УДК 517.9

Р. З. Жданов, І. М. Цифра (Ін-т математики НАН України, Київ)

РЕДУКЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І УМОВНА СИМЕТРІЯ

We find conditions which imply reduction of partial differential equations to equations with a smaller number of independent variables. It is shown that these conditions are necessary and sufficient in the case of one independent variable.

Знайдено умови, при яких диференціальні рівняння з частинними похідними редукуються до рівняння з меншим числом незалежних змінних. Показано, що ці умови є необхідними і достатніми для рівнянь з однією залежною змінною.

1. Вступ. Основна ідея класичного підходу Софуса Лі до побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь базується на тому, що рівняння повинно допускати нетривіальну групу [1–3]. У цьому випадку можна понизити вимірність диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП) за допомогою підстановок спеціального вигляду (інваріантних розв'язків). У роботах [3–13] запропоновано метод для побудови точних розв'язків широких класів нелінійних рівнянь. В [14] метод анзаців застосовано до рівняння Бусінеска. В [6] запропоновано більш загальний підхід до побудови точних розв'язків рівнянь Даламбера, Шредінгера, ейконалу, Дірака, Максвела, який привів до суттєвого розширення області застосування ідеї редукції на ДРЧП, що не мають симетрії в сенсі Лі. Механізм такої редукції можна зрозуміти в рамках концепції умовної симетрії ДРЧП [7–13]. В [12] встановлені достатні умови редукції системи ДРЧП, які допускають нетривіальну умовну симетрію.

2. Основні результати. У даній роботі доведено, що згадані умови для ДРЧП з однією залежною змінною є необхідними і достатніми. Вперше це твердження сформульовано в [11]. Перш ніж формулювати основний результат, введемо деякі означення і доведемо декілька допоміжних тверджень.

Досліджується диференціальне рівняння r-го порядку

$$U\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{r}{u}\right) = 0, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(x) \in C^r(R^n, R^1)$, символом $\underset{k}{u}$ позначено набір похідних порядку k, тобто

$$\underset{k}{u} = \left\{u_{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k}},\ 1 \le j_l \le n\right\}.$$

Всі розглядувані в роботі функції задовольняють необхідні умови гладкості.

Розглянемо набір диференціальних операторів першого порядку

$$Q_a = \xi_{aj}(x, u)\partial_{x_j} + \eta_a(x, u)\partial_u, \quad a = \overline{1, N}, \tag{2}$$

де $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\partial_u = \partial/\partial u$, а за індексами, що повторюються, розуміється сумування від 1 до n.

Означення 1. *Оператори* (2) *утворюють інволютивну множину, якщо існують функції* $f^c_{a,b}(x, u)$ *такі, що*

$$[Q_a, Q_b] = \sum_{c=1}^{N} f^c_{a,b} Q_c, \quad a, b = \overline{1, N}, \tag{3}$$

де $[Q_a, Q_b] = Q_a Q_b - Q_b Q_a$.

Далі розглядається інволютивна множина операторів (2), що задовольняють додаткову умову

$$\operatorname{rank} \|\xi_{aj}\|_{a=1,\ j=1}^{N n} = \operatorname{rank} \|\xi_{aj},\ \eta\|_{a=1,\ j=1}^{N n} = R. \tag{4}$$

Легко переконатися, що в цьому випадку виконується нерівність $R \le n$.

Якщо інволютивній множині операторів (2) поставити у відповідність систему рівнянь для характеристик

$$Y_a\left(x,\, u,\, \underset{1}{u}\right) = \xi_{aj} u_{x_j} - \eta_a = 0, \quad a = \overline{1, N}, \tag{5}$$

то умови (3) забезпечують її сумісність (теорема Фробеніуса). Загальний розв'язок системи ДРЧП (5) має вигляд

$$F(W_1(x, u), W_2(x, u), \ldots, W_{n+1-R}(x, u)) = 0, \tag{6}$$

де F — довільна гладка функція, $W_a(x, u)$, $a = \overline{1, n+1-R}$, — функціонально незалежні перші інтеграли системи (5). З умови (4) випливає, що існує перший інтеграл (наприклад, $W_1(x, u)$) такий, що виконується умова $\partial W_1 / \partial u \ne$ $\ne 0$. Розв'язуючи (6) відносно W_1 і перепозначаючи $\omega = W_1$, $\omega_j = W_{j+1}$, $j =$ $= \overline{1, n-R}$, одержуємо

$$\omega(x, u) = \varphi(\omega_1(x, u), \ldots, \omega_{n-R}(x, u)), \tag{7}$$

де φ — довільна гладка функція.

Означення 2. *Анзацем для поля* $u = u(x)$ *називається вираз вигляду* (7), *де* φ *— довільна гладка функція,* $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-R}$ *функціонально незалежні, а* $\partial\omega / \partial u \ne 0$.

Ми показали, що кожній інволютивній множині операторів (2) при умові (4) можна поставити у відповідність анзац для поля $u = u(x)$. Покажемо, що справедливе й обернене твердження. А саме: кожному анзацу для поля $u =$ $= u(x)$ можна поставити у відповідність інволютивну множину операторів, що задовольняють умову (4). Нехай функції $S_i(x, u)$, $i = \overline{1, R}$, такі, що вирази

$$S_i(x, u), \omega(x, u), \omega_j(x, u), \quad i = \overline{1, R}, \quad j = \overline{1, n-R}, \tag{8}$$

функціонально незалежні. Тоді набір функцій (8) визначає нову систему координат у просторі змінних x, u:

$$z_j = \omega_j(x, u), \quad j = \overline{1, n-R}, \quad y_i = S_i(x, u), \quad i = \overline{1, R},$$
$$V = \omega(x, u). \tag{9}$$

У нових змінних y, z, $V(y, z)$ анзац (7) набуває вигляду

$$V = \varphi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-R}). \tag{10}$$

Очевидно, формула (10) визначає загальний розв'язок системи ДРЧП $V_{y} = 0$, $i = \overline{1, R}$. Оператори $Q_j' = \partial_{y_j}$, $j = \overline{1, R}$, утворюють інволютивну множину (оскільки вони комутують) і задовольняють умову (4). Ці властивості зберігаються, якщо оператори Q_j' переписати в вихідних змінних x, u.

Таким чином, ми співставили анзацу (7) інволютивну множину операторів (2) при $N = R$. Ця відповідність неоднозначна, оскільки вибір функцій $S_i(x, u)$, $i = \overline{1, R}$, неоднозначний. Можна довести, що дві довільні інволютивні множини операторів $\left\{Q_a^{(1)}\right\}$, $\left\{Q_a^{(2)}\right\}$, відповідні анзацу (7), пов'язані співвідношенням

$$Q_a^{(2)} = \sum_{b=1}^{R} \lambda_{ab}(x, u)\, Q_b^{(1)}, \quad \alpha = \overline{1, R}, \tag{11}$$

причому $\det \|\lambda_{ab}\|_{a,b=1}^{R} \ne 0$.

Тому, якщо ввести на множині сімей інволютивних операторів відношення еквівалентності $\left\{Q_a^{(1)}\right\} \sim \left\{Q_a^{(2)}\right\}$ при виконанні (11), то відповідність між анзацами (7) і інволютивними множинами операторів (2) буде взаємно однозначною.

Нехай задано інволютивну множину операторів Q вигляду (2) і відповідну систему рівнянь для характеристик (5). Позначимо символом $\{DY\}$ набір всіх диференціальних наслідків системи ДРЧП (5) до порядку $r-1$ включно (r — порядок рівняння (1)).

Означення 3. *ДРЧП* (1) *умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів* Q, *якщо виконуються співвідношення*

$$\tilde{Q}_a U \Big|_{\substack{U=0 \\ \{DY\}}} = 0, \quad \alpha = \overline{1, N}, \tag{12}$$

де $\tilde{Q}_a$ — r*-те продовження оператора* Q_a.

Підставивши анзац (7) у праву частину ДРЧП (1), одержимо

$$U \big|_{\omega = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{n-R})} = U\left(x, u, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{p}{\varphi}\right), \tag{13}$$

де символом $\underset{k}{\varphi}$ позначено набір похідних функції φ k-го порядку за змінними ω_j, $j = \overline{1, n-R}$, $p \le r$. Вилучаючи з правої частини рівності (13) змінні x, за допомогою функцій (8) маємо

$$V'\left(S_1, \ldots, S_R, \omega, \omega_1, \ldots, \omega_{n-R}, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{p}{\varphi}\right). \tag{14}$$

Означення 4. *Анзац* (7) *редукує ДРЧП* (1), *якщо існує многовид у просторі змінних* $\omega_n, \ldots, \omega_{n-R}$, $\varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{p}{\varphi}$, *що задається рівністю*

$$L\left(\omega_1, \ldots, \omega_{n-R}, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{p}{\varphi}\right) = 0, \tag{15}$$

такий, що вираз (14) *тотожно дорівнює нулю на многовиді* (15).

Іншими словами, анзац (7) редукує ДРЧП (1), якщо підстановка функції $u = u(x)$, задана співвідношенням (7), в (1) зводить це рівняння до ДРЧП, яке містить тільки нові змінні $\omega_1, \ldots, \omega_{n-R}$, $\varphi(\omega)$.

Метод анзаців (або „метод прямої редукції") полягає в тому, що шукаються підстановки вигляду (7), де невідомі функції $\omega(x, u)$, $\omega_j(x, u)$ підбираються так, щоб рівняння, одержане при підстановці анзацу (7) в (1), містило тільки нові змінні $\omega_1, \ldots, \omega_{n-R}$, $\varphi(\omega)$. У рамках підходу, пов'язаного з умовною симетрією ДРЧП, спочатку шукають інволютивну множину операторів, що задовольняють (12), а потім будують відповідний анзац для поля $u(x)$. Згідно з [12] цей анзац редукує ДРЧП (1).

Далі встановимо, що обидва згадані вище підходи еквівалентні.

Теорема. *Якщо анзац* (7) *редукує ДРЧП* (1), *то існує інволютивна множина операторів вигляду* (2) *така, що рівняння* (1) *умовно інваріантне відносно цієї множини операторів. Навпаки, якщо ДРЧП* (1) *умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів* (2), *то відповідний анзац* (7) *редукує це рівняння.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай анзац (7) редукує ДРЧП (1). Згідно з викладеним вище анзацу (7) можна співставити таку інволютивну множину операторів (2), що існує заміна змінних (9), з використанням яких ці оператори записуються у вигляді

$$Q'_a = \partial_{y_a}, \quad \alpha = \overline{1, R}. \tag{16}$$

При цьому анзац (7) подається у вигляді (10). За умовою теореми підстановка анзацу (10) в ДРЧП (1), записане в нових змінних y_i, z_j, $V(y, z)$:

$$W\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right) = 0, \tag{17}$$

перетворює його в тотожність на многовиді (15).

Далі розглянемо рівняння $V_{y_i} = 0$, $i = \overline{1, R}$, і всі його диференціальні наслідки за змінними y_i, z_j включно до порядку $r - 1$. Якщо розглядати одержану сукупність ДРЧП як систему алгебраїчних рівнянь зі змінними $\underset{1}{V}$, $\underset{2}{V}, \ldots$ $\ldots$, $\underset{r}{V}$, то вони задають деякий многовид у просторі y_i, z_j, V, $\underset{1}{V}$, $\underset{2}{V}, \ldots$, $\underset{r}{V}$. Позначимо цей многовид символом M. Оскільки $\varphi(z)$ є довільною функцією, підставити анзац (10) в ДРЧП (17) — це те ж саме, що перейти в (17) до многовиду $V_{y_i} = 0$ і після цього ототожнити $\varphi_{z_{i_1} \ldots z_{i_k}}$ з $V_{z_{i_1} \ldots z_{i_k}}$, $1 \leq k \leq r$. Розв'яжемо рівняння (15) відносно однієї зі старших похідних

$$\varphi_{z_{i_1} \ldots z_{i_p}} = F\left(z, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{p}{\varphi}\right). \tag{18}$$

Після цього розв'яжемо рівняння (17) відносно тієї ж похідної

$$V_{z_{i_1} \ldots z_{i_p}} = G\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right)$$

і перейдемо в цій рівності на многовид M:

$$V_{z_{i_1} \ldots z_{i_p}}|_M = G|_M.$$

Звідси, враховуючи викладене вище, маємо співвідношення

$$G|_M = F\left(z, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{p}{\varphi}\right)$$

або

$$G|_M = F\left(z, V, \underset{(1)}{V}, \ldots, \underset{(p)}{V}\right), \tag{19}$$

де символом $\underset{(k)}{V}$ позначені похідні функції V порядку k за змінними z_i. З (19) випливає, що існує функція $T = T\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right)$, тотожно рівна нулю на многовиді M, така, що

$$G = F\left(z, V, \underset{(1)}{V}, \ldots, \underset{(p)}{V}\right) + T\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right).$$

Таким чином, ми встановили, що при виконанні умов теореми рівняння (17) записується в еквівалентному вигляді

$$W' \equiv V_{z_{i_1} \ldots z_{i_p}} - F\left(z, V, \underset{(1)}{V}, \ldots, \underset{(p)}{V}\right) - T\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right), \tag{20}$$

причому $T|_M = 0$.

Той факт, що ДРЧП (20) умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів (16), що відповідають анзацу (10), встановлюється безпосереднім обчисленням. Справді, r-те продовження оператора ∂_{y_j} дорівнює ∂_{y_j}. Діючи оператором ∂_{y_j} на ліву частину рівняння (20), маємо $W'_{y_j} = -T_{y_j}$. Але $T_{y_j}|_M =$ $= (T|_M)_{y_j} = 0$, звідки $W'_{y_j}\big|_{\substack{W'=0 \\ M}} = 0$, де індекс j набуває значень від 1 до R, що й треба було довести. Звідси випливає, що вихідне ДРЧП (1) умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів (16), записаних у вихідних змінних x, $u(x)$.

Достатність. Нехай ДРЧП (1) умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів (2), що задовольняють умову (4).

Як показує пряма перевірка, справедливе наступне твердження: якщо ДРЧП (1) умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів $Q_a^{(1)}$, то воно умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів $Q_a^{(2)}$, пов'язаних з операторами $Q_a^{(1)}$ перетворенням (11). Оскільки оператори (2) задовольняють умову (4), то, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\operatorname{rank}\|\xi_{aj}\|_{a=1,\,j=1}^{Rn} = R$. Тоді, використовуючи перетворення (11) і вибираючи функції $\lambda_{ab}(x,u)$ необхідним чином, оператори (2) можна звести до еквівалентного вигляду

$$Q_a^{(2)} = \partial_{x_a} + \sum_{j=R+1}^{N} \tilde{\xi}_{aj}(x,u)\,\partial_{x_j} + \tilde{\eta}_a(x,u)\,\partial_u, \quad a = \overline{1,N},$$
$$Q_b^{(2)} = 0, \quad b = \overline{R+1,N}. \tag{21}$$

Згідно зі згаданим вище ДРЧП (1) умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів (21). За означенням (1) існують такі функції $f_{ab}^c(x,u)$, що

$$\left[Q_a^{(2)}, Q_b^{(2)}\right] = \sum_{c=1}^{R} f_{ab}^c\,Q_c, \quad a,\, b = \overline{1,R}. \tag{22}$$

Обчислюючи комутатори в правих частинах рівностей (22) і прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних операторах ∂_{x_a}, $a = \overline{1,R}$, приходимо до висновку, що $f_{ab}^c = 0$, $a,b,c = \overline{1,R}$. Отже, оператори $Q_a^{(2)}$, $a = \overline{1,R}$, комутують. Тому існує заміна змінних вигляду (9), що приводить ці рівняння до вигляду (16).

Далі в рівнянні (1) зробимо заміну змінних (9). В результаті одержуємо ДРЧП вигляду (17), яке є умовно інваріантним відносно інволютивної множини операторів (16). Розв'язуючи (17) відносно однієї зі старших похідних, маємо

$$W' \equiv V_{z_{i_1}\ldots z_{i_k} y_{i_{k+1}}\ldots y_{i_r}} - F\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right) = 0. \tag{23}$$

З умови теореми випливає, що справедлива рівність

$$\tilde{Q}_a' W'\big|_{\substack{W'=0\\M}} = 0, \quad a = \overline{1,R}, \tag{24}$$

де символом $\tilde{Q}_a'$ позначено r-те продовження оператора $\tilde{Q}_a$, а многовид M означений вище. Оскільки r-те продовження оператора ∂_{y_a} дорівнює ∂_{y_a}, то співвідношення (24) записується у вигляді

$$F_{y_a}\big|_{\substack{W'=0\\M}} = 0, \quad a = \overline{1,R},$$

або (враховуючи, що функція F не залежить від змінної $V_{z_{i_1}\ldots z_{i_k} y_{i_{k+1}}\ldots y_{i_r}}$)

$$F_{y_a}\big|_M = 0, \quad a = \overline{1,R}.$$

Отже, існують функції $P_a\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right)$ такі, що

$$F_{y_a} = P_a, \quad P_a\big|_M = 0, \quad a = \overline{1,R}. \tag{25}$$

З умов сумісності перевизначеної системи ДРЧП (25)

$$\frac{\partial}{\partial y_b}\left(F_{y_a}\right) = \frac{\partial}{\partial y_a}\left(F_{y_b}\right), \quad a, b = \overline{1, R},$$

випливають співвідношення для функції P: $P_{a y_b} = P_{b y_a}$, $a, b = \overline{1, R}$ звідки $P_a = P_{y_a}$, $a = \overline{1, R}$. Підставляючи одержаний результат в (25), маємо

$$F_{y_a} = P_{y_a}, \quad P_{y_a}\big|_M = 0, \quad a = \overline{1, R}. \tag{26}$$

Інтегруючи ДРЧП (26), одержуємо формулу для функції F:

$$F = P - P\big|_{y_j = 0} + L\left(z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right), \tag{27}$$

де L — довільна гладка функція.

Покажемо, що функція $T = P - P\big|_{y_j = 0}$ перетворюється в нуль на многовиді M. Для цього розкладемо функцію P за змінними y_j в околі точки $y_j = 0$, $j = \overline{1, R}$:

$$P = P\big|_{y_j = 0} + \sum_{a = 1}^{R}\left(P_{y_a}\big|_{y_j = 0}\right) y_a + \sum_{a, b = 1}^{R}\left(P_{y_a y_b}\big|_{y_j = 0}\right) y_a\, y_b + \ldots$$

і перейдемо в даній рівності на многовид M. З (26) випливає, що всі похідні функції P за змінними y_a, $a = \overline{1, R}$, на многовиді M дорівнюють нулю. Тому справедлива рівність

$$P\big|_M = \left(P\big|_{y_j = 0}\right)\Big|_M,$$

що й треба було довести. Отже, ми встановили, що згідно з умовою теореми ДРЧП (1) може бути записаним в еквівалентному вигляді

$$V_{z_{i_1} \ldots z_{i_k} y_{i_{k+1}} \ldots y_{i_r}} = L\left(z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right) + T\left(y, z, V, \underset{1}{V}, \ldots, \underset{r}{V}\right), \tag{28}$$

причому $T\big|_M = 0$.

Підставляючи анзац $V = \varphi(z)$, інваріантний відносно інволютивної множини операторів $Q_a' = \partial_{y_a}$, $a = \overline{1, R}$, в (28) і враховуючи очевидне співвідношення $T\big|_{V = \varphi(z)} = T\big|_M = 0$, одержуємо:

а) при $k < r$ $\quad L\left(z, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{r}{\varphi}\right) = 0$;

б) при $k = r$ $\quad \varphi_{z_{i_1} \ldots z_{i_r}} = L\left(z, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \ldots, \underset{r}{\varphi}\right)$.

Отже, анзац $V = \varphi(z)$ редукує ДРЧП (28). Звідси, анзац (7), який відповідає інволютивній множині операторів (2), редукує вихідне рівняння ДРЧП (1). Теорема доведена.

Зауваження. **1.** З доведеного твердження легко вивести класичну теорему про теоретико-групову редукцію ДРЧП: якщо рівняння (1) інваріантне відносно N-параметричної групи перетворень з базисними генераторами (2), що задовольняють умову (4), то анзац, інваріантний відносно цієї групи, редукує ДРЧП (1). Доведення випливає з того факту, що базисні генератори групи Лі задовольняють умови (3) при $f_{ab}^{c} = \text{const}$ (див., наприклад, [3]).

2. Відомо, що існує зв'язок між редукцією ДРЧП (1), умовно інваріантного відносно інволютивної множини операторів (2), і сумісністю перевизначеної системи ДРЧП (1), (5). Проте, як показують наведені нижче приклади, жодна з цих властивостей не є наслідком іншої.

Рівняння

$$x^2(\nabla u)^2 - (x\nabla u)^2 = m^2, \quad m \neq 0, \tag{29}$$

інваріантне відносно групи поворотів $O(3)$ з базисними операторами $J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}$, $a, b = \overline{1,3}$, однак система ДРЧП

$$\begin{aligned} &x^2(\nabla u)^2 - (x\nabla u)^2 = m^2, \\ &J_{ab}u = 0, \quad a, b = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{30}$$

не є сумісною. Зауважимо, що множина розв'язків рівняння (29) — непорожня множина. Справді,

$$u = m \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_1^2}}{x_3} + c, \quad c = \text{const}, \tag{31}$$

є розв'язком рівняння (29), інваріантним відносно двопараметричної підгрупи з генераторами $\{J_{12},\ D = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\}$, в чому можна легко переконатися, підставивши (31) в (29).

З іншого боку, система ДРЧП

$$u_{xx} + u_{yy} - u + y(u_x - u) = 0,$$
$$u_y = 0$$

сумісна (вона має розв'язок $u = ce^x$, $c = \text{const}$), але рівняння $u_{xx} + u_{yy} - u + y(u_x - u) = 0$ не є умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_y$.

Далі розглянемо декілька прикладів редукції нелінійних ДРЧП, що допускають нетривіальну умовну симетрію.

***Приклад* 1.** Відомо [3], що максимальною в сенсі Лі групою інваріантності нелінійного хвильового рівняння

$$u_{x_0x_0} - \Delta_3 u = F(u) \tag{32}$$

є 10-параметрична група Пуанкаре. Згідно з класичним підходом Лі для того щоб одержати вичерпний опис анзаців для поля $u(x)$, які редукують ДРЧП (32), наприклад, до звичайного диференціального рівняння, необхідно спочатку описати всі нееквівалентні підгрупи групи Пуанкаре. На наступному етапі кожній такій підгрупі ставиться у відповідність анзац (інваріантний розв'язок), підставляючи який у вихідне рівняння (32), маємо звичайне диференціальне рівняння [3]. Проте існують широкі класи анзаців, які редукують ДРЧП (1) і не можуть бути одержані в рамках описаного вище лієвського підходу. Наприклад, анзац

$$u = \varphi(x_1 + W(x_0 + x_3)), \tag{33}$$

де $W \in C^2(R^1, R^1)$ — довільна функція, редукує (32) до звичайного диференціального рівняння $-\ddot{\varphi} = F(\varphi)$. Існування таких анзаців зумовлено наявністю у ДРЧП (30) нетривіальної умовної симетрії. Справді, якщо побудувати інволютивну множину операторів (2), що відповідають анзацу (33):

$$Q_1 = \partial_{x_0} - \partial_{x_3}, \quad Q_2 = \partial_{x_2}, \quad Q_3 = 2\dot{w}\,\partial_{x_1} - \partial_{x_0} - \partial_{x_3},$$

то легко переконатися, що оператор Q_3 не входить в алгебру інваріантності рівняння (32). Діючи другим продовженням оператора $\tilde{Q}_3$ на рівняння (32), маємо

$$\tilde{Q}_3 (u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} - F(u)) = 4\ddot{w}\,\partial_{x_1}(Q_1 u),$$

звідки випливає, що нелінійне хвильове рівняння (32) умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів Q_1, Q_2, Q_3.

Приклад 2. Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності [15, 16]

$$u_0 + u_{11} = \lambda(u^3 + u), \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{34}$$

Максимальною групою інваріантності рівняння (34) в сенсі Лі є двопараметрична група трансляцій з генераторами ∂_{x_0}, ∂_{x_1}. Але ж це рівняння Q-умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = \partial_{x_0} - \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\, u\partial_{x_1} + \frac{3}{2}\lambda(u^3 + u)\,\partial_u, \tag{35}$$

якому відповідає анзац, що задає u неявним чином:

$$\begin{gathered} 2\,\mathrm{arctg}\, u - \sqrt{2\lambda}\, x_1 = \varphi(\omega), \\ \omega = -\ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) - 3\lambda x_0. \end{gathered} \tag{36}$$

Він редукує рівняння (34) до звичайного диференціального рівняння

$$2\varphi'' = \varphi' + (\varphi')^3. \tag{37}$$

Загальний розв'язок рівняння (37) має вигляд

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{C_1 e^{\omega} - 1} + C_2, \quad C_1, C_2 = \mathrm{const}. \tag{38}$$

Підставляючи (38) в (36), одержуємо неявний розв'язок рівняння (34).

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Olver P.* Application of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986. – 637 p.
3. *Fushchych W. I., Shtelen W. M., Serov N. I.* The symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. – Kiev: Nauk. dumka, 1989. – 336 p.
4. *Fushchych W.* Symmetry in problems of mathematical physics // Algebraic-theoretical studied in mathematical physics. – Kiev: Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine, 1981. – P. 6–44.
5. *Fushchych W.* On symmetry and partial solutions of some multi-dimensional equations of mathematical physics // Algebraic-theoretical studied in mathematical physics problems. – Kiev: Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine, 1983. – P. 4–23.
6. *Fushchych W., Serov N.* The symmetry and exact solutions of the nonlinear multi-dimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations // J. Phys. A. – 1983. – **16**. – P. 3645–3658.
7. *Fushchych W. I.* On symmetry and exact solutions of multi-dimensional nonlinear wave equations // Ukr. Mat. Zh. – 1987. – **39**, № 1. – P. 116–123.
8. *Fushchych W. I.* How to expand symmetry of differential equations ? // Symmetry and solutions of nonlinear equations of mathematical physics. – Kiev: Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine, 1987. – P. 4–16.
9. *Fushchych W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of Maxwell's equations. – Dordrecht: D. Reidel Publ., 1987. – 395 p.
10. *Fushchych W. I., Serov M. I.* Conditional symmetry and exact solutions of the nonlinear acoustic equations // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1988. – № 10. – P. 27–31.
11. *Fushchych W. I., Tsifra I. M.* On a reductions and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A. – 1987. – **20**. – P. L45–48.
12. *Fushchych W. I., Zhdanov R. Z.* Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Rept. – 1989. – **172**, № 4. – P. 114–174.
13. *Fushchych W. I., Shtelen W. M., Serov M. I.* Symmetry analysis and exact solutions of the equations of mathematical physics. – Kluwer Acad. Publ., 1993. – 435 p.
14. *Clarkson P., Kruskal M.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. – 1989. – **30**, № 10. – P. 2201–2213.
15. *Fushchych W. I., Zhdanov R. Z.* Conditional symmetry and reduction of partial differential equations // Ukr. Math. Zh. – 1992. – **44**, № 7. – P. 970–982.
16. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 24–27.

Одержано 27.07.94