УДК 517.9

П. А. Рудченко

Аналитическое решение в конечном виде трех видов задач Коши для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

В данной работе приведены явные формулы для решения трех видов задач Коши, которые встречаются, например, при исследовании процессов конвективного массопереноса при фильтрации подземных вод [1—3].

З а д а ч а 1. Найти частное решение уравнения

$$\varphi(x)\,\partial u/\partial x + \psi(t)\,\partial u/\partial t = \chi(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее одному из условий

$$u(x, t_0) = f(x) \tag{2}$$

или

$$u(x_0, t) = g(t). \tag{3}$$

В первом случае, введя замену

$$u_0(x, t) = v(x, t) + u_ч(x, t), \tag{4}$$

найдем общее решение $u_0(x, t)$ уравнения (1). Здесь $v(x, t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения; $u_ч(x, t)$ — какое-либо частное решение данного уравнения (1).

1. Как известно, решение $v(x, t)$ соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$v(x, t) = \Phi[\vartheta(x) - \theta(t)], \tag{5}$$

где

$$\vartheta(x) = \int \frac{dx}{\varphi(x)}, \quad \theta(t) = \int \frac{dt}{\psi(t)}, \tag{6}$$

а $\Phi[\vartheta(x) - \theta(t)]$ — произвольная функция, дифференцируемая по аргументам x и t.

2. Нахождение $u_ч(x, t)$. Так как правая часть уравнения (1) не зависит от t, то уравнение принимает вид $\varphi(x)\,du_г/dx = \chi(x)$, следовательно,

Согласно замене (37) рассматриваемому O-решению $\mathrm{colon}\,(\xi(x), \zeta(x), \eta(x))$ системы (38) соответствует O-решение $y(x; \bar{x}, y_2)$, $y_2 = \mathrm{colon}\,(u_2, v_2, w_2)$ системы (1), причем $u_2 = \xi_0 + u_1$, $v_2 = \zeta_0 + v_1$, $w_2 = \eta_0 + w_1$. Подставляя в (39) значение $\xi_0 = u_2 - u_1$, учитывая, что $(\bar{x}, u_2, v_2, w_2) \in \mathfrak{M}_{x_0}$, и заменяя u_1, u_2 соответственно на $g(\bar{x}, v_1, w_1)$, $g(\bar{x}, v_2, w_2)$, а затем $\bar{x}$ на x, убеждаемся в выполнении неравенства (27). Теорема доказана.

1. *Андреев А. Ф.* Об исключительном направлении системы n-го порядка в точке покоя // Дифференц. уравнения.— 1974.— **10**, № 2.— С. 187—194.
2. *Бодунов Н. А.* О многообразиях O-кривых многомерных систем // Там же.— 1975.— **11**, № 4.— С. 758—759.
3. *Норкин С. К.* О размерности множества, покрытого интегральными кривыми, примыкающими к особой точке многомерной системы // Укр. мат. журн.— 1973.— **30**, № 4.— С. 563—569.
4. *Норкин С. К.* Об асимптотической оценке O-решений многомерной системы // Дифференц. уравнения.— 1978.— **14**, № 11.— С. 2079—2081.
5. *Норкин С. К.* Асимптотическая воронка для локального интегрального O-многообразия // Докл. АН СССР.— 1984.— **279**, № 6.— С. 1323—1326.
6. *Норкин С. К.* Асимптотика решений, покрывающих интегральное O-множество одной нелинейной системы // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С. 636—641.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.

Одес. политехн. ин-т

Получено 11.03.85

$du_r/dx = \chi(x)/\varphi(x)$, $u_r(x) = \int \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}\,dx$. Обозначим

$$\int \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}\,dx = \eta(x), \tag{7}$$

тогда

$$u_r(x) = \eta(x) \tag{8}$$

и

$$u_0(x, t) = \Phi[\vartheta(x) - \theta(t)] + \eta(x). \tag{9}$$

3. Нахождение $u(x, t)$. На основании условия (2) имеем

$$u_0(x, t_0) = \Phi[\vartheta(x) - \theta(t_0)] + \eta(x) = f(x), \quad \Phi[\vartheta(x) - \theta(t_0)] = f(x) - \eta(x).$$

Обозначим $\vartheta(x) - \theta(t_0) = \zeta$, тогда $\vartheta(x) = \zeta + \theta(t_0)$, $x = \vartheta^{-1}(\zeta + \theta(t_0))$, где $\vartheta^{-1}(\zeta + \theta(t_0))$ — функция, обратная функции $\vartheta(x)$. Таким образом,

$$\Phi(\zeta) = f(x) - \eta(x) = f[\vartheta^{-1}(\zeta + \theta(t_0))] - \eta[\vartheta^{-1}(\zeta + \theta(t_0))] \tag{10}$$

и на основании (9) и (10) окончательно получаем

$$u(x, t) = f\{\vartheta^{-1}[\vartheta(x) - \theta(t) + \theta(t_0)]\} - \eta\{\vartheta^{-1}[\vartheta(x) - \theta(t) + \theta(t_0)]\}, \tag{11}$$

где $\vartheta(x)$ и $\theta(t)$ определяются из равенств (6), а $\eta(x)$ — из равенства (7).

Если в уравнении (1) заменить $\varphi(x)$ на $\varphi(x, y)$, $\psi(t)$ на $\psi(y, t)$ и $\chi(x)$ на $\chi(x, y)$, а условие (2) на $u(x, y, t_0) = f(x, y)$, то получим

$$u(x, y, t) = f\{\vartheta^{-1}[\vartheta(x, y) - \theta(y, t) + \theta(y, t_0)], y\} - \eta\{\vartheta^{-1}[\vartheta(x, y) - \theta(y, t) + \theta(y, t_0)], y\} + \eta(x, y), \tag{12}$$

где

$$\vartheta(x, y) = \int \frac{dx}{\varphi(x, y)}, \quad \theta(y, t) = \int \frac{df}{\psi(y, t)}, \quad \eta(x, y) = \int \frac{\chi(x, y)}{\varphi(x, y)}\,dx. \tag{13}$$

Во втором случае (при выполнении условия (3)) пп. 1 и 2 такие же, как и в первом случае.

3. Нахождение $u(x, t)$. На основании условия (3) и формул (9) имеем $u_0(x_0, t) = \Phi[\vartheta(x_0) - \theta(t)] + \eta(x_0) = g(t)$, откуда $\Phi[\vartheta(x_0) - \theta(t)] = g(t) - \eta(x_0)$. Обозначив $\vartheta(x_0) - \theta(t) = \zeta$, получим $\theta(t) = \vartheta(x_0) - \zeta$, откуда $t = \theta^{-1}(\vartheta(x_0) - \zeta)$. Следовательно,

$$\Phi(\zeta) = g(t) - \eta(x_0) = g[\theta^{-1}(\vartheta(x_0) - \zeta)] - \eta(x_0) \tag{14}$$

и на основании (9) и (14) в этом случае получаем

$$u(x, t) = g[\theta^{-1}(\vartheta(x_0) - \vartheta(x) + \theta(t))] + \eta(x) - \eta(x_0), \tag{15}$$

где функции $\vartheta(x)$ и $\theta(t)$ определяются из равенств (6), а функция $\eta(x)$ — из равенства (7).

Если снова в уравнении (1) заменить $\varphi(x)$ на $\varphi(x, y)$, $\psi(t)$ на $\psi(y, t)$ и $\chi(x)$ на $\chi(x, y)$, а условие (3) на $u(x_0, y, t) = g(y, t)$, то будем иметь

$$u(x, y, t) = g\{y, \theta^{-1}[\vartheta(x_0, y) - \vartheta(x, y) + \theta(y, t)]\} + \eta(x, y) - \eta(x_0, y), \tag{16}$$

где

$$\vartheta(x, y) = \int \frac{dx}{\varphi(x, y)}, \quad \theta(y, t) = \int \frac{dt}{\psi(y, t)}, \quad \eta(x, y) = \int \frac{\chi(x, y)}{\varphi(x, y)}\,dx. \tag{17}$$

Заметим, что задачи Коши для уравнения $\varphi(x)\,\partial u/\partial x + \psi(t)\,\partial u/\partial t = \chi(t)$ решаются аналогично.

Задача 2. Найти частное решение уравнения

$$\varphi(x)\,\partial u/\partial x + \psi(t)\,\partial u/\partial t = au + b, \tag{18}$$

удовлетворяющее одному из условий

$$u(x, t_0) = f(x) \tag{19}$$

или

$$u(x_0, t) = g(t). \tag{20}$$

1. Нахождение общего интеграла уравнения (18). Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид $dx/\varphi(x) = dt/\psi(t) = du/(au+b)$, или $dx/\varphi(x) = du/(au+b)$, $dt/\psi(t) = du/(au+b)$. Интегрируя эту систему, получаем

$$\vartheta(x) = \frac{1}{a}\ln|au+b| + B_1, \quad \theta(t) = \frac{1}{a}\ln|au+b| + B_2, \tag{21}$$

где

$$\vartheta(x) = \int \frac{dx}{\varphi(x)}, \quad \theta(t) = \int \frac{dt}{\psi(t)}. \tag{22}$$

Переписывая равенства (21) в виде

$$a\vartheta(x) - \ln|au+b| = -\ln A_1, \quad a\theta(t) - \ln|au+b| = -\ln A_2$$

и потенцируя, имеем

$$(au+b)\,e^{-a\vartheta(x)} = A_1, \quad (au+b)\,e^{-a\theta(t)} = A_2, \quad \operatorname{sign} A_1 = \operatorname{sign} A_2. \tag{23}$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (18) можно представить в виде

$$\Phi\left[(au+b)\,e^{-a\vartheta(x)}, \quad (au+b)\,e^{-a\theta(t)}\right] = 0, \tag{24}$$

где Φ — произвольная, дифференцируемая по аргументам u, x и t функция в заданной области.

2. Перейдем к нахождению решений, удовлетворяющих заданным условиям.

Используя условие (19) и равенства (23), исключаем переменные u, x и t. При $t = t_0$ имеем $(au(x, t_0) + b)\,e^{-a\theta(t)} = A_2$, откуда

$$u(x, t_0) = \frac{1}{a}\left(A_2 e^{a\theta(t_0)} - b\right). \tag{25}$$

Подставляя в первое из равенств (23) значение $au(x, t_0) + b$, получаем

$$e^{-a\vartheta(x)} = \frac{A_1}{A_2}\,e^{-a\theta(t_0)},$$

откуда

$$\vartheta(x) = -\frac{1}{a}\ln\frac{A_1}{A_2}\,e^{-a\theta(t_0)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{A_1}{A_2} + \theta(t_0). \tag{26}$$

Пусть функция $\eta = \vartheta(x)$ обратима относительно x (имеет хотя бы одну обратную), т. е. $x = \vartheta^{-1}(\eta)$. Тогда из равенства (26) находим

$$x = \vartheta^{-1}\left(-\frac{1}{a}\ln\frac{A_1}{A_2} + \theta(t_0)\right). \tag{27}$$

Подставляя значения $u(x, t_0)$ и x из равенств (25) и (27) в равенство (19), имеем

$$\frac{1}{a}\left(A_2 e^{a\theta(t_0)} - b\right) = f\left[\vartheta^{-1}\left(-\frac{1}{a}\ln\frac{A_1}{A_2} + \theta(t_0)\right)\right]. \tag{28}$$

Заменяя в равенстве (28) A_1 и A_2 их значениями из (23), получаем

$$\frac{1}{a}\left[(au+b)\,e^{a(\theta(t_0)-\theta(t))} - b\right] = f\left[\vartheta^{-1}\left(-\frac{1}{a}\ln e^{-a(\vartheta(x)-\theta(t)+\theta(t_0))}\right)\right],$$

откуда

$$(au+b)\,e^{a(\theta(t_0)-\theta(t))} = af\left[\vartheta^{-1}(\vartheta(x) - \theta(t) + \theta(t_0)\right] + b$$

или окончательно

$$u(x, t) = \frac{1}{a} \{e^{a(\theta(t)-\theta(t_0))} [af [\vartheta^{-1} (\vartheta (x) - \theta (t) + \theta (t_0))] + b] - b\}. \quad (29)$$

Заменив в уравнении (18) $\varphi(x)$ на $\varphi(x, y)$ и $\psi(t)$ на $\psi(y, t)$, а условие (19) на $u(x, y, t_0) = f(x, y)$, будем иметь

$$u(x, y, t) = \frac{1}{a}\{e^{a(\theta(y,t)-\theta(y,t_0))} [af [\vartheta^{-1} (\vartheta (x, y) - \theta (y, t) + \vartheta (y, t_0), y), y] + b] - b\}, \quad (30)$$

где

$$\vartheta (x, y) = \int \frac{dx}{\varphi (x, y)}, \quad \theta (y, t) = \int \frac{dt}{\psi (y, t)}. \quad (31)$$

При выполнении условия (20) задача имеет решение

$$u(x, t) = \frac{1}{a} \{e^{a(\vartheta(x)-\vartheta(x_0))} [ag [\theta^{-1} (\vartheta (x_0) - \vartheta (x) + \theta (t))] + b] - b\}, \quad (32)$$

где $\vartheta(x)$ и $\theta(t)$ определяются из равенств (22).

Задача Коши

$$\varphi (x, y) \partial u/\partial x + \psi (y, t) \partial u/\partial t = au + b, \quad u (x_0, y, t) = g (y, t) \quad (33)$$

имеет решение

$$u(x, y, t) = \frac{1}{a} \{e^{a(\vartheta(x,y)-\vartheta(x_0,y))} [ag [y, \theta^{-1} (\vartheta (x_0, y) - \vartheta (x, y) + \theta (y, t))] + b] - b\}, \quad (34)$$

где

$$\vartheta (x, y) = \int \frac{dx}{\varphi (x, y)}, \quad \theta (y, t) = \int \frac{dt}{\psi (y, t)}. \quad (35)$$

Задача 3. Найти частное решение уравнения

$$\varphi (t) \partial u/\partial x + \psi (t) \partial u/\partial t = \chi (t) (u + a), \quad (36)$$

удовлетворяющее одному из условий

$$u (x, t_0) = f (x) \quad (37)$$

или

$$u (x_0, t) = g (t). \quad (38)$$

1. Нахождение общего интеграла уравнения (36). При $\varphi (t) \neq 0$ уравнение (36) эквивалентно уравнению

$$\partial u/\partial x + \psi_1 (t) \partial u/\partial t = \chi_1 (t) (u + a), \quad (39)$$

где $\psi_1 (t) = \psi (t)/\varphi (t)$, $\chi_1 (t) = \chi (t)/\varphi (t)$. Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнения (39) имеет вид $dx = \frac{dt}{\psi_1 (t)} = \frac{1}{\chi_1 (t)} \frac{du}{u + a}$, или $dx = \frac{dt}{\psi_1 (t)}$, $\frac{\chi_1 (t)}{\psi_1 (t)} dt = \frac{du}{u + a}$. Интегрируя каждое из этих уравнений, получаем

$$x = \int \frac{dt}{\psi_1 (t)} + A_1, \quad \int \frac{\chi_1 (t)}{\psi_1 (t)} dt = \ln | u + a | - \ln A_2.$$

Введем обозначения

$$\theta (t) = \int \frac{dt}{\psi_1 (t)} = \int \frac{\varphi (t)}{\psi (t)} dt, \quad \vartheta (t) = \int \frac{\chi_1 (t)}{\psi_1 (t)} dt = \int \frac{\chi (t)}{\psi (t)} dt. \quad (40)$$

Тогда

$$x - \theta (t) = A_1, \quad (u + a) e^{-\vartheta(t)} = A_2. \quad (41)$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (36) имеет вид $\Phi[x-\theta(t), (u+a)e^{-\vartheta(t)}]=0$, где Φ — произвольная функция, дифференцируемая по аргументам x и t.

2. Нахождение частных решений, удовлетворяющих заданным условиям.

При $t=t_0$ из равенств (41) получаем $x-\theta(t_0)=A_1$, $(u(x, t_0)+a)\times \times e^{-\vartheta(t_0)}=A_2$, откуда

$$x=A_1+\theta(t_0), \quad u(x, t_0)=A_2e^{\vartheta(t_0)}-a. \tag{42}$$

На основании условия (37), учитывая равенства (42), находим

$$A_2e^{\vartheta(t_0)}-a=f[A_1+\theta(t_0)]. \tag{43}$$

Используя равенства (41) и (43), получаем

$$(u+a)e^{\vartheta(t_0)-\vartheta(t)}-a=f[x-\theta(t)+\theta(t_0)].$$

Решая это равенство относительно искомой функции $u(x, t)$, окончательно имеем

$$u(x, t)=e^{\vartheta(t)-\vartheta(t_0)}\{f[x-\theta(t)+\theta(t_0)]+a\}-a, \tag{44}$$

где

$$\theta(t)=\int\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}dt, \quad \vartheta(t)=\int\frac{\chi(t)}{\psi(t)}dt. \tag{45}$$

Задача

$$\varphi(y, t)\,\partial u/\partial x+\psi(y, t)\,\partial u/\partial t=\chi(y, t)(u+a), \quad u(x, y, t_0)=f(x, y)$$

имеет решение

$$u(x, y, t)=e^{\vartheta(y,t)-\vartheta(y,t_0)}\{f[x-\theta(y, t)+\theta(y, t_0), y]+a\}-a, \tag{46}$$

где

$$\theta(y, t)=\int\frac{\varphi(y, t)}{\psi(y, t)}dt, \quad \vartheta(y, t)=\int\frac{\chi(y, t)}{\psi(y, t)}dt. \tag{47}$$

При $x=x_0$ из равенств (41) получаем $x_0-\theta(t)=A_1$, $(u(x_0, t)+ +a)e^{-\vartheta(t)}=A_2$, откуда, учитывая условие (38), имеем

$$t=\theta^{-1}(x_0-A_1), \quad A_2=e^{-\vartheta(\theta^{-1}(x_0-A_1))}[g(\theta^{-1}(x_0-A_1)+a)]. \tag{48}$$

Используя равенства (41) и (48), находим

$$(u+a)e^{-\vartheta(t)}=e^{-\vartheta\{\theta^{-1}[\theta(t)-x+x_0]\}}\{g[\theta^{-1}(\theta(t)-x+x_0)]+a,$$

откуда окончательно получаем

$$u(x, t)=e^{\vartheta(t)-\vartheta\{\theta^{-1}[\theta(t)-x+x_0]\}}\{g[\theta^{-1}(\theta(t)-x+x_0)]+a\}-a. \tag{49}$$

Аналогично задача $\varphi(y, t)\,\partial u/\partial x+\psi(y, t)\,\partial u/\partial t=\chi(y, t)(u+a)$, $u(x_0, y, t)=g(y, t)$ имеет решение

$$u(x, y, t)=e^{\vartheta(y,t)-\vartheta\{y,\theta^{-1}[\theta(y,t)-x+x_0]\}}\{g[y, \theta^{-1}(\theta(y, t)-x+x_0)]+a\}-a, \tag{50}$$

где $\theta(y, t)$ и $\vartheta(y, t)$ определяются из равенств (52).

Примечание. Везде при нахождении функций $\theta(x)$, $\vartheta(t)$, $\eta(x)$ произвольные постоянные опускаются (на результат это не влияет).

Пример. Найдем функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $2y^2\partial u/\partial x+y\partial u/\partial y=(y+1)(u+5)$ и условию $u(0, y)=\sin(2y+1)$.

Используя равенства (45), находим функции $\theta(y)$ и $\vartheta(y)$, а затем функцию $\theta^{-1}(z)$: $\theta(y)=2\int ydy=y^2$, $\vartheta(y)=\int\frac{y+1}{y}dy=y+\ln|y|$, $z=y^2\Rightarrow\theta^{-1}(z)=\sqrt{z}$. Согласно формуле (49) имеем

$$u(x, y)=e^{y+\ln|y|-\sqrt{y^2-x}-\ln\sqrt{y^2-x}}[\sin(2\sqrt{y^2-x}+1)+5]-5,$$

или $u(x, y)=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-x}}e^{y-\sqrt{y^2-x}}[\sin(2\sqrt{y^2-x}+1)+5]-5$. Задача имеет решение при $y^2>x$.

1. *Лаврик В. И., Рудченко П. А.* Исследование процессов конвективного массоперенсса при двумерной фильтрации подземных вод. — Киев, 1980.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.12).
2. *Рудченко П. А.* Решение двух задач Коши для уравнения конвективного массопереноса // Вычислит. и прикл. математика.— Киев.— 1982.— Вып. 48.— С. 87—92.
3. *Рудченко П. А.* О конвективном массопереносе при фильтрации подземных вод // Теоретична и приложна механика : IV нац. конгр. по теорет. и прил. механике.— София, 1981.— Кн. 1.— С. 905—912.

Ин-т пробл. моделирования в энергетике, Киев Получено 18.03.85