УДК 512.552.1

В. В. Кириченко, П. П. Костюкевич

Бирядные кольца

Важное место в теории колец занимают полуцепные кольца, т. е. полусовершенные кольца, над которыми каждый неразложимый правый (левый) проективный модуль имеет линейную структуру подмодулей. Эти кольца характеризуются тем, что над ними все конечнопредставимые модули полуцепные [1, 2], т. е. распадаются в прямую сумму модулей, имеющих линейную структуру подмодулей, и тесно связаны с классом колец, над которым все конечнопорожденные модули полуцепные.

Естественно возникает задача выделения классов колец, модули над которыми имеют «хорошее» строение. В частности, в работах [3—6] решаются задачи, которые можно интерпретировать как задачи описания конечнопорожденных модулей над диадой полуцепных колец (см. также, [7, 8]). В работах [9, 10] введено понятие артинова бирядного кольца и изучаются свойства модулей над ним. В настоящей статье вводятся полусовершенные бирядные кольца без всяких ограничений конечности и изучаются полупервичные и наследственные с двух сторон бирядные кольца.

1. Свойства бирядных колец. Неразложимый модуль M называется бирядным [9], если он (т. е. структура его подмодулей) дистрибутивен и содержит цепные подмодули K_1 и K_2 (возможно равные нулю) такие, что $K_1 + K_2$ есть M или наибольший собственный подмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ есть нуль или наименьший ненулевой подмодуль в M. В статье [9] определяется понятие бирядного кольца: артиново кольцо A называется бирядным кольцом, если каждый правый и каждый левый неразложимый проективный A-модуль является бирядным.

Понятие бирядного кольца естественно переносится на полусовершенные кольца. Напомним, что кольцо A с радикалом Джекобсона R называется полусовершенным, если фактор-кольцо $\bar{A} = A/R$ полупросто в классическом смысле и идемпотенты можно понимать по модулю радикала [11]. Известно (см., например, [12, с. 31]), что в этом случае кольцо A распадается в прямую сумму неразложимых правых идеалов:

$$A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s} \tag{1}$$

(X^n — прямая сумма n экземпляров модуля X), каждый из которых имеет ровно один максимальный подмодуль. Неразложимые проективные A-модули называются главными A-модулями и исчерпываются модулями $P_1, \ldots, P_s$. Аналогично определяются левые главные A-модули. Всякий проективный A-модуль разлагается в прямую сумму главных, и для проективных A-модулей справедлива теорема Крулля — Шмидта [11].

Идемпотент e кольца A называется локальным, если eAe — локальное кольцо. В соответствии с представлением (1) единица полусовершенного кольца A разлагается в сумму локальных идемпотентов. Кольцо полусовершенно тогда и только тогда, когда его единица является суммой попарно ортогональных локальных идемпотентов [13].

Полусовершенное кольцо A назовем бирядным кольцом, если каждый правый и каждый левый главный A-модуль бирядный. Естественно определяются бирядные справа (слева) кольца.

Легко видеть, что фактор-модуль бирядного модуля является бирядным. Отсюда, в частности, сразу следует, что фактор-кольцо бирядного кольца также бирядно.

Теорема 1.1. *Кольцо A бирядно справа (слева) тогда и только тогда, когда радикал любого главного (главного левого) A-модуля есть сумма двух цепных подмодулей K_1 и K_2 таких, что $K_1 \cap K_2$ либо нулевой, либо прост, и из того, что xA и yA (Ax и Ay) подмодули в K_1 и K_2 соответственно, не совпадающие с $K_1 \cap K_2$, следует*

$$xA/xR \not\simeq yA/yR \, (Ax/Rx \not\simeq Ay/Ry).$$

Доказательство проведем для бирядных справа колец A. Поскольку любой главный A-модуль имеет ровно один максимальный подмодуль, то достаточно рассмотреть вторую часть утверждения. Напомним, что модуль дистрибутивен тогда и только тогда, когда каждый его фактор-модуль содержит в своем цоколе не более одного экземпляра каждого простого модуля (другими словами, цоколь любого фактор-модуля свободен от квадратов) [14, с. 48]. Поскольку в силу того, что K_1 и K_2 цепные, $xA \cap yR = xR \cap yR = K_1 \cap K_2$, то $(xA + yR)/(xR + yR) \simeq [(xA + yR)/yR] / [(xR + yR)/yR] \simeq (xA / xA \cap yR) / (xR / xR \cap yR) \simeq xA/xR$ и аналогично $(yA + xR) / (yR + xR) \simeq yA / yR$. Следовательно, если $xA/xR \simeq yA/yR$, то цоколь фактор-модуля $(K_1 + K_2)/(xR + yR)$ не свободен от квадратов, в противоречие с дистрибутивностью модуля $K_1 + K_2$. Очевидно, что если $xA/xR \not\simeq yA/yR$ для произвольных подмодулей xA и yA из K_1 и K_2, то $K_1 + K_2$ дистрибутивен, что завершает доказательство.

Как известно, многие свойства кольца A переносятся на кольцо eAe, где $e^2 = e \in A$. Покажем, что при переходе от кольца A к кольцу eAe сохраняется бирядность.

Теорема 1.2. *Если кольцо A бирядно справа (слева), $e^2 = e \in A$, то кольцо eAe бирядно справа (слева). В частности, если кольцо A бирядно, то и кольцо eAe бирядно.*

Доказательство проведем для бирядного справа кольца A. Очевидно, что любой главный eAe-модуль имеет вид $fAe = Pe$, где $P = fA$ главный A-модуль, причем $e = f + f'$ (f — минимальный идемпотент кольца A). Далее, $\operatorname{rad} eAe = eRe = fRe \oplus f'Re$, $eAe = fAe \oplus f'Ae$ и $\operatorname{rad} eAe = \operatorname{rad} fAe \oplus \operatorname{rad} f'Ae$, т. е. $\operatorname{rad} fAe = fRe$. Нужно показать, что fAe является бирядным. Ясно, что fRe — наибольший подмодуль в fAe, поэтому достаточно показать, что fRe есть сумма двух цепных подмодулей, пересечение которых либо нуль, либо наименьший ненулевой подмодуль в fRe, и модуль fAe дистрибутивен. Действительно, $PR = K_1 + K_2$ (K_i цепной), откуда $fRe = K_1e + K_2e$, где K_1e и K_2e — цепные модули, ибо цепными являются модули K_1 и K_2. Если $K_1 \cap K_2 = 0$, то и $K_1e \cap K_2e = 0$. Пусть $K_1 \cap K_2 = U$ (U прост), тогда $K_1e \cap K_2e = Ue$. Ясно, что Ue прост, ибо если $0 \neq Ve \subset Ue$, то $(Ve, V(1-e))$ — ненулевой подмодуль в U. То, что U — наименьший подмодуль в fRe сразу следует из того, что K_1e и K_2e цепные. Наконец, дистрибутивность модуля fAe следует из соотношений $(M + N)e = Me + Ne$, $(M \cap N)e = Me \cap Ne$ и $(Me + Ne) \cap Le = [(M + N)e] \cap Le = [(M + N) \cap L]e = (M \cap L + N \cap L)e = (M \cap L)e + (N \cap L)e = Me \cap Le + Ne \cap Le$, справедливых для произвольных подмодулей M, N, L, дистрибутивного модуля P. Теорема доказана.

Полусовершенное кольцо A называется приведенным, если фактор-кольцо $\bar{A} = A/R$ есть прямое произведение тел. Это эквивалентно тому, что в разложении A в прямую сумму главных модулей нет изоморфных между собой. Так как всякое полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты приведенному кольцу [12, с. 43], то в силу теоремы 1.2 можно считать бирядное кольцо A приведенным.

Пусть $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ — разложение приведенного бирядного кольца A в прямую сумму главных модулей, $1 = e_1 + \ldots + e_n$ — такое разложение единицы кольца A, что $P_i = e_iA$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $A_{ij} = e_iAe_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Кольцо A представляется в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Такое представление называется двусторонним пирсовским разложением кольца A. Радикал полусовершенного кольца A имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & R_2 & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix},$$

где R_i — радикал Джекобсона кольца A_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ [12, с. 47]. Идемпотенты e_i, $i = 1, \ldots, n$, как отмечалось выше, являются попарно ортогональными локальными идемпотентами, а поэтому из теоремы 1.2 следует, что кольца A_{ii} — локальные бирядные кольца.

Теорема 1.3. *Локальное бирядное кольцо является цепным.*

Доказательство. Пусть A — локальное бирядное кольцо и $R = K_1 + K_2$ (K_i цепной). Если A не цепное, то возьмем элементы $x \in K_1$, $y \in K_2$ ($x, y \notin K_1 \cap K_2$) и рассмотрим порожденные ими подмодули xA и yA; ясно, что они не содержатся в $K_1 \cap K_2$. Поскольку кольцо A локально, то имеется всего один простой правый A-модуль [12, с. 47], а поэтому $xA/xR \simeq yA/yR$ в противоречие с теоремой 1.1. Следовательно, A — цепное справа, аналогично A — цепное слева и теорема доказана.

Теорема 1.4. *Если A есть бирядное кольцо, единица которого является суммой двух локальных идемпотентов,*

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & X \\ Y & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$$

соответствующее двустороннее пирсовское разложение, то $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ — цепные кольца, а X и Y являются цепными $\mathfrak{O}_1 - \mathfrak{O}_2$- и $\mathfrak{O}_2 - \mathfrak{O}_1$-модулями соответственно.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из теоремы 1.3. Рассмотрим главный модуль $P_1 = e_1A = (\mathfrak{O}_1, X)$, $P_1R = K_1 + K_2$ (K_i цепной). Если ни один из K_1e_2 и K_2e_2 не содержится в другом, то возьмем элементы $k_1 \in K_1e_2$, $k_2 \in K_2e_2$ ($k_1, k_2 \notin K_1e_2 \cap K_2e_2$). Они порождают подмодули $k_1A = (k_1Y, k_1\mathfrak{O}_2)$ и $k_2A = (k_2Y, k_2\mathfrak{O}_2)$ в K_1 и K_2 соответственно. При этом $k_1R = (k_1Y, k_1R_2)$ и $k_2R = (k_2Y, k_2R_2)$, откуда $k_1A/k_1R \simeq k_2A/k_2R$ в противоречие с теоремой 1.1. Следовательно, X — цепной правый $\mathfrak{O}_2$-модуль. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Используя теорему 1.2, получаем следующий результат.

Теорема 1.5. *Если A есть бирядное кольцо, имеющее двустороннее пирсовское разложение* (2), *то A_{ii} — цепные кольца, $i = 1, \ldots, n$, и A_{ij}, $i \neq j$, являются цепными $A_{ii} - A_{jj}$-модулями.*

2. Полупервичные и наследственные бирядные кольца. Исследуем строение полупервичных бирядных колец. Напомним, что кольцо называется полупервичным, если оно не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Нам потребуется следующее утверждение: если кольцо A полупервично, $e^2 = e \in A$, то кольцо eAe также полупервично [15]. Если кольцо $A = (A_{ij})$ полупервично, то $A_{ij}A_{ji} \neq 0$ для $i \neq j$. Действительно, если $A_{ij}A_{ji} = 0$ для некоторых $i \neq j$, то рассмотрим кольцо $(e_i + e_j) \times \times A(e_i + e_j)$, которое представим в виде $B = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & X \\ Y & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$, где $XY = 0$. Тогда $I = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & YX \end{pmatrix}$ — нильпотентный идеал кольца B ($I^4 = 0$), что противоречит его полупервичности. Далее, если $P_i = e_iA$, $P_iR = K_{i1} + K_{i2}$ (K_{ij} цепной, $j = 1, 2$), то $K_{i1} \cap K_{i2} = 0$ для всех i. В противном случае имеется ненулевой цоколь $S = \operatorname{Soc} A$. Если $S \subset R$, то по определению цоколя $SR = 0$ и $S^2 = 0$, а так как цоколь (как правый, так и левый) — двусторонний идеал, то кольцо A содержит нильпотентный идеал в противоречие с его полупервичностью. Если же $S \not\subset R$, то имеется простой главный модуль и кольцо A опять имеет нильпотентный идеал.

Теорема 2.1. *Полупервичное бирядное кольцо A является полуцепным.*

Доказательство. Рассмотрим главный модуль P_i, $P_iR = K_{i1} \oplus K_{i2}$ в силу предыдущих рассуждений. Поскольку K_{i1} и K_{i2} — правые A-модули, то найдется такое j, что $A_{ij}A_{ji} = 0$, но это противоречит полупервичности кольца A. Следовательно, любой P_i является цепным и A полуцепное справа. Применяя те же рассуждения к левым главным модулям $Q_i = Ae_i$, получаем доказательство теоремы.

Перейдем к описанию наследственных бирядных колец. Здесь также будем пользоваться тем, что если A — наследственное кольцо, $e^2 = e \in A$, то кольцо eAe будет наследственным [12].

Теорема 2.2. *Наследственное справа бирядное кольцо является нетеровым справа.*

Доказательство. Достаточно показать, что каждый правый идеал конечнопорожден. Ясно, что все главные модули конечнопорождены (каждый из них порождается одним идемпотентом). Далее, всякий цепной правый идеал неразложим и проективен, т. е. главный, а значит, конечнопорожден. Если N — подмодуль главного модуля P с $PR = K_1 + K_2$ (K_i цепной), то в силу дистрибутивности $N = (K_1 + K_2) \cap N = K_1 \cap N + + K_2 \cap N$, т. е. N — сумма двух цепных, а значит, главных модулей, и поэтому он конечнопорожден. Поскольку любой проективный идеал распадается в прямую сумму главных, то он конечнопорожден и теорема доказана.

Теорема 2.3. *Наследственное справа* (*слева*) *бирядное кольцо A, единица которого является суммой двух локальных идемпотентов, полуцепное справа* (*слева*). *В частности, такое наследственное бирядное кольцо будет полуцепным.*

Доказательство проведем для правого случая. Рассмотрим соответствующее пирсовское разложение

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & X \\ Y & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим главный A-модуль P_1. Если P_1 не цепной, то $P_1R = K_1 + K_2$ (K_i цепной). Как и в предыдущей теореме получаем, что K_1 и K_2 — главные модули. Случай $K_1 \simeq K_2$ невозможен по теореме 1.1. Следовательно, имеется два неизоморфных цепных главных модуля K_1 и K_2, а так как их всего два (P_1 и P_2), то A полуцепное справа, что завершает доказательство. (Отметим, что в силу теоремы 2.2 $\mathfrak{O}_i$ — дискретно нормированные кольца.)

Теорема 2.4. *Наследственное с двух сторон бирядное кольцо есть прямое произведение первичных наследственных полуцепных колец и артинова с двух сторон бирядного кольца.*

Доказательство. По теореме 2.2 указанное кольцо является нетеровым с двух сторон. По теореме Чаттерса [14, с. 197] оно разлагается в прямое произведение артинова наследственного бирядного кольца и первичных наследственных бирядных колец, которые будут полуцепными по теореме 2.1.

В силу [15] получаем полное описание неартиновых наследственных с двух сторон бирядных колец. Для полного описания наследственных бирядных колец остается рассмотреть случай бирядного наследственного артинова кольца A.

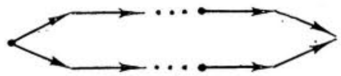
Легко видеть, что если A — наследственное бирядное кольцо, P — главный A-модуль, то PR либо цепной, а значит, главный модуль, либо PR есть прямая сумма двух цепных главных модулей. Отсюда получаем следующие свойства колчана, рассматриваемого кольца A:

1) из каждой точки выходит не более двух стрелок;

2) если из точки выходит стрелка, то в нее входит не более одной стрелки;

3) колчан не содержит циклов (ввиду артиновости и наследственности);

4) если в точку входит стрелка, то из нее выходит не более одной стрелки;

5) колчан не содержит графов типа  ;

6) в одну точку не могут входить более двух стрелок (ввиду бирядности).

Таким образом, по всякому наследственному бирядному кольцу строится колчан со свойствами 1—6. Будем считать кольцо $A = (A_{ij})$ приведенным и неразложимым в прямое произведение колец, тогда его колчан связен [12, с. 50]. По теореме 2.3 и 1.2 кольца эндоморфизмов главных A-модулей есть тела, изоморфные между собой. Если из точки i в точку j существует путь, то $A_{ij} \neq 0$ и является левым и правым одномерным D-пространством, т. е. A_{ij} можно отождествить с телом D. Далее, из точки в другую может быть не более одного пути. Исходя из этих соображений, получаем полное описание наследственных с двух сторон бирядных колец.

1. *Дрозд Ю. А.* Об обобщенно однорядных кольцах // Мат. заметки.— 1975.— 18, № 5.— С. 705—710 .
2. *Warfield R. B.* Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra.— 1975.— 37. — P. 187—222.
3. *Гельфанд И. М.*, *Пономарев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук.— 1968.— 23.— С. 3—60.
4. *Назарова Л. А.*, *Ройтер А. В.* Конечнопорожденные модули над диадой двух локальных дедекиндовых колец и конечные группы, обладающие абелевым нормальным делителем индекса p // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— 33, № 1.— С. 65—89.
5. *Применение* модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p и пар взаимно аннулирующих операторов / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко // Зап. науч. семинара Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1972.— 28.— С. 69—93.
6. *Szekeres T.* Determination of a certain family of finite metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1949.— 66.— P. 1—43.

7. *Кириченко В. В.* Классификация пар взаимно аннулирующих операторов в градуированном пространстве и представления диады обобщенно однорядных алгебр // Зап. науч. семинара Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1978.— 75.— С. 91—109.
8. *Кириченко В. В.* Конечнопорожденные модули над диадой обобщенно однорядных колец // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика.— 1983.— Вып. 25.— С. 91—96.— Укр. яз.
9. *Fuller K. R.* On a generalization of serial rings. II // Communs Algebra.— 1980.— N 8.— P. 635—661.
10. *Colby R. R., Fuller K. R.* Modules over diserial rings // Communs Algebra.— 1981.—N 9.— P. 511—532.
11. *Bass H.* Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc.— 1960.— 95.— P. 466—488.
12. *Кириченко В. В.* Кольца и модули.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1981.— 64 с.
13. *Muller B. J.* On semiperfect rings // Ill. J. Math.— 1970.— 14.—P. 464—467.
14. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории : В 2-х т.— М. : Мир, 1979. — Т. 2.— 464 с.
15. *Кириченко В. В.* О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап. науч. семинара Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1982.— 114.— С. 137—147.

Киев. ун-т　　　　Получено 09.07.85