УДК 517.956.4

Г. П. Лопушанская

О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций

В работах [1—3] доказана разрешимость общих параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера, в пространствах обобщенных функций Соболева — Слободецкого и других нормируемых функциональных пространствах. Целью настоящей заметки является исследование параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций D', не обладающем нормируемой топологией. При этом используется техника, аналогичная развитой в [4—5] для эллиптических граничных задач.

Пусть Ω_0 — область в R^n, ограниченная замкнутой поверхностью Ω_1 класса C^∞; $Q_i = [0, T] \times \Omega_i$, $i = 0, 1$; $D(\overline{Q}_0)$ и $D(Q_1)$ — пространства бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{Q}_0$ и Q_1 соответственно. В $\overline{Q}_0$ для параболической по И. Г. Петровскому системы дифференциальных уравнений

$$L(t, x, D_t, D_x)\, u \equiv \Big(D_t - \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t, x)\, D_x^k\Big)\, u = F_0 \qquad (1)$$

рассматривается следующая задача:

$$B_j(t, x, D_x) u|_{Q_1} \equiv \sum_{|k|\leqslant r_j} b_{jk}(t, x) D_x^k u|_{Q_1} = F_j, \quad j = 1, 2, \ldots, bp = m,$$
$$r_j \leqslant 2b - 1 \tag{2}$$

(граничные операторы B_j связаны с оператором L условием Я. Б. Лопатинского)

$$u|_{t=0} = F_{m+1}. \tag{3}$$

Здесь $a_k(t, x)$ — квадратные матрицы порядка p с элементами из $D(\bar{Q}_0)$, $b_{jk}(t, x)$ — строки длины p с элементами из $D(Q_1)$. Считаем систему граничных выражений нормальной в смысле [6].

Согласно [2], существуют граничные операторы $\hat{B}_j, C_j, \hat{C}_j$, $j = \overline{1, m}$, такие, что для произвольных вектор-функций $u(t, x)$, $v(t, x)$ с элементами из $D(\bar{Q}_0)$ справедлива формула Грина

$$\int_{Q_0} v' L u dt dx + \sum_{j=1}^{m} \int_{Q_1} (\hat{C}_j v)' B_j u dt dx + \int_{\Omega_0} v'(0, x) u(0, x) dx =$$
$$= \int_{Q_1} (L^* v)' u dt dx + \sum_{j=1}^{m} \int_{Q_1} (\hat{B}_j v)' C_j u dt dx + \int_{\Omega_0} v'(T, x) u(T, x) dx. \tag{4}$$

Здесь L^* — оператор, формально сопряженный оператору L, штрих означает транспонирование.

Пусть $[D(\bar{Q}_i)]^p$, $[D(\bar{\Omega}_0)]^p$ — пространства вектор-фунций с элементами из $D(\bar{Q}_i)$ и $D(\bar{\Omega}_0)$ соответственно; $[\overset{0}{D}(\bar{Q}_i)]^p = \{\varphi(t, x) \in [D(\bar{Q}_i)]^p : D_t^k \varphi(t, x)|_{t=T} = 0, \ k = 0, 1, \ldots\}$, $i = 0, 1$; $[X(\bar{Q}_0)]^p = \{\psi(t, x) \in [\overset{0}{D}(\bar{Q}_0)]^p : \hat{B}_j \psi|_{Q_1} = 0, \ j = \overline{1, m}\}$; $[Z(\bar{Q}_0)]^p$ — функциональное пространство, удовлетворяющее условию $[X(\bar{Q}_0)]^p \subset [Z(\bar{Q}_0)]^p \subset [\overset{0}{D}(\bar{Q}_0)]^p$; $[D'(\bar{Q}_i)]^p$, $[\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_i)]^p$, $[D'(\bar{\Omega}_0)]^p$, $[Z'(\bar{Q}_0)]^p$ — пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных функций) на соответствующих пространствах вектор-функций; $(\varphi, F)_0$ — действие обобщенной вектор-функции $F \in [\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_0)]^p$ на основную вектор-функцию $\varphi \in [\overset{0}{D}(\bar{Q}_0)]^p$, а также действие $F \in [Z'(\bar{Q}_0)]^p$ на $\varphi \in [Z(\bar{Q}_0)]^p$; (φ, F_1) — действие $F \in [\overset{0}{D}{}'(Q_1)]^p$ на $\varphi \in [\overset{0}{D}(Q_1)]^p$; $[\varphi, F]_0$ — действие $F \in [D'(\bar{\Omega}_0)]^p$ на $\varphi \in [D(\bar{\Omega}_0)]^p$.

Сформулируем обобщенную параболическую граничную задачу. Пусть $F_0 \in [Z'(\bar{Q}_0)]^p$, $F_1, \ldots, F_m \in [\overset{0}{D}{}'(Q_1)]^1$, $F_{m+1} \in [D'(\bar{\Omega}_0)]^p$. Найти в Q_0 решение задачи (1) — (3), а именно, обобщенную вектор-функцию $u \in [\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_0)]^p$ такую, что

$$(L^* \psi, u)_0 = (\psi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j \psi, F_j)_1 + [\psi(0, x), F_{m+1}]_0 \tag{5}$$

для каждой $\varphi \in [X(\bar{Q}_0)]^p$.

Теорема 1. *Решение обобщенной параболической граничной задачи единственное в пространстве* $[\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_0)]^p$.

Действительно, если u_1, u_2 — два решения задачи, $u = u_1 - u_2$, то из (5) следует, что $(L^* \psi, u)_0 = 0$ для каждой $\psi \in [X(\bar{Q}_0)]^p$. Используя результаты работ [2, 7, 8], можно показать, что для каждой $\varphi \in [\overset{0}{D}(\bar{Q}_0)]^p$ существует единственное решение $\psi \in [X(\bar{Q}_0)]^p$ системы $L^* \psi = \varphi$. Тогда $(\varphi, u)_0 = 0$ для каждой $\psi \in [\overset{0}{D}(\bar{Q}_0)]^p$, т. е. $u = 0$ в пространстве $[\overset{0}{D}{}'(\bar{Q}_0)]^p$.

В [7] построена матрица Грина $G(P, M) = \{G_0(P, M), \ldots, G_m(P, M)\}$, $P = (t, x)$, $M = (\tau, y)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, задачи (1)—(3), исследованы ее свойства, свойства операторов Грина и сопряженных к ним в некоторых функциональных пространствах. В случае гладких $F_j = f_j(t, x)$, $j = \overline{0, m+1}$, удовлетворяющих условиям согласования [8], решение задачи (1)—(3) имеет вид

$$u(P) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(P, M) f_0(M)\, dy + \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j(P, M) f_j(M)\, dy +$$
$$+ \int_{\Omega_0} G_0(P; 0, y) f_{m+1}(y)\, dy, \quad P \in Q_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $F_0 \in [Z'(\overline{Q}_0)]^p$, $F_1, \ldots, F_m \in [\overset{0}{D}{}'(Q_1)]^1$, $F_{m+1} \in [D'(\overline{\Omega}_0)]^p$. *Вектор-функция* u, *определенная формулой*

$$(\varphi, u)_0 = \left(\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G_0'(t, x; \tau, y)\, \varphi(t, x)\, dx, F_0\right)_0 + \sum_{j=1}^m \left(\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G_j'(t, x; \tau, y) \times\right.$$
$$\left.\times\, \varphi(t, x)\, dx, F_j\right)_1 + \left[\int_0^T dt \int_{\Omega_0} G_0'(t, x; 0, y)\, \varphi(t, x)\, dx, F_{m+1}\right]_0 \quad \forall \varphi \in [\overset{0}{D}(\overline{Q}_0)]^p \quad (6)$$

является решением обобщенной параболической граничной задачи.

Доказательство. Из определения матрицы Грина следует, что

$$L(t, x, D_t, D_x)[\Theta(t-\tau) G_0(t, x; \tau, y)] = \delta(t-\tau, x-y) E, \quad (t, x), (\tau, y) \in \overline{Q}_0,$$
$$L(t, x, D_t, D_x)[\Theta(t-\tau) G_j(t, x; \tau, y)] = 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}_0, \quad (\tau, y) \in Q_1, \qquad (7)$$
$$L(t, x, D_t, D_x) G_0(t, x; 0, y) = 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}_0, \quad y \in \overline{\Omega}_0,$$
$$B_i(t, x, D_x)[\Theta(t-\tau) G_0(t, x; \tau, y)] = 0, \quad (t, x) \in Q_1, (\tau, y) \in \overline{Q}_0,$$
$$B_i(t, x, D_x)[\Theta(t-\tau) G_j(t, x; \tau, y)] = \delta_{ij} \delta(t-\tau, x-y), \quad (t, x), \quad (\tau, y) \in Q_1$$
$$B_i(t, x, D_x) G_0(t, x; 0, y) = 0, \quad (t, x) \in Q_1, \ y \in \Omega_0, \quad i, j = \overline{1, m},$$
$$G_0(0, x; 0, y) = \delta(x-y) E,$$

где $\Theta(t-\tau) = \theta(t)\theta(\tau)\theta(t-\tau)\theta(T-t)$, $\theta(t)$ — единичная функция, так что $(\varphi(\tau), \Theta(t-\tau)) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$, $(\varphi(t), \Theta(t-\tau)) = \int_\tau^T \varphi(t)\, dt$ для каждой $\varphi \in C^\infty([0, T])$, δ_{ij} — символы Кронекера, E — единичная матрица.

Используя формулы (4) и (7), получаем

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G_0'(t, x; \tau, y) L^* \psi(t, x)\, dx = \psi(\tau, y), \quad (\tau, y) \in \overline{Q}_0, \qquad (8)$$

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G_j'(t, x; \tau, y) L^* \psi(t, x)\, dx = \widehat{C}_j \psi(\tau, y), \quad (\tau, y) \in Q_1, \quad j = \overline{1, m}, \qquad (9)$$

$$\int_0^T dt \int_{\Omega_0} G_0'(t, x; 0, y) L^* \psi(t, x)\, dx = \psi(0, y), \quad y \in \overline{\Omega}_0, \qquad (10)$$

для каждой $\psi \in [X(\overline{Q}_0)]^p$.

Из формул (8) — (10) и однозначной разрешимости сопряженной параболической граничной задачи в пространстве $[\overset{0}{D}(\overline{Q}_0)]^p$ [2, 7, 8] следует, что для каждой $\varphi \in [\overset{0}{D}(\overline{Q}_0)]^p$

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G_0'(t, x; \tau, y)\, \varphi(t, x)\, dx \in [Z(\overline{Q}_0)]^p, \ \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G_j'(t, x; \tau, y)\, \varphi(t, x)\, dx \in$$

$$\in [\overset{0}{D}(Q_1)]^1, \quad j = \overline{1, m}, \quad \int_0^T dt \int_{\Omega_0} G_0'(t, x; 0, y)\, \varphi(t, x)\, dx \in [D(\overline{\Omega}_0)]^p.$$

Таким образом, вектор-функция (6) определена для всех $F_0 \in [Z'(\overline{Q}_0)]^p$, $F_1, \ldots, F_m \in [\overset{0}{D}{}'(Q_1)]^1$, $F_{m+1} \in [D'(\overline{\Omega}_0)]^p$.

Подставляя обобщенную вектор-функцию (6) в левую часть условия (5) и используя формулы (8)—(10), убеждаемся в выполнении тождества (5) для этой вектор-функции.

В случае однородной системы дифференциальных уравнений и однородных начальных условий ($F_0 = F_{m+1} = 0$) решение этой системы внутри Q_0 является бесконечно дифференцируемой функцией, а поэтому можно иначе понимать решение задачи.

Теорема 3. *Пусть* $F_0 = F_{m+1} = 0$, $F_j \in [\overset{0}{D}{}'(Q_1)]^1$, $j = \overline{1, m}$, $u(t,x)$ — *решение задачи* (1) — (3) *в смысле* (5), *тогда* $u(t, x)$ — *решение класса* $[D(Q_0)]^p$ *однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{t \to 0} \int_{\Omega_0} \varphi'(x)\, u(t, x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi(x) \in [D(\overline{\Omega}_0)]^p, \tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_{1\varepsilon}} \varphi'(t, x_\varepsilon)\, B_j(t, x_\varepsilon, D_{x_\varepsilon})\, u(t, x_\varepsilon)\, dt dx_\varepsilon = (\varphi, F_j)_1, \quad j = \overline{1, m}, \tag{12}$$

для произвольных $\varphi(t, x) \in [\overset{0}{D}(Q_1)]^1$. *Здесь* $Q_{1\varepsilon} = [\varepsilon_1, T] \times \Omega_{1\varepsilon}$; $\Omega_{1\varepsilon}$ — *параллельная* Ω_1 *поверхность*; $x_\varepsilon = x + \varepsilon \nu(x)$, *если* $x \in \Omega_1$, $x_\varepsilon \in \Omega_{1\varepsilon}$; $\nu(x)$ — *единичный вектор внутренней нормали к* Ω_1 *в точке* x; $\varphi(t, x_\varepsilon)$ — *продолжение вектор-функции* $\varphi(t, x) \in \overset{0}{D}(Q_1)$ *на* $Q_{1\varepsilon}$, $\varphi(t, x_\varepsilon) \in \overset{0}{D}(Q_{1\varepsilon})$. *Верно обратное утверждение.*

Доказательство теоремы аналогично таковому для эллиптической краевой задачи [3]. Для доказательства обратного утверждения используется представление решения однородной системы диференциальных уравнений, удовлетворяющего условиям (11) и (12), в виде

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{m} (\Theta(t - \tau)\, G_j(t, x; \tau, y), F_j)_1, \quad (t, x) \in Q_0.$$

1. *Житарашу Н. В.* Теоремы об изоморфизмах в L^2-теории слабых решений параболических граничных задач // Докл. АН СССР.— 1981.— **260**, № 5.— С. 1054—1058.
2. *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических задач с нормальными граничными условиями // Там же.— 1971.— **197**, № 2.— С.261—264.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
4. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле для рівняння Пуассона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 1976.— Вып. 11.— С. 21—25.
5. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 1.— С. 128—131.
6. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Мат. сб.— 1969.— **78**, № 3.— С. 446—472.
7. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина неоднородной параболической граничной задачи // Докл. АН СССР.— 1969.— **187**, № 4.— С. 730—733.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.

Львов. ун-т

Получено 05.03.85
после доработки — 14.06.85