с учетом того, что t — θ-сект. форма, а также при выполнении (45) и (46) переходит в следующее:

$$\sup\left\{\left|\sum \alpha_k \overline{\beta}_k u_k / \overline{\alpha}_k\right|^2 / \sum \operatorname{Re}\alpha_k |u_k|^2, \; u = \{u_k\} \in \mathcal{D}(T_0)\right\} \leq$$
$$\leq 4\sin^2\theta \sum \operatorname{Re}\alpha_k |\beta_k|^2 / |\alpha_k|^2.$$

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
2. *Крейн М. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
3. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I, II // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–490; **21**, № 3. – С. 366–404.
4. *Ando T., Nishio K.* Positive selfadjoint extensions of positive symmetric operators // Tohoku Math. J. – 1970. – **22**. – P. 65–75.
5. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Мат. сб. – 1956. – **38**. – С. 431–450.
6. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168–171.
7. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106–131.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
9. *Сторож О. Г.* Описание некоторых классов расширений неотрицательного оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 10. – С. 15–17
10. *Сторож О. Г.* Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 858–860.
11. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Об общем виде максимально аккретивного расширения положительно определенного оператора // Докл. АН УССР. – 1991. – № 6. – С. 19–22.
12. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 151–158.
13. *Derkach V. A., Malamud M. M.* Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – № 1. – P. 1–95.
14. *Маламуд М. М.* О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 215–233.
15. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* Расширения секториальных операторов и дуальных пар сжатий. – Донецк, 1985. – 57 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 4428-85.
16. *Цекановский Э. Р.* Характеристическая функция и секториальные граничные задачи // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. – 1987. – 7. – С. 180–194.
17. *Арлинский Ю. М.* Позитивные пространства граничных значений и секториальные расширения неотрицательного симметрического оператора // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 8–14.
18. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Там же. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1299–1313.
19. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* Об обобщенных резольвентах и резольвентных матрицах положительных эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. – 1976. – № 231. – С. 1063–1066.
20. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* О секториальных расширениях положительных эрмитовых операторов // Докл. АН АрмССР. – 1984. – **79**, № 5. – С. 199–202.
21. *Phillips R.* Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – **90**. – P. 192–254.
22. *Evans W. D., Knowles I.* On the extensions problem for accretive differential operators // J. Funct. Anal. – 1985. – **63**, № 3. – P. 276–298.
23. *Арлинский Ю. М.* Максимальные секториальные расширения секториальных операторов // Докл. НАН Украины. – 1993. – № 6. – С. 22–27.
24. *Arlinskii Yu. M.* On proper accretive extensions of positive linear relations // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 6. – С. 723–730.

Получено 21.02.95