2. Можно показать, что решение задачи интерполяции мероморфной функции эквивалентно решению линейной системы $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(t)}{\lambda_k - \mu_j(0)} = 0$ $(\varepsilon_j(0) = 1)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(t)\, e^{\lambda_k t}}{\lambda_k - \mu_j(0)} = -1$ $(\varepsilon_j(0) = -1)$, $\sum_{k=0}^{\infty} s_k(t) = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k(t)| < \infty$.

Зная $(s_k(t))_{k=0}^{\infty}$, мероморфную функцию $f(z, t)$ и $C(t)$ восстанавливаем по формулам

$$f(z, t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k(t)\, e^{\lambda_k t}}{\lambda_k - z}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(t)}{\lambda_k - z}\right)^{-1}, \quad C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} s_k(t).$$

5. Асимптотика. С помощью эффекта поляризации (см. п. 2) и формулы следов (4) можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $a_n(t) \in l_2$, $b_n(t) \in l_2$ являются решениями цепочки Тоды* (1). *Тогда $a(t) \to 0$, $b(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Отметим, что с помощью рассматриваемой методики можно изучить конечную и полубесконечную цепочку Тоды. Первая сводится к задаче интерполяции рациональной функции, вторая формально вкладывается в изложенную выше схему, если $\varepsilon_j(0)$, за исключением конечного числа, равны 1. Так же могут быть получены уже известные асимптотические формулы для конечной цепочки Тоды [2] и в полубесконечном случае [8].

1. *Теория* солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
2. *Кас М., van Moerbeke.* On some periodic Toda lattice // Proc. Nat. Ocad. Sci.— 1975.— **72**, N 4.— P. 1627—1629.
3. *Тода М.* Теория нелинейных решеток.— М. : Мир, 1982.— 262 с.
4. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С. 16—19.
5. *Жернаков Н. В.* Прямая и обратная задача для периодической якобиевой матрицы // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 6.— С. 785—788.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
7. *Deift, Li, Tomei.* Toda flow with infinetly many variables // J. Funct. Anal.— 1985.— **64.**— P. 358—402.

Киев. ун-т Получено 10.02.87

УДК 517.98

П. П. Забрейко, А. Н. Ломакович

Об одном обобщении теоремы Вольтерра

Известная теорема Вольтерра утверждает, что спектральный радиус линейного интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_a^t k(t, s)\, x(s)\, ds \tag{1}$$

с непрерывным ядром $k(t, s)$ в классических пространствах C и L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, соответственно непрерывных на $[a, b]$ и интегрируемых по Лебегу со степенью p на $[a, b]$ функций равен нулю. В других терминах эта теорема формулируется как утверждение об однозначной разрешимости в пространстве непрерывных или соответственно интегрируемых со степенью

p функций линейного уравнения

$$\lambda x - Ax = y \qquad (2)$$

с любой непрерывной или интегрируемой со степенью p правой частью y и с любым $\lambda \neq 0$. Утверждение теоремы Вольтерра справедливо и в случае, когда ядро $k(t, s)$ ограничено и непрерывно (для непрерывных решений при дополнительном предположении, что оператор (1) действует в пространстве C), а для пространства L_2 интегрируемых с квадратом функций — и в случае, когда ядро $k(t, s)$ интегрируемо с квадратом. В работах [1, 2] получено иное обобщение теоремы Вольтерра — спектральный радиус оператора Вольтерра (1) равен нулю в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, если он является компактным оператором в этом пространстве, и в любом из пространств C, L_1 и L_∞, если он слабо компактен в этом пространстве.

Цель настоящей работы — перенести указанный результат для случая пространства C на операторы вида

$$Ax(t) = \int_a^t x(s)\, dg(t, s), \qquad (3)$$

а для случая пространств L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — на операторы вида

$$Ax(t) = a(t)\, x(t) + \int_a^t k(t, s)\, x(s)\, ds. \qquad (4)$$

1. Рассмотрим сначала операторы вида (3) в пространстве C непрерывных на $[a, b]$ функций. В силу классической теоремы Радона [3, 4] оператор (3) действует в этом пространстве, если функция $g(t, s)$ характеризуется следующими свойствами:

а) $g(t, a - 0) = 0$;

б) при каждом $t \in [a, b]$ функция $g(t, s)$ полунепрерывна справа и имеет на $[a, t]$ ограниченную вариацию, причем

$$\bigvee_a^t g(t, \cdot) \leqslant c; \qquad (5)$$

в) функции $g(t, t)$ и $\int_a^t g(t, s)\, ds$ непрерывны на $[a, b]$;

г) при любом $\xi \in (a, b)$ функция $\int_a^\xi g(t, s)\, ds$ непрерывна на $[\xi, b]$.

При выполнении этих условий оператор (3) ограничен в пространстве C, и его норма совпадает с точной нижней границей постоянных c, для которых справедливо неравенство (5).

Приведенные достаточные условия действия оператора (3) в пространстве C не являются необходимыми. Однако можно показать, что произвольный вольтерровский непрерывный линейный оператор A в пространстве C допускает представление (3) с ядром $g(t, s)$, имеющим указанные свойства. (Напомним, что оператор A в пространстве C называется вольтерровским, если для любого $t \in [a, b]$ значение $Ax(t)$ определяется значениями функции x на отрезке $[a, t]$.)

Введем в рассмотрение функцию

$$\nu(\alpha, \beta) = \bigvee_\alpha^\beta g(\beta, \cdot), \quad a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Пусть оператор* (3) *действует в пространстве* C. *Тогда справедливо неравенство*

$$\rho(A) \leqslant \overline{\lim_{\beta - \alpha \to 0}}\, \nu(\alpha, \beta). \qquad (7)$$

Доказательство можно провести по схеме, предложенной в [2]. Именно, достаточно показать, что при $|\lambda| > \overline{\lim\limits_{\beta-\alpha\to 0}} \nu(\alpha,\beta)$ уравнение (2) имеет в C единственное решение для любой непрерывной функции y. Пусть $a = \alpha_0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_n = b$ — такое разбиение отрезка $[a, b]$, для которого $\sup\limits_{\alpha_{i-1}\leqslant\beta\leqslant\alpha_i} \nu(\alpha_{i-1},\beta) < |\lambda|$. Тогда решение $x(t)$ уравнения (2) можно определить последовательно на каждом промежутке $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = 1, \ldots, n$, из равенств

$$x(t) - \lambda^{-1}\int\limits_{\alpha_{i-1}}^{t} x(s)\,dg(t,s) = \lambda^{-1}y(t) + \lambda^{-1}\int\limits_{a}^{\alpha_{i-1}} x(s)\,dg(t,s), \qquad \alpha_{i-1}\leqslant t\leqslant\alpha_i. \tag{8}$$

Действительно, при $i = 1, \ldots, n$ в правой части этого равенства стоит известная функция, так как для ее вычисления используются значения неизвестной функции $x(t)$ лишь в точках $t \leqslant \alpha_{i-1}$, а норма линейного оператора $B_i x(t) = \lambda^{-1}\int\limits_{\alpha_{i-1}}^{t} x(s)\,dg(t,s)$, стоящего в его левой части и действующего в пространстве C_i непрерывных на $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ функций, не превышает числа $|\lambda| \sup\limits_{\alpha_{i-1}\leqslant\beta\leqslant\alpha_i} \nu(\alpha_{i-1},\beta) < 1$. Тем самым уравнение (8) однозначно определяет сужение $x(t)$ на $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$; так как i любое, то тем самым уравнения (8) однозначно определяют решение $x(t)$ уравнения (2).

В известных авторам примерах неравенство (7) обращается в равенство. Однако установить его в общем случае не удалось.

2. Теорема 1 наиболее интересна в случае, когда правая часть неравенства (7) обращается в нуль:

$$\lim_{\beta-\alpha\to 0} \bigvee_{\alpha}^{\beta} g(\beta,\cdot) = 0 \tag{9}$$

и спектральный радиус соответствующего оператора A равен нулю. Ниже операторы (3), для которых выполняется (9), называются V-нильпотентными;

Теорема 2. *Пусть оператор* (3) *действует в пространстве* C *и компактен. Тогда он является V-нильпотентным оператором, и, в частности,* $\rho(A) = 0$.

Для доказательства достаточно заметить, что условие компактности оператора A [3, 5] эквивалентно равенству

$$\lim_{\beta-\alpha\to 0} \bigvee_{a}^{b} (\tilde{g}(\beta,\cdot) - \tilde{g}(\alpha,\cdot)) = 0, \tag{10}$$

где

$$\tilde{g}(t,s) = \begin{cases} g(t,s) & \text{при } a\leqslant s\leqslant t\leqslant b, \\ g(t,t) & \text{при } a\leqslant t\leqslant s\leqslant b, \end{cases}$$

которое можно представить в виде

$$\lim_{\beta-\alpha\to 0} \Big(\bigvee_{a}^{\alpha} g(\beta,\cdot) - g(\alpha,\cdot)) + \bigvee_{\alpha}^{\beta} g(\beta,\cdot)\Big) = 0. \tag{11}$$

Ясно, что (9) является следствием (11). Обратное, конечно, не верно.

Из классической теоремы Петтиса [5] вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть оператор* (3) *действует в пространстве* C *и слабо компактен. Тогда* $\rho(A) = 0$.

Нам неизвестно, являются ли слабо компактные операторы (3) V-нильпотентными.

Будем говорить, что действующий в пространстве C оператор A инфракомпактен, если он преобразует каждую ограниченную и сходящуюся в каждой точке $[a, b]$ (за исключением, возможно, одной) последовательность функций в компактную последовательность функций. Обобщением теоремы 2 является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть оператор* (3) *действует в пространстве* C *и инфракомпактен. Тогда он является* V*-нильпотентным оператором, и, в частности,* $\rho(A) = 0$.

3. Частным классом операторов (3) являются операторы вида

$$Ax(t) = a(t)x(t) + \int_a^t x(s)\,dh(t, s), \tag{12}$$

где $a(t)$ — непрерывная функция, а функция $h(t, s)$ удовлетворяет условию $h(t, t-0) = h(t, t)$ и определяет непрерывный линейный оператор

$$Bx(t) = \int_a^t x(s)\,dh(t, s) \tag{13}$$

в пространстве C.

Теорема 5. *Пусть оператор* (13) *компактен. Тогда справедливо равенство*

$$\rho(A) = \| a(t) \|_C. \tag{14}$$

Для доказательства достаточно заметить, что неравенство $\rho(A) \leqslant \leqslant \| a(t) \| C$ справедливо в силу теорем 1 и 2; обратное неравенство вытекает из того факта, что компактные возмущения не меняют непрерывного спектра, а спектр оператора $A_0x(t) = a(t)x(t)$ непрерывен и состоит из области значений функции $a(t)$.

4. Относительно операторов (4) будем предполагать, что функция $a(t)$ принадлежит пространству L_∞, а ядро $k(t, s)$ определяет непрерывный линейный оператор

$$Bx(t) = \int_a^t k(t, s)\,x(s)\,ds \tag{15}$$

в пространстве L_p. Рассуждая так же, как и при исследовании оператора (3) в пространстве C, и используя критерии компактности [6] и слабой компактности [5, 6] интегральных операторов в пространствах интегрируемых функций, приходим к следующему обобщению основного результата из [1, 2] для рассматриваемого случая.

Теорема 6. *Пусть* $a(t) \in L_\infty$ *и интегральный оператор* (15) *компактен в пространстве* L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *или, если* $p = 1$ *или* $p = \infty$, *хотя бы слабо компактен. Тогда справедливо равенство*

$$\rho(A) = \| a(t) \|_{L_\infty}. \tag{16}$$

Свойство (слабой) компактности в этой теореме можно заменить более слабым свойством Андо [6].

В заключение отметим, что изложенные выше результаты легко переносятся на пространства вектор-функций, функций многих переменных.

1. *Забрейко П. П.* Об интегральных операторах Вольтерра // Успехи мат. наук.— 1967.— **22**, № 1.— С. 167—168.
2. *Забрейко П. П.* О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра // Лит. мат. сб.— 1967.— **7**, № 2.— С. 281—287.
3. *Радон И.* О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях // Успехи мат. наук.— 1936.— Вып. 1.— С. 200—227.
4. *Гливенко В. И.* Интеграл Стильтьеса.— М.; Л. : ОНТИ, 1936.— 216 с.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 896 с.
6. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М. : Наука, 1966.— 500 с.

Терноп. пед. ин-т — Получено 13.01.86