УДК 517. 9

К. Г. Валеев, И. А. Джалладова (Киев нац. екон. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We consider a system of differential equations with controls which are linearly contained in the right-hand sides. We establish necessary condition for optimal control which minimizes the quadratic functional.

Розглянуто систему диференціальних рівнянь з керуваннями, що лінійно входять у праву частину. Знайдено необхідну умову для оптимального керування, що мінімізує квадратичний функціонал.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t, \xi(t))X(t) + B(t, \xi(t))U(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ – случайный марковский процесс, принимающий конечное число значений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с вероятностями

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

удовлетворяющими системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)p_s(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Коэффициенты системы (3) удовлетворяют известным условиям [1]

$$\alpha_{ks}(t) \geq 0, \quad k \neq s, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks}(t) = 0, \quad k, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Для описания плотности распределения дискретно-непрерывного случайного процесса $(\xi(t), X(t))$ можно использовать функцию вида

$$f(t, X, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t, X)\delta(\xi - \theta_k),$$

где функции $f_k(t, X)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, называют частными плотностями.

Введем частные математические ожидания произвольной функции $g(t, X(t), \xi(t))$:

$$\langle g(t, X(t), \xi(t))\rangle_k = \int_{E_m} g(t, X, \theta_k) f_k(t, X)\, dX, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь E_m – фазовое пространство переменных X, $\dim X = m$.

Математическое ожидание функции $g(t, X(t), \xi(t))$ таково:

$$\langle g(t, X(t), \xi(t))\rangle = \int_{E_m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t, X, \xi) f(t, X, \xi)\, d\xi\right) dX =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{E_m} g(t, X, \theta_k) f_k(t, X)\, dX = \sum_{k=1}^{n} \langle g(t, X(t)), \xi(t)\rangle_k.$$

Введем обозначения для частных моментов второго порядка:

$$M_k(t) = \left\langle X(t)\, X^*(t) \right\rangle_k = \int\limits_{E_m} X X^* f_k(t, X)\, dX.$$

Тогда

$$M(t) = \left\langle X(t)\, X^*(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} M_k(t).$$

Сформулируем задачу оптимизации. В системе уравнений (1) ищется оптимальное управление вида

$$U(t) = S(t, \xi(t))\, X(t), \tag{4}$$

при котором минимизируется значение функционала

$$J(t) = \left\langle \int\limits_t^{\infty} (X^*(\tau)\, C(\tau, \xi(\tau))\, X(\tau) + U^*(\tau)\, D(\tau, \xi(\tau))\, U(\tau)\, d\tau \right\rangle. \tag{5}$$

2. Общий случай. Введя обозначения для частных значений случайных матриц

$$A(t, \theta_k) = A_k(t), \quad B(t, \theta_k) = B_k(t), \quad C(t, \theta_k) = C_k(t),$$
$$D(t, \theta_k) = D_k(t), \quad S(t, \theta_k) = S_k(t)$$

и использовав известную систему линейных дифференциальных уравнений для частных моментов второго порядка [1, 2] $M_k(t)$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = (A_k(t) + B_k(t) S_k(t))\, M_k(t) + M_k(t)(A_k^*(t) + S_k^*(t)\, B_k^*(t)) + \tag{6}$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\, M_s(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

запишем для функционала (5) явное выражение

$$J(t) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_t^{\infty} (C_k(\tau) + S_k^*(\tau)\, D_k(\tau)\, S_k(\tau)) \circ M_k(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Операция $\circ$ обозначает скалярное произведение матриц одного порядка N и S с элементами $v_{kj},\ s_{kj},\ k = 1, \ldots, l,\ j = 1, \ldots, m$:

$$N \circ S = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \nu_{kj} \cdot s_{kj}.$$

Свойства скалярного произведения следующие:

1) $\dfrac{D(N \circ S)}{DS} = N$;

2) $A \circ B = B \circ A = A^* \circ B^*$;

3) $Y^* S X = (YX)^* \circ S$;

4) $AMB \circ S = A^* S B^* \circ M$.

Под производной H по матрице $S_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$, будем понимать равенство

$$\frac{DH}{DS} = \left\| \frac{\partial H}{\partial S_{kj}} \right\|, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, синтез оптимального управления (4) для стохастической системы (1) с минимизируемым функционалом (5) сводится к нахождению матриц $S_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$, в детерминированной системе (6), при которых минимизируется значение функционала (7), линейного относительно фазовых переменных $M_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$.

Вычислительные трудности заключаются в том, что система оптимизируемых уравнений (6) имеет порядок m^2n и запись ее в скалярной форме неэффективна.

Для нахождения оптимального управления используем принцип максимума Понтрягина [3, 4]. В силу линейности функционала (4) его минимальное значение можно представить в виде

$$\min_{S(\tau)} J(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \circ M_k(t), \tag{8}$$

где $\psi_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$, – матрицы сопряженных переменных.

Лемма 1. *Необходимые условия оптимальности решений системы уравнений* (1) *выражаются равенствами*

$$S_k(t) = D_k^{-1}(t)\, B_k^*(t)\, \psi_k(t), \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Доказательство. Введем функцию Гамильтона

$$H = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \circ [(A_k(t) + B_k(t))S_k(t)]M_k(t) + M_k(t)(A_k^*(t) + S_k^*(t)B_k^*(t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks}(t) M_s(t) + \sum_{k=1}^{n} (C_k(t) + S_k^*(t) D_k(t) S_k(t)) \circ M_k(t). \tag{10}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина необходимые условия оптимальности имеют вид

$$\frac{DH}{DS_k} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

Преобразуем функцию-матрицу (10) к виду, удобному для дифференцирования по матрицам $S_k(t)$, $k = 1,2,\ldots,n$, с использованием свойства 4 скалярного произведения:

$$H = \sum (2A_k^*(t)\,\psi_k(t) \circ M_k(t) + 2B_k^*(t)\psi_k(t)\, M_k(t) \circ S_k(t) +$$

$$+ C_k(t)\, M_k(t) + D_k(t)\, S_k(t)\, M_k(t) \circ S_k(t) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\, \psi_k(t) \circ M_s). \tag{12}$$

С учетом свойства 1, скалярного произведения система матричных уравнений (11) принимает вид

$$\frac{DH}{DS_k} = 2B_k^*(t)\,\psi_k(t)\,M_k(t) + 2\,D_k(t)\,S_k(t)\,M_k(t) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

откуда следуют равенства (9).

Теорема 1. *Оптимальное управление задачи* (1), (4), (5) *определяется равенствами*

$$S_k(t) = D_k^{-1}(t)\, B_k^*(t)\, \psi_k(t), \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Матрицы $\psi_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$, *находятся из предельных соотношений*

$$\psi_k(t) = \lim_{T\to+\infty} \psi_{kT}(t), \quad k = 1, 2,\ldots, n,$$

где $\psi_{kT}(t)$, $k=1, 2,\ldots, n$, *– решение системы уравнений*

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = (A_k(t) - B_k(t)\, D_k^{-1}(t)\, B_k^*(t)\, \psi_k(t))\, M_k(t) + $$
$$+ M_k(t)(A_k^*(t) - \psi_k(t)\, B_k(t)\, D_k^{-1}(t)\, B_k^*(t)) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\, M_s(t), \quad k = 1, 2,\ldots, n, \tag{13}$$
$$\frac{d\psi_k(t)}{dt} = -A_k^*(t)\,\psi_k(t) - \psi_k(t)\, A_k(t) - C_k(t) +$$
$$+ \psi_k^*(t)\, B_k(t)\, D_k^{-1}(t)\, B_k^*(t)\, \psi_k(t) - \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\, \psi_s(t), \quad k = 1, 2,\ldots, n,$$

с начальными условиями

$$\psi_{kT}(t) = 0, \quad k = 1, 2,\ldots, n.$$

Доказательство. Исключив из (10) и (12) матрицы $S_k(t)$, $k=1, 2,\ldots, n$, с помощью равенств (9), получаем выражения

$$H = \sum_{k=1}^{n} (A_k^*(t)\,\psi_k(t) \circ M_k(t) + \psi_k(t)\, A_k^*(t) \circ M_k(t) + C_k(t) \circ M_k(t) -$$
$$- \psi_k^*(t)\, B_k(t)\, D^{-1}(t)\, B_k^*(t) \circ \psi_k(t) \circ M_k(t)) + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\, \psi_k(t) \circ M_s(t),$$

$$H = \sum_{k=1}^{n} (A_k(t)\, M_k(t) \circ \psi_k(t) + M_k(t)\, A_k^*(t) \circ \psi_k(t) + C_k(t) \circ M_k(t) -$$
$$- B_k(t)\, D^{-1}(t)\, B_k^*(t)\, \psi_k(t)\, M_k(t) \circ \psi_k(t) + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\, M_s(t) \circ \psi_k(t)).$$

Изменение матриц $M_k(t)$, $\psi_k(t)$, $k=1, 2,\ldots, n$, определяется системой матричных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \frac{DH}{D\psi_k}, \quad \frac{d\psi_k}{dt} = -\frac{DH}{DM_k}, \quad k = 1, 2,\ldots, n,$$

которая принимает вид (13).

Система уравнений (13) для матриц $\psi_k(t)$, $k = 1, 2,\ldots, n$, не зависит от матриц $M_k(t)$, $k=1, 2,\ldots, n$, и представляет собой обобщение матричного уравнения Риккати на стохастический случай.

Пусть найдено решение такое, что $\psi_{kT}(t) = 0$, $k = 1, 2,\ldots, n$. Матрицы $\psi_{kT}(t)$, $k=1, 2,\ldots, n$, доставляют минимальное значение функционалу

$$\min_{S(\tau)} \left\langle \int_t^T X^*(\tau)(C(\tau, \xi(\tau)) + S^*(\tau, \xi(\tau))\, D(\tau, \xi(\tau))\, S(\tau, \xi(\tau))\, X(\tau))\, d\tau \right\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_{kT}(t) \circ M_k(t), \quad t \le \tau \le T,$$

и тогда функция $\psi_k(t)$, $k=1, 2,\ldots, n$, доставляющая минимальное значение функционалу (4), приближенно находится из соотношения

$$\psi_k(t) = \lim_{T\to+\infty} \psi_{kT}(t)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

что и требовалось доказать.

3. Стационарный случай. Переформулируем теорему для случая, когда коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений (1) и функционала (4) являются кусочно-постоянными функциями.

Пусть коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\xi(t))X(t) + B(\xi(t))U(t) \tag{14}$$

зависят от марковского случайного процесса $\xi(t)$, принимающего конечное число значений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с вероятностями $p_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющими системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks}\, p_s(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\alpha_{ks} \geq 0, \qquad (k \neq s), \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ks} = 0, \qquad k, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Пусть для системы* (14) *существует оптимальное управление вида*

$$U = S(\xi(t))X,$$

минимизирующее значение функционала

$$J(t) = \left\langle \int_t^{\infty} (X^*(\tau)C(\xi(\tau))\,X(\tau) + U^*(\tau)\,D(\xi(\tau))\,U(\tau))\,d\tau \right\rangle.$$

Тогда синтез оптимального управления определяется формулами

$$S_k(t) = D_k^{-1}(t)\,B_k^*(t)\,\psi_{k0}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где обозначено

$$\psi_{k0}(t) = \lim_{T\to-\infty} \psi_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрицы $\psi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют системе матричных дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\psi_k(t)}{dt} = -A_k^*(t)\,\psi_k(t) - \psi_k(t)\,A_k(t) - C_k(t) +$$

$$+\ \psi_k^*(t)\,B_k(t)\,D_k^{-1}(t)\,B_k^*(t)\,\psi_k(t) - \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}(t)\,\psi_s(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\psi_k(0) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При этом минимальное значение функционала $J(t)$ *определяется по формуле*

$$\min_{S(\tau)} J(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \circ M_k(t), \qquad \tau \geq T.$$

4. Уравнение Беллмана для стохастической системы линейных дифференциальных уравнений. Введем оператор

$$\min_{S(\tau)} = \left\langle \int_t^\infty (X^*(\tau)(C(\tau, \xi(\tau)) + S^*(\tau, \xi(\tau))\, D(\tau, \xi(\tau)\, S(\tau, \xi(\tau)))\, X(\tau)\, d\tau \right\rangle =$$

$$= \nu(t, X(t)) = \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \circ M_k(t).$$

Лемма 2. *Оптимальное управление задачи управления синтезируется стохастическим уравнением Беллмана*

$$\min_{S(t)} = \left\{\left\langle \frac{d\nu(t, X(t)}{dt} + X^*(t)(C(\xi(t)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + S^*(t, \xi(t))\, D(t, \xi(t)\, S(t, \xi(t)))\, X(t) \right\rangle\right\} = 0, \tag{16}$$

где производная оператора $\nu(t, X(t))$ *выполняется в силу системы*

$$\frac{dX(t)}{dt} = (A(t, \xi(t))\, X(t) + B(t, \xi(t))\, S(t, \xi(t)))\, X(t).$$

Доказательство. С учетом равенства (15) и системы моментных уравнений (6) уравнение (16) принимает вид

$$\min_{S(t)} \sum_{k=1}^n \frac{d\psi_k(t)}{dt} \circ M_k(t) + \psi_k(t) \circ [(A_k(t) + B_k(t)\, S_k(t))\, M_k(t) +$$

$$+ M_k(t)\,(A_k^*(t) + S_k(t)\, B_k^*(t)) + \sum_{s=1}^n \alpha_{ks}(t)\, M_s(t)] +$$

$$+ C_k(t) \circ M_k(t) + S_k^*(t)\, D_k(t)\, S_k(t) \circ M_k(t)\} = 0. \tag{17}$$

Дифференцируя сумму в формуле (17) по матрицам S_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем равенства (9).

Исключая матрицы S_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, приведем уравнения (17) к виду

$$\sum_{k=1}^n M_k(t) \circ (\frac{d\psi_k(t)}{dt} + C_k(t) + [A_k^*(t)\, \psi_k(t) + \psi_k(t)\, A_k(t) +$$

$$+ \sum_{s=1}^n \alpha_{ks}(t)\, \psi_s(t) - \psi_k(t)\, B_k(t)\, D_k^{-1}(t)\, B_k^*(t)\, \psi_k(t)] = 0. \tag{18}$$

Чтобы выполнялось уравнение (18) при любых $M_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, достаточно, чтобы выполнялась система уравнений (15).

Следовательно, уравнение Беллмана (16) позволяет осуществить синтез оптимального управления для системы (1) с функционалом (4).

1. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.
2. *Тихонов В. И., Миронов Н. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. *Артемьев В. М., Казаков И. Е.* Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1987. – 721 с.
4. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 552 с.

Получено 19. 06. 98