УДК 517. 9

О. Б. Поліщук (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

МОДИФІКОВАНИЙ ПРОЕКЦІЙНО–ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ ТА З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

A modified version is suggested for the projective-iterative method of solving a singular integral equation with parameters and small nonlinearity.

Запропоновано модифікований варіант проекційно-ітеративного методу розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з малою нелінійністю з параметрами.

Задачі з параметрами знаходять все більше застосування в різних галузях природознавства, тому постає питання розробки ефективних методів наближеного розв'язання таких задач. Методам розв'язання інтегральних рівнянь з додатковими умовами та сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами присвячено багато робіт (див., наприклад, [1 – 3]). В даній статті викладено суть модифікованого проекційно-ітеративного методу розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з параметрами та з малою нелінійністю. Наведено достатні умови збіжності запропонованого методу.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу знаходження функції $x(t)$ і вектора $\lambda \in R^l$, які задовольняють рівняння

$$(Ax)(t) + \lambda\xi(t) = f(t) + \mu(Fx)(t) \tag{1}$$

і додаткові умови

$$\Phi(x) = \alpha, \quad \alpha \in R^l, \tag{2}$$

де

$$(Ax)(t) = a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}d\tau + \int_{-\pi}^{\pi} K(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{3}$$

$$(Fx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} H(t,\tau)F(\tau,x(\tau))d\tau, \tag{4}$$

$\lambda\xi(t)$ – скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ і вектор-функції $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_l(t))$, $\Phi(x) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_l(t))$, а

$$\Phi_s(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t)x(t)dt, \quad s = \overline{1, l},$$

$\{\xi_j(t)\}_{j=1}^{l}$, $\{\eta_s(t)\}_{s=1}^{l}$ — деякі системи лінійно незалежних функцій в $L_2[-\pi, \pi]$.

Будемо вважати, що:

1) 2π-періодичні функції $a(t)$ і $b(t)$ задовольняють умову Гельдера і $a^2(t) + b^2(t) = 1$ $\forall t \in [-\pi, \pi]$, індекс $\kappa = 0$;

2) $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K(t,\tau)|^2\,dt d\tau<\infty, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(t,\tau)|^2\,dt d\tau<\infty;$

3) $F(t,u)$ — неперервна функція своїх аргументів, 2π-періодична по t і задовольняє умову

$$|F(t,u)-F(t,v)|\le c|u-v| \quad \forall u,v\in R;$$

4) $F(\cdot,0)$, $f\in L_2[-\pi,\pi]$, μ — малий додатний параметр.

2. Зведення поставленої задачі до рівносильного їй інтегрального рівняння. Розглянемо допоміжну задачу

$$x(t)+\lambda(R\xi)(t)=u(t), \tag{5}$$

$$\Phi(x)=\alpha, \tag{6}$$

де функція $u(t)$ вважається відомою, а функція $x(t)$ і вектор λ підлягають визначенню. Тут R є еквівалентним регуляризатором оператора A, який задається таким чином:

$$(Ry)(t)=a(t)y(t)-\frac{b(t)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau, \tag{7}$$

причому $RA=I-T$, де I — одиничний , а T — цілком неперервний інтегральний оператори [4].

В результаті підстановки співвідношення (5) у (6) одержимо рівняння

$$\Phi(R\xi)\lambda=\Phi(u)-\alpha, \tag{8}$$

де матриця $B=\Phi(R\xi)$ має розмір $l\times l$. За умови, що для матриці B існує обернена, єдиний розв'язок рівняння (8) виражається формулою

$$\lambda=B^{-1}\Phi(u)-B^{-1}\alpha. \tag{9}$$

Якщо ввести позначення

$$\Gamma(u)=B^{-1}\Phi(u), \quad \beta=-B^{-1}\alpha, \tag{10}$$

то після підстановки (9) у (10) знайдемо

$$x(t)=u(t)-\Gamma(u)(R\xi)(t)-\beta(R\xi)(t), \tag{11}$$

де $\Gamma(u)(R\xi)(t)$, $\beta(R\xi)(t)$ — скалярні добутки відповідно векторів $\Gamma(u)=$ $=(\Gamma_1(u),\Gamma_2(u),\ldots,\Gamma_l(u))$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l)$ і вектор-функції $(R\xi)(t)=$ $=((R\xi_1)(t),(R\xi_2)(t),\ldots,(R\xi_l)(t))$.

Позначимо

$$(Su)(t)=\Gamma(u)(R\xi)(t), \quad (Gu)(t)=u(t)-(Su)(t). \tag{12}$$

Тоді єдиний розв'язок задачі (5), (6) виражається формулами

$$x(t)=(Gu)(t)+r(t), \tag{13}$$

$$\lambda=\Gamma(u)+\beta, \tag{14}$$

де функція $r(t)$ і вектор $\beta=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l\}$ є розв'язком задачі

$$x(t) + \lambda(R\xi)(t) = 0, \qquad \Phi(x) = \alpha. \tag{15}$$

Запишемо задачу (1), (2) у вигляді

$$x(t) + \lambda(R\xi)(t) = (Tx)(t) + (Rf)(t) + \mu(Ux)(t), \tag{16}$$

$$\Phi(x) = \alpha, \tag{17}$$

де $U = RF$ – нелінійний інтегральний оператор, що переводить $L_2[-\pi, \pi]$ в себе і є цілком неперервним [5]. За допомогою формул (5), (6), (13) задача (16), (17) зводиться до інтегрального рівняння

$$u(t) = (Mu)(t) + g(t) + \mu(Bu)(t), \tag{18}$$

де

$$\begin{gathered} (Mu)(t) = (TGu)(t), \qquad g(t) = (Tr)(t) + (Rf)(t), \\ (Bu)(t) = U((Gu)(t) + r(t)). \end{gathered} \tag{19}$$

Таким чином, задача (1), (2) зводиться до інтегрального рівняння (18), розв'язність якого добре вивчена (див., наприклад, [6]).

3. Суть методу. Застосуємо до задачі (1), (2) модифікований варіант проекційно-ітеративного методу, згідно з яким послідовні наближення будуються за формулами

$$x_k(t) + \lambda_k(R\xi)(t) = u_k(t), \qquad \Phi(x_k) = \alpha, \tag{20}$$

$$u_k(t) = y_k(t) + (R[f - Ay_k + \mu F x_{k-1}])(t), \tag{21}$$

$$y_k(t) = x_{k-1}(t) + \omega_k(t), \qquad \omega_k(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k \zeta_i(t), \tag{22}$$

а невідомі коефіцієнти a_i^k, $i = \overline{1, n}$, визначаються з умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(u_k - u_{k-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i \right)(t) \zeta_i(t)\, dt = 0, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

де $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$, $\{\zeta_i(t)\}_{i=1}^n$ — задані системи лінійно незалежних функцій.

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо з рівняння (20) за умови, що $k = 0$, а функцію $u_0(t)$ задаємо довільним чином.

Покажемо, що з умови для визначення невідомих коефіцієнтів a_i^k приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, з допомогою формул (20) – (22) знаходимо

$$u_k(t) - u_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i(t) = \varepsilon_k(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i^k (\varphi_i(t) - K_i(t)), \tag{24}$$

де

$$\varepsilon_k(t) = (R[f - Ax_{k-1} - \lambda x_{k-1}\xi + \mu F x_{k-1}])(t),$$

$$K_i(t) = \zeta_i(t) - (RA\zeta_i)(t), \qquad i = \overline{1, n}.$$

Тоді, підставляючи (24) в умову (23), отримуємо

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} a_i^k = b_j^k, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Тут

$$\beta_{ji} = \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_i(t) - K_i(t)) \zeta_j(t) dt, \qquad b_j^k = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_k(t) \zeta_j(t) dt, \quad j = \overline{1, n}.$$

4. Достатні умови збіжності. Припустимо, що системи функцій і векторів $\{\varphi_i(t)\}$, $\{\zeta_i(t)\}$, $\{\mu_i\}$ задовольняють співвідношення

$$\varphi_i(t) = \zeta_i(t) + \mu_i (R\xi)(t), \qquad \Phi(\zeta_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{25}$$

Тоді алгоритм (20) – (23) можна звести до модифікованого проекційно-ітеративного методу розв'язання інтегрального рівняння (18). З цією метою введемо позначення

$$z_k(t) = u_{k-1}(t) + \theta_k(t), \qquad \theta_k(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k \varphi_i(t). \tag{26}$$

Тоді умова для визначення невідомих коефіцієнтів (23) набирає вигляду

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u_k - z_k)(t) \zeta_i(t) dt = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{27}$$

За умовою єдиний розв'язок задачі (25) виражається формулами

$$\zeta_i(t) = (G\varphi_i)(t), \qquad \mu_i = \Gamma(\varphi_i). \tag{28}$$

Розв'язуючи задачу (20) з індексом на одиницю меншим, отримуємо

$$x_{k-1}(t) = \left(G u_{k-1} \right)(t) + r(t). \tag{29}$$

Тоді з урахуванням (26), (28), і (29) після нескладних перетворень формула (22) набирає вигляду

$$y_k(t) = (G z_k)(t) + r(t). \tag{30}$$

Якщо підставити (30) у (21) і використати позначення (19), одержимо співвідношення

$$u_k(t) = (M z_k)(t) + g(t) + \mu \left(B u_{k-1} \right)(t). \tag{31}$$

Таким чином, метод (20) – (23) розв'язання задачі (1), (2) зводиться до модифікованого проекційно-ітеративного методу (26), (27), (31) розв'язання інтегрального рівняння (18). Достатні умови збіжності і оцінки похибки методу (26), (27), (31) добре відомі [6]. Використавши їх, можна сформулювати достатні умови збіжності та встановити оцінки похибки методу (20) – (23).

Теорема. *Якщо виконуються умови* 1 – 4 *і спектральний радіус* $\rho(A) < 1$, *то задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок* $x^*(t)$, λ^*, *а послідовності* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, *побудовані згідно з проекційно-ітеративним методом* (21) – (24), *збігаються за нормою до цього розв'язку, тобто*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x_k(t)-x^*(t)\right\| = 0, \qquad \lim_{k\to\infty}\left|\lambda_k-\lambda^*\right| = 0.$$

Тут A — матриця, схема побудови якої описана в [6] (гл. IV, §15).

1. *Лучка А. Ю.* Інтегральні рівняння з додатковими умовами та методи їх розв'язання // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин -т математики НАН Украины, 1994. – С. 129 – 130.
2. *Полищук О. Б.* Метод послідовних наближень розв'язання сингулярних інтегральних рівняннь з параметрами // Там же. – Киев: Ин -т математики НАН Украины, 1996. – С. 217 – 218.
3. *Полищук О. Б.* Проекційно-ітеративний метод розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші з параметрами // Мат. шостої Міжн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15 – 17 травня 1997 р., Київ). – Київ: Нац. техн. ун-т України, 1997 . – С. 376.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
5. *Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 416 с.
6. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 290 с.

Одержано 31. 07. 97,
після доопрацювання — 11.02.98