УДК 517.95

Ю. В. Жерновий (Львів. ун-т)

УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

We establish conditions for the existence and uniqueness of nonnegative solutions of nonlinear stationary heat conduction problems — the Dirichlet problem and the Neyman nonlinear problem — with regard to the dependence of heat conduction coefficient and of inner heat sources on temperature.

Встановлено умови існування та єдиності невід'ємних розв'язків нелінійних стаціонарних задач теплопровідності — задачі Діріхле та нелінійної задачі Неймана — з урахуванням залежності коефіцієнта теплопровідності та внутрішніх джерел тепла від температури.

При математичному моделюванні високотемпературних теплових процесів необхідно враховувати як залежність від температури теплофізичних характеристик тіла, що нагрівається (тобто залежність коефіцієнтів рівняння теплопровідності від температури — внутрішню нелінійність) [1], так і наявність теплових потоків випромінювання і випаровування з поверхні тіла (зовнішню нелінійність) [2, 3]. Крім цього, нелінійність диференціального рівняння теплопровідності може зумовлюватись залежністю внутрішніх джерел тепла від температури [1].

Надзвичайно важливим завданням з точки зору прогнозування та оптимізації теплових процесів є розв'язання питання про існування стаціонарного теплового стану тіла — теплової рівноваги. Питання існування та єдиності розв'язку стаціонарних задач тепловипромінювання розглядались у роботі [2] в припущенні, що коефіцієнт теплопровідності і джерела тепла не залежать від температури, а випромінювання відбувається лише з частини поверхні тіла (мішана крайова задача). Нижче проведено дослідження стаціонарних задач теплопровідності з урахуванням залежності коефіцієнта теплопровідності та внутрішніх джерел тепла від температури і з заданням нелінійної крайової умови на всій поверхні тіла.

Обмежимось розглядом областей з $\mathbb{R}^3$, зауваживши, що всі одержані результати справедливі й для $\mathbb{R}^n$. В області $D \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій замкненою достатньо гладкою поверхнею S, розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\operatorname{div}\big(\lambda(T)\operatorname{grad}T(x)\big) = -W(x, T), \; x \in D; \; \lambda(T)\frac{\partial T(x)}{\partial n} = \varphi\big(x, T(x)\big), \; x \in S. \quad (1)$$

Тут $x = (x_1, x_2, x_3)$; n — одиничний вектор зовнішньої нормалі в точці $x \in S$; задані функції λ, W, φ — достатньо гладкі, причому $\lambda(T) > 0$.

Згідно з фізичним змістом задачі (1), $T(x)$ — стаціонарний розподіл температури, $\lambda(T)$ та $W(x, T)$ — відповідно коефіцієнт теплопровідності та густина розподілу внутрішніх джерел тепла, залежні від температури, а функція $\varphi(x, T)$ може задаватися лінійною по T, якщо на поверхні S відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона [1], або нелінійною, якщо враховується відведення тепла через S за рахунок випромінювання і випаровування [2, 3]. Враховуючи, що для реальних теплових процесів значення температури обмежене знизу абсолютним нулем, будемо розглядати невід'ємні розв'язки задачі (1).

Відзначимо, що задача (1) є частковим випадком відповідної крайової задачі для квазілінійного еліптичного рівняння, дослідження існування розв'язків якої зведено в [4] до встановлення апріорної оцінки максимуму модуля розв'язку через дані задачі. Відомо, що в загальному випадку це зробити не вдається. Умовою єдиності розв'язку для загального випадку [4] є досить жорстка вимога необмеженої розв'язності відповідної задачі в варіаціях. Нижче будуть встановлені умови існування та єдиності класичних невід'ємних розв'язків задачі (1), а також відповідної задачі Діріхле, які не можуть бути одержані з [4].

Виконавши в задачі (1) заміну шуканої функції (перетворення Кірхгофа)

$$u(T) = \int_0^T \lambda(\tau)\, d\tau,$$

одержимо нелінійну крайову задачу для оператора Лапласа

$$\Delta u(x) = -w(x, u(x)), \quad x \in D, \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x, u(x)), \quad x \in S. \tag{2}$$

Тут $f(x, u) = \varphi(x, T(u))$, $w(x, u) = W(x, T(u))$, а умова $\lambda(T) > 0$ при достатній гладкості $\lambda(T)$ забезпечує існування оберненої функції $T(u) = u^{-1}(T)$. Будемо розглядати класичні невід'ємні розв'язки задачі (2) $u(x) \in U_+ = \{ u(x), x \in \overline{D} : u \geq 0,\ u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \}$.

Лема 1. *Якщо для функцій* $w(x, u)$, $x \in D$, $f(x, u)$, $x \in S$, *де* $u \in C^2(D) \cap \cap C^1(\overline{D})$, *виконується хоча б одна з двох умов*

$$\partial w / \partial u \leq 0, \quad \partial f / \partial u < 0 \quad \textit{або} \quad \partial w / \partial u < 0, \quad \partial f / \partial u \leq 0,$$

то задача (2) *може мати лише єдиний розв'язок.*

Доведення. Нехай $u_1(x)$ і $u_2(x)$ $(u_1(x) \neq u_2(x))$ — два розв'язки задачі (2). Тоді їх різниця $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$\Delta u(x) = -[w(x, u_1) - w(x, u_2)], \ x \in D, \ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x, u_1) - f(x, u_2), \ x \in S. \tag{3}$$

Запишемо першу формулу Гріна для оператора Лапласа

$$\int_D u \Delta u\, dx = -\int_D (\mathrm{grad}\, u)^2\, dx + \int_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS.$$

Враховуючи (3), одержуємо

$$\int_D (\mathrm{grad}\, u)^2\, dx = \int_D (u_1 - u_2)\,[w(x, u_1) - w(x, u_2)]\, dx +$$

$$+ \int_S (u_1 - u_2)\,[f(x, u_1) - f(x, u_2)]\, dS.$$

З умов монотонності функцій $w(x, u)$ і $f(x, u)$ відносно u випливає, що остання рівність може виконуватися лише при $u_1(x) - u_2(x) \equiv 0$. Лему доведено.

Для встановлення умов існування розв'язку задачі (2) використаємо апарат функцій Гріна. Як відомо [5, 6], для задачі Неймана існує тільки узагальнена функція Гріна, але з її допомогою ми не досягнемо поставленої мети. Тому розглянемо функцію Гріна третьої крайової задачі для оператора Лапласа, тобто функцію $G(x; y)$, що задовольняє такі умови як функція точки x при довільній фіксованій точці $y \in D$ [7]:

$$\Delta_x G = 0, \quad x \in D, \quad x \neq y; \qquad \frac{\partial G}{\partial n_x} + hG = 0, \quad x \in S, \quad h = \mathrm{const} > 0; \tag{4}$$

$$G(x; y) = \frac{1}{4\pi r(x, y)} + g(x; y), \quad x \in \overline{D},$$

де $r(x, y) = |x - y|$;

$$\Delta_x g = 0, \quad x \in D; \qquad \frac{\partial g}{\partial n_x} + hg = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{r} + \frac{h}{r}\right], \quad x \in S.$$

Якщо S — достатньо гладка поверхня (поверхня Ляпунова [7]), то існує і однозначно визначена функція $g(x; y)$ (а отже, і функція Гріна $G(x; y)$), неперервна по x як розв'язок третьої крайової задачі для рівняння Лапласа.

Лема 2. *Функція Гріна третьої крайової задачі* (4) *не може набувати від'ємних значень:* $G(x; y) \geq 0$ *для всіх* $(x, y) \in \overline{D} \times D$.

Доведення. При $x = y$ $G(x; y) = \infty$. Запишемо крайову умову задачі (4) у вигляді

$$G = -\frac{1}{h}\frac{\partial G}{\partial n_x}, \quad x \in S. \tag{5}$$

Нехай $y \in D$ — фіксована точка. Тоді в області $D_y \subset \overline{D}$, де D_y — окіл точки y, маємо $G(x; y) > 0$. Розглянемо область $D_1 = D \setminus D_y$. Функція $G(x; y)$ гармонійна в області D_1, тому для неї має місце принцип максимуму. Припустимо, що існує точка $x_0 \in S$, для якої $G(x_0; y) < 0$, причому нехай $G(x_0; y) = \min\limits_{x \in S} G(x; y)$. Тоді, згідно з (5), $\partial G(x_0; y)/\partial n_x > 0$, а отже, існує точка $x_1 \in D_1$ з околу точки x_0 така, що $G(x_1; y) < G(x_0; y)$, що суперечить принципу максимуму (мінімуму). Отже, $G(x; y) \geq 0$ для всіх $(x, y) \in \overline{D} \times D$. Лему доведено.

Використовуючи функцію Гріна (4) і другу формулу Гріна, можна показати, що для розв'язку $u(x)$ крайової задачі (2) виконується інтегральне співвідношення

$$u(x) = \int\limits_D G(x;y)\, w(y, u(y))\, dy + \int\limits_S G(x;y)\, F(y, u(y))\, dS_y, \quad x \in \overline{D}, \tag{6}$$

де $F = f + hu$, справедливе для будь-якого $h > 0$. Надалі будемо припускати, що кожна з функцій $w(x, u)$, $f(x, u)$ неперервна і задовольняє умову Гельдера відносно обох змінних. Тоді з властивостей функції Гріна (4), вперше досліджених Жіро (див.[8]), та з відомих властивостей об'ємного потенціалу і потенціалу простого шару [5, 7] випливає еквівалентність рівняння (6) і крайової задачі

$$\Delta u(x) = -w(x, u), \quad x \in D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + hu = F(x, u), \quad x \in S, \tag{2'}$$

в сенсі класичних розв'язків $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$. Оскільки задачі (2) і (2′) еквівалентні, то можемо говорити про еквівалентність задачі (2) і рівняння (6).

Припустимо, що

$$f(x, u) = q(x) - f_1(x, u), \quad x \in S, \quad w(x, u) = w_0(x) - w_1(x, u), \quad x \in D,$$

причому хоча б одна з функцій $q(x)$, $w_0(x)$ не є тотожним нулем. Введемо позначення

$$Q(x) = \int\limits_D G(x;y)\, w_0(y)\, dy + \int\limits_S G(x;y)\, q(y)\, dS_y$$

і розглянемо оператор

$$Bu = \int\limits_D G(x;y)\, w_1(y, u(y))\, dy + \int\limits_S G(x;y)\left[f_1(y, u(y)) - hu(y)\right] dS_y,$$

заданий на множині неперервних невід'ємних функцій $u \geq 0$. Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$u(x) = Q(x) - B\,u(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{7}$$

Лема 3. *Якщо існує таке число* $h > 0$, *що виконуються умови*

$$Q(x) > 0, \; B\,Q \le Q, \; x \in \overline{D}; \quad f_1(x, u) \ge h\,u, \; x \in S; \quad w_1(x, u) \ge 0, \; x \in D; \tag{8}$$

а функції $f_1(x, u) - h\,u$, $w_1(x, u)$ — *неспадні по* u, *то для будь-якого розв'язку рівняння* (7) *виконуються нерівності* $0 \le u(x) \le Q(x)$, $x \in \overline{D}$.

Доведення. При фіксованій функції u розглянемо функцію $H(x) = B\,u(x)$, $x \in \overline{D}$, яка є неперервною в $\overline{D}$. Оскільки $G(x; y) \ge 0$ для $(x, y) \in \overline{D} \times D$ (лема 2), а функція $G(x; y)$ симетрична ($G(x; y) = G(y; x)$) [6], то $G(x; y) \ge 0$ також для $(x, y) \in D \times \overline{D}$. Отже, з урахуванням двох останніх нерівностей (8) одержимо $H(x) \ge 0$ для $x \in D$. Припустимо, що існує точка $x_0 \in S$, для якої $H(x_0) < 0$. Тоді з неперервності функції $H(x)$ в $\overline{D}$ випливає, що існує такий окіл точки x_0, що для всіх точок $x \in D$ з цього околу $H(x) < 0$. Одержана суперечність доводить, що $H(x) \ge 0$ для всіх $x \in \overline{D}$. З монотонності функцій $f_1(x, u) - h\,u$, $w_1(x, u)$ та з перших двох нерівностей (8) випливає невід'ємність та обмеженість зверху розв'язку рівняння (7). Лему доведено.

При виконанні умов леми 3 задача (2) може мати лише єдиний розв'язок (лема 1), а оператор

$$A\,u = Q - B\,u, \tag{9}$$

заданий на нормальному конусі [9] неперервних невід'ємних функцій $u(x)$, $x \in \overline{D}$, є монотонним на нормальному конусному відрізку $K_N = \{ u(x) \in C(\overline{D}) : 0 \le u(x) \le Q(x),\; x \in \overline{D} \}$ і перетворює його в себе.

Лема 4. *Оператор* (9) *є цілком неперервним на нормальному конусному відрізку* K_N.

Доведення. Досить довести, що множина функцій $A(K_N) = \{ v(x) = A\,u(x),\; u(x) \in K_N \}$ компактна. Оскільки $v(x) = A\,u(x) \le Q(x)$, то для всіх $x \in \overline{D}$ $v(x) \le M = \max_{x \in \overline{D}} Q(x)$. Таким чином, множина $A(K_N)$ рівномірно обмежена. Розглянемо функції

$$H_D(x) = \int_D G(x; y)\,dy, \qquad H_S(x) = \int_S G(x; y)\,dS_y,$$

які є неперервними в $\overline{D}$, а отже, й рівномірно неперервними в D. Продовживши функцію $w(x, u)$ по неперервності для $x \in S$, можемо вказати такі числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, що $\max_{x \in \overline{D}} w(x, u) \le C_1$, $\max_{x \in S} f(x, u) \le C_2$ для всіх $u \in K_N$. Отже, використовуючи праву частину (6), одержуємо

$$|v(x_1) - v(x_2)| = C_1 |H_D(x_1) - H_D(x_2)| + C_2 |H_S(x_1) - H_S(x_2)| <$$
$$< C_1 \varepsilon / (2C_1) + C_2 \varepsilon / (2C_2) = \varepsilon$$

для будь-яких x_1, $x_2 \in \overline{D}$, як тільки $|x_1 - x_2| < \delta$, незалежно від вибору функції $v(x) \in A(K_N)$, що означає одностайну неперервність функцій $v(x) \in A(K_N)$, а отже, і компактність множини $A(K_N)$ (теорема Арцела). Лему доведено.

Отже, для оператора A, який є монотонним і цілком неперервним на K_N і перетворює нормальний конусний відрізок K_N в себе, справедлива теорема про існування на K_N хоча б однієї нерухомої точки $u \in K_N$, [9, с.128] (теорема 4.1(в)), а це означає, що інтегральне рівняння (7) має хоча б один розв'язок $u(x) \in K_N$. Підсумовуючи викладені вище міркування, можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Якщо S — поверхня Ляпунова (тобто поверхня класу $C^{1+\alpha}$ [4]); функція $w(x, u) = w_0(x) - w_1(x, u)$ неперервна і задовольняє умову Гельдера по обох змінних $x \in D$, $u \in U_+$; функція $f(x, u) = q(x) - f_1(x, u)$ неперервна і задовольняє умову Гельдера по обох змінних $x \in S$, $u \in U_+$; хоча б одна з функцій $w_0(x)$, $q(x)$ не є тотожним нулем; існує число $h > 0$ таке, що виконуються умови леми* 3, *то крайова задача* (2) *має єдиний розв'язок у класі функцій U_+, причому $0 \le u(x) \le Q(x)$, $x \in \overline{D}$.*

Для задачі Діріхле

$$\Delta u(x) = -w(x, u(x)), \quad x \in D, \quad u(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{10}$$

де $w(x, u) = w_0(x) - w_1(x, u)$, введемо позначення

$$Q(x) = \int_D G(x;y)\, w_0(y)\, dy - \int_S \frac{\partial G}{\partial n_y}(x;y)\, f(y)\, dS_y,$$

$$B u = \int_D G(x;y)\, w_1(y, u(y))\, dy.$$

Тут $G(x;y)$ — функція Гріна задачі Діріхле для оператора Лапласа [7]. Для розв'язків $u(x) \in \tilde{U}_+ = \{ u(x),\ x \in \overline{D} : u \ge 0,\ u \in C^2(D) \cap C(\overline{D}) \}$ задачі (10) аналогічно встановлюється таке твердження.

Теорема 2. *Якщо S — поверхня класу $C^{1+\alpha}$* [4]; *функція $w(x, u) = w_0(x) - w_1(x, u)$ неперервна і задовольнює умову Гельдера по обох змінних $x \in D$, $u \in \tilde{U}_+$; функція $f(x) \in C(S)$; хоча б одна з функцій $w_0(x)$, $f(x)$ не є тотожним нулем; виконуються умови*

$$w_1(x, u) \ge 0, \quad \partial w / \partial u \le 0, \quad Q(x) > 0 \quad B Q \le Q, \quad x \in \overline{D},$$

то крайова задача (10) *має єдиний розв'язок у класі функцій $\tilde{U}_+$, причому $0 \le u(x) \le Q(x)$, $x \in \overline{D}$.*

***Приклад виконання умов теореми* 1.** Розглянемо крайову задачу (2) у випадку, коли $f(x, u) = q_0 - f_1(u)$, $q_0 = \mathrm{const} > 0$; $w(x, u) \equiv 0$. Тоді, використавши крайову умову (5) для функції $G(x; y)$, властивості потенціалу подвійного шару та неперервність функції $H_S(x)$ в $\overline{D}$, знайдемо

$$Q(x) = q_0 \int_S G(x;y)\, dS_y = q_0 / h; \quad B Q = [f_1(q_0/h) - q_0] \int_S G(x;y)\, dS_y$$

і з умови $B Q \le Q$ одержимо умову на функцію $f_1(u)$: $f_1(q_0/h) \le 2q_0$. Будемо цікавитись розв'язками $0 \le u(x) \le u_*$. Покладемо $h = q_0 / u_*$. Отже, необхідно, щоб $f_1(u_*) \le 2q_0$. Візьмемо $f_1(u) = (\alpha u + \beta)^\mu$, де $\alpha, \beta, \mu > 0$. Умова $f_1(u) \ge hu$ виконується для всіх $h \le \beta^\mu / u_*$. Звідси випливає, що повинна виконуватись нерівність $q_0 \le \beta^\mu$. Отже, $(\alpha u_* + \beta)^\mu \le 2q_0 \le 2\beta^\mu$, звідки маємо $\beta \ge \ge \alpha u_* / (2^{1/\mu} - 1)$. З вимоги, щоб функція $f_1(u) - hu$ була неспадною, одержимо нерівність $\mu\alpha(\alpha u + \beta)^{\mu-1} \ge q_0 / u_*$, яка буде виконуватись, якщо $q_0 \le \mu\alpha\beta^{\mu-1} u_*$. З іншого боку, $(\alpha u_* + \beta)^\mu / 2 \le q_0 \le \beta^\mu$. Тому будемо вимагати, щоб $q_{0\max} = \beta^\mu \le \mu\alpha\beta^{\mu-1} u_*$. Звідси одержимо нерівність $\beta \le \mu\alpha u_*$. Оскільки $\beta \ge \alpha u_* / (2^{1/\mu} - 1)$, то повинна виконуватись нерівність $\alpha u_* / (2^{1/\mu} - 1) \le \le \mu\alpha u_*$ або $\mu(2^{1/\mu} - 1) \ge 1$. Остання нерівність справедлива для $0 < \mu \le 1$.

Однак, якщо $\mu = 1$, то $\beta = q_0 = \alpha u_*$, $f(x, u) = -\alpha u$ і маємо випадок лінійної задачі для рівняння Лапласа з однорідною крайовою умовою третього роду, яка має лише тривіальний розв'язок $u \equiv 0$.

Отже, умови теореми 1 виконуються для функції $f_1(u) = (\alpha u + \beta)^{\mu}$, де $\alpha > 0$, $0 < \mu < 1$; $\alpha u_* / (2^{1/\mu} - 1) \le \beta \le \mu \alpha u_*$, якщо взяти $h = q_0 / u_*$, $(\alpha u_* + \beta)^{\mu} / 2 \le q_0 \le \beta^{\mu}$, $0 \le u(x) \le u_*$.

1. *Березовский А.А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: В 2–х ч. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – Ч.1. – 444 с.
2. *Березовский А.А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – Киев: Наук. думка, 1968. – 165 с.
3. *Березовский А.А., Жерновый Ю.В., Сайчук М.Т.* Математическое моделирование установившегося теплового режима в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Теплофизика высоких температур. – 1996. – **34**, № 1. – С. 125–133.
4. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
5. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 424 с.
6. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: В 4-х т. – М.:Наука, 1981. – Т.4, ч.II. – 552 с.
8. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 256 с.
9. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Одержано 13.03.97