УДК 519.21

Н. М. Зинченко

Об асимптотике сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона

Пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где $\{\xi_i,\ i \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с функцией распределения (ф.р.) $F(x)$ и характеристической функцией (х.ф.) $f(u)$. Предположим, что $F(x)$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (0, 2)$ и $E\xi_1 = 0$ для $\alpha > 1$.

Обозначим $g_{\alpha,\beta}(u) = \exp\{-|u|^{\alpha}(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(u)\,\omega(\alpha, u))\}$, где $\omega(\alpha, u) = \mathrm{tg}(\pi\alpha/2)$ при $\alpha \neq 1$ и $\omega(\alpha, u) = -\frac{2}{\pi}\ln|u|$ при $\alpha = 1$, — х.ф. и $G_{\alpha,\beta}(x)$ — ф.р. устойчивого закона с параметрами $0 < \alpha < 2$, $|\beta| \leqslant 1$ (если значение параметра β несущественно, индекс β опускаем); $\{\eta_i,\ i \geqslant 1\}$ — н.о.р.с.в. с распределением $G_{\alpha,\beta}$, $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$. Напомним, что функции $G_\alpha(x)$ и $F(x)$ при $x \to \infty$ допускают следующее представление:

$$1 - G_\alpha(x) = \frac{A + b(x)}{x^\alpha},\quad 1 - F(x) = \frac{A + \tilde{b}(x)}{x^\alpha},$$

где $b(\cdot)$, $\tilde{b}(\cdot)$ — медленно меняющиеся функции и $\tilde{b}(x)$, $\tilde{b}(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Всюду далее символ $f_1(x) \ll f_2(x)$ употребляется в том же смысле, что и $f_1(x) = O(f_2(x))$ при $x \to \infty$; запись $\xi \overset{d}{=} \eta$ означает, что распределение случайных величин ξ и η совпадает, а $\{\xi_i,\ i \geqslant 1\} \overset{d}{=} \{\eta_i,\ i \geqslant 1\}$ указывает на равенство конечномерных распределений.

В работах [1 — 4] исследовался вопрос об аппроксимации S_n устойчивым процессом $Y_\alpha(t)$ или последовательностью сумм ζ_n. Так, в [1] приведены достаточные условия, обеспечивающие возможность определения на одном вероятностном пространстве случайных величин $\{\xi_i', i\geqslant 1\}\overset{d}{=}\{\xi_i, i\geqslant 1\}$ вместе с последовательностью $\{\eta_i, i\geqslant 1\}$ так, чтобы для заданного $\gamma\in[\alpha, 2)$

$$P\{|\xi_1'+\ldots+\xi_n'-\zeta_n|=o(n^{1/\gamma})\}=1. \tag{1}$$

Не ограничивая общности, автор считает $G_\alpha(\cdot)$ симметричной, а $F(x)$ непрерывной и строго возрастающей функцией и доказывает следующую теорему.

Теорема A. *Пусть $|b(x)|+|\tilde{b}(x)|\leqslant L(x)$, где функция $L(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$L(\cdot)$ — непрерывна, не возрастает, $L(x)\to 0$ при $x\to\infty$;*

2) *$xL(x)$ строго возрастает при $x\uparrow\infty$;*

3) *$n^{1-\alpha/\gamma}L(n^{1/\gamma})$ не возрастает для некоторого $\gamma\in[\alpha, 2)$ и достаточно большого n;*

4) $R=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{L(n^{1/\gamma})\}^{\gamma}/n^{\alpha/\gamma}<\infty$.

Тогда на одном вероятностном пространстве можно определить $\{\xi_i'\}$ и $\{\eta_i\}$ так, чтобы для указанного γ выполнялось (1).

Всюду далее для краткости будем говорить, что последовательность $\{\xi_i, i\geqslant 1\}$ может быть определена (переопределена) на достаточно богатом вероятностном пространстве так, чтобы выполнялось утверждение типа (1).

В работе [2] при более слабых ограничениях на $F(x)$ другими методами доказана возможность аппроксимации

$$P\{|S_n-\zeta_n|=o(n^{1/\alpha})\}=1. \tag{2}$$

В [3, 4] решалась задача об аппроксимации S_n взвешенными суммами вида $\zeta_n^\bullet=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\eta_i$, когда $F(\cdot)$ принадлежит области частичного притяжения G_α. В случае нормального характера притяжения $F(x)$ к G_α результаты [3] сводятся к теореме A. Заметим, что использование взвешенных сумм [4] приводит к меньшему остаточному члену в (1), но из результатов [4] нельзя получить оценку для $|S_n-\zeta_n|$.

Случай $\alpha=2$, т. е. задача аппроксимации сумм н. о. р. с. в. с конечным вторым моментом с помощью винеровского процесса $W(t)$, рассмотрен в [5]; там же содержится подробная библиография по данному вопросу.

В настоящей заметке в условиях работы [2] улучшим оценку остаточного члена в (2) до $o(n^{1/\alpha-\rho})$, $\rho=\rho(\alpha)>0$.

Предположим, что случайные величины $\{\xi_i, i\geqslant 1\}$ удовлетворяют следующему условию: существуют такие $a_1, a_2>0$ и $l>\alpha$, $\alpha\neq 1$, что при $|u|<a_1$

$$|f(u)-g_{\alpha,\beta}(u)|\leqslant a_2|u|^l. \tag{3}$$

Замечание 1. Условие (3) обеспечивает нормальный характер сходимости S_n к устойчивому закону $G_{\alpha,\beta}(\cdot)$ с остаточным членом $O(n^{-\min(1/\alpha,(l-\alpha)/\alpha)})$ [6].

Лемма 1 [2]. *Пусть $N=N_m=\sum\limits_{k=1}^{m}k^A$, $m\geqslant 1$, где $A=[\max\{\alpha+1, 2\alpha(2+\alpha+1/\alpha)/(l-\alpha)\}]+1$ при $0<\alpha<1$, $A=[\max\{\alpha(\alpha+1), 2\alpha(2\alpha+1)/(l-\alpha)\}]+1$ при $1<\alpha<2$, $[\cdot]$ — целая часть числа.*

Тогда $\{\xi_i, i\geqslant 1\}$ можно определить на одном вероятностном пространстве вместе с последовательностью $\{\eta_i, i\geqslant 1\}$ так, чтобы почти наверное (п. н.)

$$|S_N-\zeta_N|\ll N^{1/\alpha-\lambda},\ \lambda=\begin{cases}(\alpha^2-\alpha+1)/\alpha(A+1) & \text{при } 1<\alpha<2;\\ (1+\alpha^2)/\alpha(A+1) & \text{при } 0<\alpha<1.\end{cases} \tag{4}$$

Пусть $h_1 = 1$, $h_m = N_{m-1} + 1$, $m > 1$, $H_m = \{i$ целое: $h_m \leqslant i < h_{m+1}\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $h_{m+1} - h_m = m^A$ и $\forall n \in H_m$ справедливо $m^{1+A} \ll N_{m-1} \leqslant h_m \leqslant n \leqslant N_m \ll m^{1+A}$.

Лемма 2. *С вероятностью 1 для любого* $\rho < 1/\alpha(A+1)$

$$M_m^{(1)} = \sup_{h_m \leqslant t \leqslant h_{m+1}} |Y_\alpha(t) - Y_\alpha(h_m)| = o(h_m^{1-\rho}), \tag{5}$$

$$M_m^{(2)} = \max_{n \in H_m} \Big| \sum_{i=h_m}^{n} \xi_i \Big| = o(h_m^{1-\rho}), \tag{6}$$

$$M_m^{(3)} = \max_{n \in H_m} \Big| \sum_{i=h_m}^{n} \eta_i \Big| = o(h_m^{1-\rho}). \tag{7}$$

Доказательство. Докажем (6), утверждение (7) является частным случаем (6). Для $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ из области притяжения устойчивого закона с параметром α $E|\xi_1|^{\alpha'} < \infty$ для $\alpha' \in (0, \alpha)$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{\lim_{n\to\infty} n^{-(1/\alpha+\varepsilon)} |S_n| = 0\} = 1.$$

Так как $h_{m+1} - h_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то для произвольных ε, $\delta > 0$ с вероятностью 1 начиная с некоторого m

$$M_m^{(2)} \leqslant \delta |h_{m+1} - h_m|^{1/\alpha+\varepsilon} \ll \delta m^{A(1/\alpha+\varepsilon)} \ll \delta h_m^{A(1/\alpha+\varepsilon)/(A+1)}$$

Выберем теперь ε так, чтобы $\dfrac{A}{A+1}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \varepsilon\right) < \dfrac{1}{\alpha} - \rho$, т. е.

$$0 < \varepsilon < 1/\alpha A - \rho(A+1)/A. \tag{8}$$

Тогда с вероятностью 1 для достаточно большого m $M_m^{(2)} \leqslant \delta h_m^{1/\alpha-\rho}$, откуда и следует (6). Заметим, что правая часть (8) положительна при $0 < \rho < 1/\alpha(A+1)$.

Утверждение (5) доказывается аналогично с использованием известного свойства устойчивых процессов: $Y_\alpha(t) = o(t^{1/\alpha+\varepsilon})$ п. н. $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Теорема 1. *На одном вероятностном пространстве можно определить* $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ *вместе с последовательностью н. о. р. с. в.* $\{\eta_i, i \geqslant 1\}$, *распределенных по закону* $G_{\alpha,\beta}(\cdot)$ *так, чтобы п. н.*

$$|S_n - \zeta_n| = o(n^{1/\alpha-\rho}) \qquad \forall \rho \in (0, 1/\alpha(A+1)).$$

Доказательство. По лемме 1 на одном вероятностном пространстве можно определить последовательности $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ и $\{\eta_i, i \geqslant 1\}$ так, чтобы выполнялось (4). Для любого n определим $m = m(n)$ соотношением $n \in H_m$. Тогда $S_n = \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \xi_i + \sum_{i=h_m}^{n} \xi_i$, $\zeta_n = \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \eta_i + \sum_{i=h_m}^{n} \eta_i$. Следовательно,

$$|S_n - \zeta_n| \leqslant |S_{N_{m-1}} - \zeta_{N_{m-1}}| + \max_{n \in H_m} \Big| \sum_{i=h_m}^{n} \xi_i \Big| + \max_{n \in H_m} \Big| \sum_{i=h_m}^{n} \eta_i \Big| = B + M_m^{(2)} + M_m^{(3)}.$$

Из леммы 2 вытекает, что с вероятностью 1 $M_m^{(2)}$, $M_m^{(3)} = o(n^{1-\rho})$ для $\rho \in (0, 1/\alpha(A+1))$, а в силу леммы 1 $B \ll N_{m-1}^{1-\lambda} \ll n^{1-\lambda}$ п. н. Так как $\lambda > \rho$, окончательно получаем, что для всякого $0 < \rho < 1/\alpha(A+1)$ $|S_n - \zeta_n| = o(n^{1-\rho})$ п. н.

Теорема 2. *При выполнении условия* (3) *существует вероятностное пространство* (Ω, A, P) *и определенные на нем н. о. р. с. в.* $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ *с ф. р.* $F(x)$ *и устойчивый процесс* $Y_{\alpha,\beta}(t)$, $t > 0$, *такие, что*

$$P\{|S_{[t]} - Y_{\alpha,\beta}(t)| = o(t^{1/\alpha-\rho})\} = 1 \tag{9}$$

для всякого $0 < \rho < 1/\alpha(A+1)$.

грешность аппроксимации вида $o(n^{1/\alpha-\rho})$, $\rho = \rho(\alpha, \gamma) > 0$. Такая оценка достаточна для получения ряда полезных следствий об асимптотике S_n.

Заметим, что случай $\gamma = \alpha$ охватывается только теоремой А.

Замечание 3. Возможны случаи, когда условие (3) имеет место и, следовательно, справедливы теоремы 1 и 2, а соответствующие псевдомоменты не существуют. Рассмотрим, например, н. о. р. с. в. $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ с плотностью $p(x) = \dfrac{1-\cos x}{\pi x^2}$ и х. ф. $f(u) = \begin{cases} 1-|u|, & |u| \leqslant 1, \\ 0, & |u| > 1. \end{cases}$ Имеем $|f(u) - g_{1,0}(u)| \leqslant u^2/2$ при $|u| < 1$, т. е. $l = 2$, $l - \alpha = 1$. Следовательно, теоремы 1 и 2 справедливы с остаточным членом вида $o(n^{1-\rho})$, $0 < \rho < 1/12$. В то же время $\nu(r) = \infty$ $\forall r \geqslant 1$. Условие 4 теоремы А при $\gamma = 1$ также не выполняется.

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Будем говорить, что $\{a_n\}$ принадлежит верхнему классу U_S для последовательности S_n, если* $P\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n/a_n \leqslant 1\} = 1$, *и нижнему классу L_S, если* $P\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n/a_n > 1\} = 1$.

Определение 2. *Действительную функцию $\varphi(t)$ назовем верхней функцией процесса $\xi(t)$, если* $P\{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \xi(t)/\varphi(t) < 1\} = 1$, *и нижней, если* $P\{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \xi(t)/\varphi(t) > 1\} = 1$.

Рассмотрим класс функций K, состоящий из неотрицательных возрастающих функций, для которых $t^{-1/\alpha}\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и $\lim\limits_{v\downarrow 1} \sup\limits_{t} |1 - \varphi(vt)/\varphi(t)| = 0$.

При $\beta = -1$ для устойчивых процессов $Y_{\alpha,-1}(t)$ без положительных скачков можно получить точные верхние границы роста при $t \to \infty$ [7]. Вопрос о принадлежности $\varphi(\cdot) \in K$ классу верхних (нижних) функций процесса $Y_{\alpha,-1}(t)$, $1 < \alpha < 2$, решается в зависимости от сходимости

$$I(\varphi, 1) = \int\limits_1^\infty (t^{-1/\alpha}\varphi(t))^{-\lambda(\alpha)/2} \exp\{-B(\alpha)(t^{-1/\alpha}\varphi(t))^{\lambda(\alpha)}\} \frac{dt}{t}.$$

Кроме того [8], для любой функции $\varphi(\cdot) \in K$ с вероятностью 1 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} Y_{\alpha,-1}(t)/\varphi(t) = \gamma_\varphi$, где

$$\gamma_\varphi = \inf\{r : I(\varphi, r) < \infty\}, \tag{12}$$

$$I(\varphi, r) = \int\limits_1^\infty (t^{-1/\alpha}\varphi(t))^{-\lambda(\alpha)/2} \exp\{-B(\alpha)(rt^{-1/\alpha}\varphi(t))^{\lambda(\alpha)}\} \frac{dt}{t},$$

$$\lambda(\alpha) = \alpha/(\alpha-1), \; B(\alpha) = (\alpha-1)\alpha^{-\lambda(\alpha)} \left|\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right|^{\lambda(\alpha)/2}. \tag{13}$$

Перенося эти результаты на последовательность сумм н. о. р. с. в., удовлетворяющих условиям теоремы 2, получаем такие следствия.

Следствие 1. *Если $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ удовлетворяют (3) с $\beta = 1$, $1 < \alpha < 2$, то* $P\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{-1/\alpha}(B^{-1}(\alpha)\ln\ln n)^{-1/\lambda(\alpha)} S_n = 1\} = 1$.

Следствие 2. *В условиях следствия 1 последовательность $\{a_n = \varphi(n)\}$ принадлежит верхнему классу U_S, если $I(\varphi, 1) < \infty$, и нижнему L_S, если $I(\varphi, 1) = \infty$.*

Следствие 3. *В условиях следствия 1 с вероятностью 1* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n/a_n = \gamma_\varphi$, *где γ_φ определено в* (12), (13).

Обозначим $A_{\alpha,\beta}(t) = \sup\limits_{s\leqslant t} |Y_{\alpha,\beta}(t)|$, $\alpha \neq 1$. Пусть распределение $G_{\alpha,\beta}(\cdot)$ величины $Y_{\alpha,\beta}(1)$ не сосредоточено на полуоси. Тогда с вероятностью 1

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} A_{\alpha,\beta}(t)/(q(t))^{1/\alpha} = C, \tag{14}$$

где $q(t) = t/\ln\ln t$, а константа $C = C_G$ определяется через I-функционал устойчивого процесса, введенного Донскером и Вараданом [9].

Следствие 4. *Пусть н. о. р. с. в.* $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ *удовлетворяют* (3) *с* $|\beta| \leqslant 1$ *при* $1 < \alpha < 2$ *и* $|\beta| < 1$ *при* $\alpha < 1$. *Тогда с вероятностью* 1

$$\varliminf_{n\to\infty} [\ln\ln n/n]^{1/\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| = C_G, \tag{15}$$

где C_G *не зависит от* $F(\cdot)$, *а зависит только от предельного закона* $G(\cdot)$ *и совпадает с константой из* (14).

Доказательство очевидно, так как

$$(q(n))^{-1/\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_\alpha(j) - S_j| \leqslant \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/\alpha} n^{1/\alpha-\rho} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Другими методами (15) доказано в [10].

1. *Stout W*. Almost sure invariance principles when $Ex_1^2 = \infty$ // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1979.— **49**, H. 1.— S. 23—32.
2. *Зинченко Н. М*. Сильный принцип инвариантности для сумм случайных величин из области притяжения устойчивого закона // Теория вероятностей и ее применения. 1985.— 30, № 1.— С. 131—136.
3. *Fisher E*. An almost sure invariance principle for random variables in the domain of attraction of a stable law // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. — 1984.— **67**, H. 4.
4. *Mijnheer J*. Strong approximation of partial sums of i. i. d. r. v. in the domain of attraction of a symmetric stable distribution // Trans. 9-th Prague Conf. Inf. Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes.— Prague: 1983.— P. 85—89.
5. *Csörgo M., Revesz P*. Strong approximation in probability and statistics.—Budapest: Akademia, 1981.— 284 p.
6. *Паулаускас В. Н*. Оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона // Лит. мат. сб.— 1974.— **14**, № 1.— С. 165—187.
7. *Калинаускайте Н. Б*. О верхних и нижних функциях для устойчивых процессов // Там же.— 1965.— 5, № 4.— С. 541—553.
8. *Зинченко Н. М*. О скорости роста случайных процессов и полей с независимыми приращениями // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1984.— Вып. 30.— С. 52—56.
9. *Donsker M. D., Varadhan S. R. S*. On LIL for local times // Communs Pure and Appl. Math.— 1977.— **30**, N 6.— P. 707—753.
10. *Jain N. C*. A Donsker —Varadhan type invariance principle // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1982.— **59**, H. 2.— S. 117—138.

Киев. ун-т

Получено 18.03.85,
после доработки — 10. 09. 85