Определение. *Пусть* $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$. *Вектор-функцию* $\mathbf{u} \in H_+$ *назовем сильным решением задачи* 1, *если существует последовательность вектор-функций* $\mathbf{u}_k \in W$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \| \mathbf{u}_k - \mathbf{u} \|_+ = \lim\limits_{k\to\infty} \| L\mathbf{u}_k - \mathbf{f} \|_- = 0$.

Согласно [4], из неравенств (10) следует такая теорема.

Теорема. *Для любой вектор-функции* $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)$ *сильное решение задачи* 1 *существует и единственно.*

Замечание 1. Аналогичные результаты можно получить для других краевых задач для системы (1). Краевые условия надо задавать так, чтобы выполнялись условия (4) и $(M\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,|_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} = 0$. В качестве примера сформулируем две задачи.

Задача 2. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям (4) и $\mathbf{u}\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}^{(2)}\,|_{\Gamma_4} = M\mathbf{u}^{(1)}\,|_{\Gamma_4} = 0$.

Задача 3. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям (4) и $M\mathbf{u}\,|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}\,|_{\Gamma_4} = 0$.

Замечание 2. Все сформулированные выше результаты справедливы, если условия (2) заменить условиями

$$yA(x, y)\,\mathbf{zz} > 0, \quad y \neq 0, \quad A(x, 0) = 0,$$
$$xB(x, y)\,\mathbf{zz} > 0, \quad x \neq 0, \quad B(0, y) = 0.$$

1. *Самедов Н. И.* О разрешимости одной краевой задачи в пространстве для квазилинейной системы уравнений смешанного типа 4-го порядка // Докл. АН СССР.— 1976.— **230**, № 4.— С. 785—788.
2. *Маловичко В. А.* О первой краевой задаче для одного дифференциального уравнения 4-го порядка // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 1.— С. 125—129.
3. *Маловичко В. А.* Задача типа Гурса для системы дифференциальных уравнений четвертого порядка // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний.— Киев : Ин-т математики, 1983.— С. 120—124.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 03.04.85,
после доработки — 17.09.85

УДК 62-50:517.928

А. В. Плотников

Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями

В последние годы в теории управления возник интерес к исследованию задач управления пучком [1, 2] и ансамблем [3] траекторий. Как известно, однозначные управляемые траектории удобно описывать с помощью дифференциальных включений. В качестве математического аппарата для описания управляемых многозначных траекторий в работах [4, 5] использованы дифференциальные уравнения и дифференциальные включения с производной Хукухары, а также обычные дифференциальные включения, содержащие в правой части вектор управления

$$\dot{x} \in F(t, x, u), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где $F: I \times R^n \times U \to \mathrm{Comp}(R^n)$, $U(t) \in \mathrm{Comp}(R^n)$, $I = [t_0, t_1]$, $u: I \to U$ — вектор управления, $x^0 \in S_0 \subset R^n$, $\mathrm{Comp}(R^n)\,(\mathrm{Conv}(R^n))$ — пространство, состоящее из всех непустых компактных (выпуклых) подмножеств R^n.

Включения вида (1) встречаются, например, при исследовании объектов управления в условиях неопределенности

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

где $v(s) \in V$ — действие некоторой помехи. Уравнение движения (2) можно представить в виде (1), если ввести обозначение $F(t, x, u) \equiv f(t, x, u, V)$. В работах [4, 5] для линейных дифференциальных включений, содержащих вправой части управление, исследованы свойства множеств достижимости и получены необходимые условия оптимальности.

В данной работе рассмотрен вопрос о возможности применения метода усреднения для дифференциальных включений стандартного вида, содержащих в правой части управление.

Усреднение в терминальных задачах управления с многозначными траекториями. Пусть движение объекта управления описывается следующим дифференциальным включением:

$$\dot{x} \in \varepsilon [F(t, x) + A(x) \varphi(t, u)], \quad x(0) = x^0, \tag{3}$$

$$J(u) = \Phi(X(T, u)), \tag{4}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in I = [0, T]$ — время, $T = L\varepsilon^{-1}$, $F: I \times R^n \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — многозначное отображение, 2π-периодическое по t, $A(x)$ — $n \times m$-матрица, $\varphi: I \times R^k \to R^m$ — 2π-периодическая по t функция, $u(t) \in U \in \mathrm{Comp}(R^k)$ — вектор управления, $\Phi: \mathrm{Comp}(R^n) \to R^1$, $X(T, u)$ — сечение семейства решений задачи (3).

Поставим в соответствие задаче (3), (4) следующую усредненную задачу:

$$\dot{x} \in \varepsilon [\overline{F}(x) + A(x) w], \quad x(0) = x^0, \tag{5}$$

$$\overline{J}(w) = \Phi(\overline{X}(T, w)), \tag{6}$$

где

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, x)\, dt, \quad w \in W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t, U)\, dt, \tag{7}$$

$\overline{X}(T, w)$ — сечение семейства решений задачи (5).

Интегралы от многозначных отображений в (7) понимаются в смысле Ауманна.

Теорема. *Пусть правая часть* (3) *определена в области* $Q\{t \geqslant 0, x \in G \subset R^n, u \in U \subset R^k\}$ *и пусть:*

1) *отображение* $F: I \times R^n \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — *2π-периодично по t, непрерывно, равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица по x в области Q с постоянной* μ;

2) $A(x)$ — *$n \times m$-матрица, равномерно ограниченная и удовлетворяющая условию Липшица в области Q с константой* μ;

3) *отображение* $\varphi: I \times R^k \to R^m$ — *2π-периодично по t, непрерывно, равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица по u в области с константой* μ;

4) *функция* $\Phi(X)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с константой* λ.

Тогда для любого $L > 0$ можно указать такие $C > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ будут выполняться неравенства

$$J(u^1) - J(u^*) \leqslant C\varepsilon, \tag{8}$$

$$|\overline{J}(w^*) - J(u^*)| \leqslant C\varepsilon, \tag{9}$$

где $u^*(t)$ и $w^*(t)$ — оптимальное управление для задач соответственно (3), (4) *и* (5), (6),

$$u^1(t) = \left\{ u_i(t) \,\middle|\, \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi(t, u_i(t))\, dt = \right.$$

$$\left. = \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} w^*(t)\, dt, \ t \in [2\pi i, 2\pi(i+1)), \ i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Доказательство. Обозначим через $w^1(t)$ управление

$$w^1(t) = \left\{ w_i \mid w_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi(t, u^*(t))\, dt,\ t \in [2\pi i,\ 2\pi(i+1)),\ i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Пусть $X^*(t)$, $\bar{X}^*(t)$, $X^1(t)$, $\bar{X}^1(t)$ — сечения семейств решений соответственно следующих включений:

$$\dot{x} \in \varepsilon [F(t, x) + A(x) \varphi(t, u^*)], \quad x(0) = x^0,$$

$$\dot{x} \in \varepsilon [\bar{F}(x) + A(x) w^*], \quad x(0) = x^0,$$

$$\dot{x} \in \varepsilon [F(t, x) + A(x) \varphi(t, u^1)], \quad x(0) = x^0,$$

$$\dot{x} \in \varepsilon [\bar{F}(x) + A(x) w^1], \quad x(0) = x^0.$$

Тогда согласно теореме о частичном усреднении дифференциальных включений [6] справедливы оценки $h(X^*, X^1) \leqslant C_1\varepsilon$, $h(\bar{X}^1, \bar{X}^*) \leqslant C_1\varepsilon$, где $h(B, D)$ — расстояние по Хаусдорфу между B, $D \in \mathrm{Comp}(R^n)$. Отсюда следует

$$|J(u^*) - \bar{J}(w^1)| \leqslant \lambda C_1 \varepsilon, \quad |J(u^1) - \bar{J}(w^*)| \leqslant \lambda C_1 \varepsilon. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\bar{J}(w^1) \geqslant \bar{J}(w^*), \quad J(u^1) \geqslant J(u^*). \tag{11}$$

Для значений $J(u^*)$ и $\bar{J}(w^*)$ справедливо одно из неравенств

$$J(u^*) > \bar{J}(w^*) \tag{12}$$

или

$$J(u^*) \leqslant \bar{J}(w^*). \tag{13}$$

В первом случае из (10) — (12) следует $J(u^1) \geqslant J(u^*) > \bar{J}(w^*) \geqslant J(u^1) - \lambda C_1 \varepsilon$, т. е.

$$|J(u^*) - \bar{J}(w^*)| \leqslant \lambda C_1 \varepsilon. \tag{14}$$

Во втором случае из (10), (11), (13) следует $\bar{J}(w^1) \geqslant \bar{J}(w^*) \geqslant J(u^*) \geqslant \bar{J}(w^1) - \lambda C_1 \varepsilon$, т. е. также справедливо неравенство (14).

Проверим теперь справедливость неравенства (8):

$$J(u^1) - J(u^*) = |J(u^1) - \bar{J}(w^*) + \bar{J}(w^*) - J(u^*)| \leqslant$$

$$\leqslant |J(u^1) - \bar{J}(w^*)| + |\bar{J}(w^*) - J(u^*)| \leqslant 2\lambda C_1 \varepsilon. \tag{15}$$

Положив $C = 2\lambda C_1$, из (14), (15) получим неравенства (8), (9). Теорема доказана.

Приведенная выше схема усреднения уравнений управляемого движения с многозначными траекториями является обобщением соответствующей схемы для однозначного случая [7]. В данном случае неавтономной задаче управления с многозначными траекториями ставится в соответствие усредненная автономная задача управления.

1. *Зубов В. И.* Динамика управляющих систем.— М. : Высш. шк., 1982.— 235 с.
2. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.— 228 с.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности.— М. : Наука, 1977.— 392 с.
4. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления.— Одесса, 1982.— 35 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2036—82.
5. *Плотников А. В.* Теоремы существования и непрерывной зависимости от параметра решений дифференциальных включений с производной Хукухары. — Одесса, 1983.— 25 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 1949-83.
6. *Плотников В. А.* Частичное усреднение дифференциальных включений // Мат. заметки.— 1980.— **27**, № 6.— С. 947—952.
7. *Плотников В. А.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 4.— С. 30—37.

Одес. ун-т

Получено 05.11.85