1. *Li T.-V., York J.* Period three implies chaos // Amer. Math. Mon.— 1975.— **82**.— P. 985—992.
2. *Stefan P.* A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line // Communs Math. Phys.— 1977.— **54**.— P. 237—248.
3. *Straffin P. D.* Periodic points of continuous functions // Math. Mag.— 1978.— **51**, N 2.— P. 98—105.
4. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывных преобразований прямой в себя // Укр. мат. журн.— 1964.— **16**, № 1.— С. 61—71.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 04.11.85

УДК 517.5

С. В. Переверзев, Ж. Е. Мырзанов

Об одной задаче приближенного интегрирования, возникающей в теории систем обслуживания

1. Постановка задачи. Обозначим через $L_2(Q)$ пространство интегрируемых с квадратом на $Q=[-1,1]\times[-1,1]$ функций $g(x, y)$ с нормой

$$\|g\|=\Big(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g^2(x,y)\,dxdy\Big)^{1/2},$$

а $L_2^{r,s}(Q)$, $r=1,2,\ldots$; $s=1,2,\ldots$, — пространство функций $g(x,y)$, у которых частные производные $g^{(r,s)}(x,y)$ принадлежат $L_2(Q)$. Аналогичные пространства определенных на $[-1,1]$ функций одной переменной будем обозначать соответственно через L_2 и L_2^r.

Пусть самосопряженный оператор

$$Hf(x)=\int_{-1}^{1} g(x,y)\,f(y)\,dy$$

с ядром $g(x,y)\in L_2^{r,r}(Q)$ имеет единицу в качестве простого собственного значения.

В настоящей статье будем рассматривать задачу восстановления интеграла

$$(F,u)=\int_{-1}^{1} F(x)\,u(x)\,dx$$

по информации

$$Hx^i\equiv\int_{-1}^{1} g(x,y)\,y^i dy=\mu_i(x),\quad i=\overline{0,N}, \tag{1}$$

$$HF(x)\equiv\int_{-1}^{1} g(x,y)\,F(y)\,dy=\mu_{N+1}(x), \tag{2}$$

где $F(x)\in L_2$ — некоторая фиксированная функция, $u(x)$ — собственный элемент оператора H, отвечающий собственному значению $\lambda=1$, т. е. $u(x)=\int_{-1}^{1} g(x,y)\,u(y)\,dy$ и $\int_{-1}^{1} u(x)\,dx=1$.

Задача о восстановлении функционала (F, u) по информации вида (1), (2) часто возникает в теории массового обслуживания [1] в следующей ситуации. Пусть $u(x)$ — плотность вероятности стационарного распределения цепи Маркова, а $g(x, y)$ — условная плотность перехода из y в x. Тогда $u(x)$ есть собственный элемент интегрального оператора с ядром $g(x, y)$, отвечающий собственному значению $\lambda=1$ и нормированный так, как указано выше. Обычно плотность перехода точно не известна, а имеется лишь информация вида (1), (2). Представляет интерес восстановление значения определенного линейного функционала (например, среднего времени ожидания требования в системе массового обслуживания) от показателя качества $u(x)$ того или иного процесса.

Отметим, что на задачу восстановления функционала (F, u) по информации (1), (2) обратил внимание авторов И. Н. Коваленко.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть S_N — оператор, сопоставляющий каждой функции $f(x) \in L_2$ ее частную сумму ряда Фурье—Лежандра [2] порядка N, а $S_{N,x}$ и $S_{N,y}$ — операторы, определяемые соотношениями

$$S_{N,x} g(x, y) = \sum_{i=0}^{N} a_i(y) P_i(x), \quad a_i(y) = \int_{-1}^{1} g(x, y) P_i(x)\, dx,$$

$$S_{N,y} g(x, y) = \sum_{j=0}^{N} b_j(x) P_j(y), \quad b_j(x) = \int_{-1}^{1} g(x, y) P_j(y)\, dy,$$

где $P_k(\cdot)$, $k = \overline{0, N}$, — ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$ многочлены Лежандра степени k.

Из неравенства Лебега (см., например, [2, с. 34]) ограниченности при любом N нормы $\| S_N \|_{L_2 \to L_2}$ и известных оценок погрешности наилучшего приближения функций из L_2^r алгебраическими многочленами степени не выше N следует, что для любой функции $f(x) \in L_2^r$ выполняется неравенство

$$\| f - S_N f \| \leqslant \alpha_r N^{-r} \| f^{(r)} \|, \tag{3}$$

где α_r — постоянная, не зависящая от f и N.

Отметим, что если известна информация (1), то функции $S_{N,x} g(x, y)$ и $S_{N,y} g(x, y)$ являются линейными комбинациями соответственно функций $\{x^i \mu_j(y)\}_{i,j=0}^N$ и $\{y^i \mu_j(x)\}_{i,j=0}^N$ с некоторыми определенными коэффициентами.

Обозначим через $H_N(H)$ оператор, определенный равенством

$$H_N(H) f(x) = \int_{-1}^{1} [S_{N,x} g(x, y) + S_{N,y} g(x, y) - S_{N,x} S_{N,y} g(x, y)] f(y)\, dy.$$

Лемма. *Если $g(x, y) \in L_2^{r,s}(Q)$, то выполняются неравенства*

$$\| H - H_N(H) \| \leqslant \alpha_{rs} N^{-r-s} \| g^{(r,s)} \| \equiv \delta_N, \tag{4}$$

$$\| H (H - H_N(H)) H \| \leqslant \alpha_{rs}^2 N^{-2r-2s} \| g^{(r,s)} \| \| g^{(r,0)} \| \| g^{(0,s)} \|, \tag{5}$$

где α_{rs} — некоторая постоянная, не зависящая от $g(x, y)$ и N.

Доказательство. Используя неравенство (3) и теорему Фубини, находим

$$\| H - H_N(H) \|^2 \leqslant \int_{-1}^{1} \Big\{ \int_{-1}^{1} [g(x, y) - S_{N,y} g(x, y) - S_{N,x} (g(x, y) -$$

$$- S_{N,y} g(x, y))\Big]^2 dx \Big\} dy \leqslant \alpha_r^2 N^{-2r} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \Big\{ \frac{\partial^r}{\partial x^r} \Big[g(x, y) - S_{N,y} g(x, y) \Big] \Big\}^2 dx dy =$$

$$= \alpha_r^2 N^{-2r} \int_{-1}^{1} \Big\{ \int_{-1}^{1} \Big[g^{(r,0)}(x, y) - S_{N,y} g^{(r,0)}(x, y) \Big]^2 dy \Big\} dx \leqslant \alpha_r^2 \alpha_s^2 N^{-2r-2s} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [g^{(r,s)}(x, y)]^2 dx dy = \alpha_{rs}^2 N^{-2r-2s} \| g^{(r,s)} \|^2,$$

где $\alpha_{rs} = \alpha_r \alpha_s$.

Теперь докажем неравенство (5). Заметим, что функция $\varphi(x) = (H - H_N(H)) Hf(x)$ ортогональна многочленам степени не выше N, поэтому $H\varphi(x) = (H - HS_N)\varphi(x)$. Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского и (3), получаем

$$\|(H - HS_N)\varphi(\cdot)\| \leqslant \left(\int_{-1}^{1} \|g(x, \cdot) - S_{N,y} g(x, \cdot)\|^2 \|\varphi\|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_s N^{-s} \left(\int_{-1}^{1} \|g^{(0,s)}(x, \cdot)\|^2 dx\right)^{1/2} \|\varphi\| = \alpha_s N^{-s} \|g^{(0,s)}\| \|\varphi\|. \quad (6)$$

Далее, так как

$$\|(H - H_N(H))\psi(\cdot)\| = \|(H - H_N(H))(\psi(\cdot) - S_N\psi(\cdot))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|H - H_N(H)\| \|\psi - S_N\psi\| \leqslant \alpha_{rs}\alpha_r N^{-2r-s} \|g^{(r,s)}\| \|\psi^{(r)}\|,$$

то, полагая $\psi(x) = Hf(x)$, имеем

$$\|(H - H_N(H)) H\| \leqslant \alpha_{rs}\alpha_r N^{-2r-s} \|g^{(r,s)}\| \|g^{(r,0)}\|. \quad (7)$$

Неравенство (5) следует теперь из (6) и (7). Лемма доказана.

Так как $\|H(H - H_N(H)) H_N(H)\| \leqslant \|H(H - H_N(H)) H\| + \|H\| \|H - H_N(H)\|^2$, то непосредственно из леммы следует

$$\|H(H - H_N(H)) H_N(H)\| \leqslant \alpha_{rs}^2 N^{-2r-2s} \|g^{(r,s)}\| (\|g^{(r,0)}\| \|g^{(0,s)}\| +$$

$$+ \|g^{(r,s)}\| \|g\|) \equiv \varepsilon_N. \quad (8)$$

3. Основной результат. Пусть λ_0 — ближайшее к единице собственное значение оператора $H_N(H)$, u_N — собственный элемент $H_N(H)$, отвечающий собственному значению λ_0 такой, что

$$(u_N, \mu_0) = 1. \quad (9)$$

В качестве приближенного значения (F, u) рассмотрим (F, Hu_N). Тогда оценка погрешности будет иметь вид $|(F, u) - (F, Hu_N)| \leqslant \|F\| \|u - Hu_N\|$.

Так как оператор $H_N(H)$ действует в подпространство, базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества функций $\{x^i, \mu_i(x)\}_{i=0}^N$, то

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i x^i + \sum_{i=0}^{N} \beta_i \mu_i(x), \quad (F, Hu_N) = \int_{-1}^{1} \mu_{N+1}(x) u_N(x) dx. \quad (10)$$

При этом для определения коэффициентов α_i, β_i в (10) нужно найти собственный элемент матрицы $[a_{ij}]_{i,j=0}^{2N+1}$, где $a_{ij} = 0$ при $i = \overline{0, N}$; $j = \overline{0, N}$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i - N - 1, \\ 0, & \text{если } j \neq i - N - 1, \end{cases}$ при $i = \overline{N+1, 2N+1}$; $j = \overline{0, N}$, $a_{ij} = (HP_i, HP_{j-N-1}) - \sum_{k=0}^{N} (P_k, HP_{j-N-1})(P_k, HP_i)$ при $i = \overline{0, N}$; $j = \overline{N+1, 2N+1}$, $a_{ij} = (P_{i-N-1}, HP_{j-N-1})$ при $i = \overline{N+1, 2N+1}$; $j = \overline{N+1, 2N+1}$, отвечающий ближайшему к единице собственному значению λ_0 и нормированный условием (9).

Из доказанной леммы, неравенства Куранта — Вейля [3, с. 257] и определения λ_0 следует $1 - \delta_N \leqslant |\lambda_0| \leqslant 1 + \delta_N$. Используя это неравенство, теорему 1 из [4] и (4), (8), получаем

$$|1 - \lambda_0| \leqslant \frac{\varepsilon_N}{(1 - \delta_N)(1 - 2\delta_N)}. \quad (11)$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 4 из [4], и используя (11), находим

$$\min_{\alpha} \| Hu_N - \alpha u \| \leqslant \frac{\varepsilon_N \| u_N \| [1 + \| H \| - \delta_N (1 + 2 \| H \|)]}{d(H)(1 - \delta_N)(1 - 2\delta_N)} \equiv \theta_N, \qquad (12)$$

где $d(H) = \inf\limits_{\lambda \in S(H), \lambda \neq 1} |\lambda - 1|$, а через $S(H)$ обозначен спектр оператора H.

Пусть α_0 такое, что $\| Hu_N - \alpha_0 u \| = \min\limits_{\alpha} \| Hu_N - \alpha u \|$. Так как $\| u - Hu_N \| \leqslant \| \alpha_0 u - Hu_N \| + \| \alpha_0 u - u \|$, то для оценки $|(F, u) - (F, Hu_N)|$ достаточно оценить величину $\| \alpha_0 u - u \|$. Имеем

$$\| \alpha_0 u - u \| = \| \alpha_0 u \| \left| 1 - \frac{1}{\alpha_0} \right| \leqslant (\| Hu_N \| + \theta_N) \left| \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} \right| \qquad (13)$$

и $\alpha_0 = \int\limits_{-1}^{1} Hu_N(x)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} [\alpha_0 u(x) - Hu_N(x)]\,dx = 1 + (\alpha_0 u - Hu_N, 1)$. Но тогда из очевидного неравенства $|(\alpha_0 u - Hu_N, 1)| \leqslant \sqrt{2} \| \alpha_0 u - Hu_N \| \leqslant \sqrt{2}\theta_N$ следует

$$0 < 1 - \sqrt{2}\theta_N \leqslant \alpha_0 \leqslant 1 + \sqrt{2}\theta_N, \quad |\alpha_0 - 1| \leqslant \sqrt{2}\theta_N \qquad (14)$$

Из (13) и (14) получаем $\| \alpha_0 u - u \| \leqslant (\| Hu_N \| + \theta_N) \sqrt{2}\theta_N / (1 - \sqrt{2}\theta_N)$. Следовательно, $\| u - Hu_N \| \leqslant (1 + \sqrt{2} \| Hu_N \|)\, \theta_N / (1 - \sqrt{2}\theta_N)$. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть самосопряженный оператор*

$$Hf(x) = \int\limits_{-1}^{1} g(x, y) f(y)\,dy$$

с ядром $g(x, y) \in L_2^{r,r}(Q)$ *имеет единицу в качестве простого собственного значения. Собственный элемент* $u(x)$*, отвечающий этому собственному значению, нормирован условием* $(u, 1) = 1$. *Если, располагая информацией* (1), (2), *построить элемент* $u_N(x)$*, являющийся собственным элементом конечномерного оператора* $H_N(H) = S_N H + H S_N - S_N H S_N$*, отвечающим ближайшему к единице собственному значению оператора* $H_N(H)$*, и нормированным условием* $(u_N, \mu_0) = 1$*, то справедлива оценка*

$$|(F, u) - (F, Hu_N)| \leqslant \frac{\| F \| (1 + \sqrt{2} \| Hu_N \|)\, \theta_N}{1 - \sqrt{2}\theta_N} \asymp N^{-4r},$$

где θ_N *определено соотношением* (12)

Замечание 1. Располагая информацией (1), (2), можно в качестве приближенного значения (F, u) взять значение (F, u_N^*), где u_N^* — собственный элемент оператора $S_N H S_N$, отвечающий ближайшему к единице собственному значению Иными словами, информация (1), (2) достаточно для приближенного нахождения (F, u) с помощью метода Бубнова — Галеркина. Однако, как следует из [5] (теорема 3 и замечание 1), на всем классе ядер $L_2^{r,r}(Q)$ нельзя гарантировать точность $|(F, u) - (F, u_N^*)|$ выше чем $O(N^{-2r})$. Сравнение этого факта с доказанной выше теоремой показывает преимущество метода, рассмотренного в данной работе

Замечание 2. Пусть v_N — собственный элемент оператора $H_N(H)$, отвечающий собственному значению λ_0 и нормированный условием $(v_N, 1) = 1$. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы, можно показать, что $|(F, u) - (F, v_N)| \leqslant \alpha N^{-3r}$, где α — некоторая постоянная, зависящая от нормы $F(x)$ и $g^{(r,r)}(x, y)$. Отметим, что для построения (F, v_N) достаточно иметь лишь информацию (1).

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания.— М. : Наука, 1966.— 431 с.
2. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М. : Наука, 1979.— 415 с.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979. 587 с.
4. *Schäfer E.* Fehlerabschätzungen für Eigenwert näherungen nach der Ersatzkernmethode bei Integralgleichungen // Numer. Math.— 1979.— **32**, N 3.— S. 281—290.
5. *Вайникко Г. М.* Оценки погрешности метода Бубнова—Галеркина в проблеме собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1965.— **5**, № 4.— С. 587—607.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 06.12.85,
после доработки — 05.03.86

УДК 513.83

В. В. Попов

О числе Линделёфа пространства подалгебр в очановских топологиях

Пусть (X, Ω) — алгебра. Обозначим через $\mathrm{Sub}\ X$ и $\mathrm{Sub}_f\ X$ соответственно множество всех и множество всех конечнопорожденных подалгебр алгебры X. Для случая, когда Ω — сигнатура группы, эти множества изучались в широком спектре топологий [1—3]. В данной статье они наделяются очановскими топологиями ($(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологиями).

Определение [4]. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и Z — три семейства подмножеств некоторого множества X. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологией на Z называем топологию с предбазой $\sigma = \{[A, B]\colon\ A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}\}$, где $[A, B] = \{F \in Z\colon A \subset F \subset X \setminus B\}$.*

Впервые подобные топологии на пространстве замкнутых подмножеств топологического пространства рассмотрел Ю. С. Очан [5]. Свойства пространства $\exp X$ всех замкнутых (в некоторой топологии на X) подмножеств X и пространства $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X исследовались в [6, 7]. Считаем в дальнейшем, что носитель каждой подалгебры — непустое множество; через $\langle S\rangle$ обозначим подалгебру, порожденную множеством $S \subset X$.

Ограничиваясь изучением хаусдорфовых топологий на $\mathcal{P}(X)$ и его подмножествах, считаем, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ содержат семейство $C_0(X)$ всех конечных подмножеств X. В этом случае $\mathcal{P}(X)$ вполне регулярно и нульмерно (в смысле ind). Число Линделефа пространства Y — это наименьший кардинал τ такой, что из всякого покрытия пространства Y открытыми множествами можно выделить подпокрытие мощности $\leqslant \tau$. Обозначим через ω первый бесконечный кардинал. $(C_0, \mathcal{B})$-топологией и $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$-топологией называем $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологию при $\mathcal{A} = C_0(X)$ и соответственно $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Подобным же образом вводятся $(\mathcal{A}, C_0)$-топологии, $(\mathcal{P}, C_0)$-топологии и т. п. Считаем, что пустое множество является элементом $C_0(X)$, $\exp X$ и $\mathcal{P}(X)$. Точке $F \in \mathcal{P}(X)$ соответствует множество $F \subset X$. Часть результатов (для случая, когда Ω — сигнатура группы) приведена в работе [8].

Теорема 1. *Пусть пространство $\mathrm{Sub}\ X$ наделено (C_0, C_0)-топологией. Тогда:* 1) *подпространство $\mathcal{P}_1 = \mathrm{Sub}\ X \cup \{\varnothing\}$ пространства $\mathcal{P}(X)$ — компакт;* 2) *если $Y \subset X$ и Y пересекает каждую непустую подалгебру алгебры X, то $\mathrm{Sub}\ X$ представимо в виде объединения $\tau = |Y|$ своих компактных подмножеств. Следовательно, если найдется конечное (или счетное) подмножество $Y \subset X$, пересекающее каждую непустую подалгебру, то $\mathrm{Sub}\ X$ — компакт (соответственно $\mathrm{Sub}\ X$ финально компактно).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — пространство всех функций на X со значениями в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$, наделенное топологией поточечной сходимости. Отображение $j\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}$, сопоставляющее точке $F \in \mathcal{P}(X)$ характеристическую функцию χ_F, является гомеоморфизмом $\mathcal{P}(X)$ на $\mathcal{F}$. По теореме Тихонова $\mathcal{F}$ — компакт (гомеоморфный $\{0, 1\}^{|X|}$). Для