Пример. Рассматривается трехточечная краевая задача

$$\dot{x} = \varepsilon (x^2 - 4x + 0{,}01) + 2t, \quad t \in [0, 1], \tag{13}$$

$$3x(0) - 4x(0{,}5) + x(1) = 0, \tag{14}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Имеем $n = 1$, $k = 3$, $\omega = 1$, $A(t) \equiv 0$, $U(t) \equiv 1$, $M_1 = 3$, $M_2 = -4$, $M_3 = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}5$, $t_3 = 1$, $H = 0$, $M = -1$, $\chi = 3$, $f(t, \xi, \eta) = \varepsilon(\eta^2 - 4\varepsilon + 0{,}01) + 2t$, $f'_\xi = -4\varepsilon$, $f'_\eta = 2\varepsilon\eta$. При $R=4$ получаем $a=8\varepsilon$, $l=2\varepsilon$, а $[QF'(x)]_{X_2} = -4\varepsilon$. При $\varepsilon = 0$ задача (13), (14) имеет решение $x(t) = t^2$. Примем его за начальное приближение $x^{(0)} = t^2$, $|||x^{(0)}||| = 3$, $r = 1$, $\tilde{f}^{(0)} = 0{,}01\varepsilon + 2t$, $\alpha = 32\varepsilon$, $\beta = 24\varepsilon$, $\gamma = (4\varepsilon)^{-1}$, $L = 6\varepsilon$, $\delta = 0{,}0025$, $\rho = 5$, $q = 1920\varepsilon + 0{,}001875$. Если ε мало, например $\varepsilon = 10^{-4}$, то $q < 1$ и $2\delta + q < 1$, или $2\delta(1-q)^{-1} < r = 1$. Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Имеем $x^{(0)} = t^2$, $u^{(0)} = t^2 + 1/6$, $v^{(0)} = -1/6$, $y^{(1)} = 2t$, $u^{(1)} = t^2 + 1/6$, $\tilde{x}^{(0)} = u^{(1)} + v^{(0)} = x^{(0)}$, $\tilde{f}^{(0)} = f^{(0)} = 0{,}01\varepsilon + 2t$, $v^{(1)} = -1/6 + 0{,}0025$, $x^{(1)} = t^2 + 0{,}0025$. Таким образом, после одной итерации получим точное решение задачи (13), (14).

1. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* Об одном методе построения решений линейных многоточечных краевых задач // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 9.— С. 10—13.
2. *Габрель О. М.* Решение многоточечной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений проекционно-итеративным методом // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 1.— С. 77—80.
3. *Фам Ки Ань.* О сходимости итерационных методов в условиях неединственности решений операторных уравнений : Автореф. дис. ... канд физ.-мат. наук.— Киев, 1980.— 20 с.
4. *Фам Ки Ань, Ву Зуй Тик.* Об одном итерационном методе решения общих периодических граничных задач // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 3. С. 348—352.
5. *Pham Ky Anh.* On the Seidel — Newton method for solving quasilinear operator equations // Acta Math. Vietnamica.— 1982.—7, №2.—P. 111—126. (Р. Ж. Математика, 1985. 3Б 1130).

Ханой. ун-т Получено 10.03.86

УДК 517.944

А. Е. Шишков

Поведение обобщенных решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях

В данной работе устанавливаются энергетические априорные оценки обобщенных решений начально-краевых задач для квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных по пространственным переменным областях с некомпактными границами. Эти оценки, зависящие от геометрии границы области и аналогичные оценкам, выражающим принцип Сен-Венана в теории упругости, являются новыми и в линейной ситуации. Для линейных параболических уравнений второго порядка такие оценки установлены в [1, 2]. Там же даны их различные применения. В квазилинейной ситуации оценки указанного типа способом, не допускающим обобщения на уравнения высокого порядка, получены в [3].

В неограниченной области Q, лежащей в слое $H_T = \{(x, t) : 0 < t < T < \infty\}$ евклидова пространства $R^{n+1}_{x,t}$ и имеющей некомпактную границу $\partial Q = \Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup \Gamma$ $(\Gamma_0(\Gamma_T) = \partial Q \cap \{(x, t) : t = 0\,(T)\})$ рассматривается начально-краевая задача

$$\partial u/\partial t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha (x, t, u, \nabla_x u, \ldots, \nabla_x^m u) = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$D_x^\alpha u|_\Gamma = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{2'}$$

где непрерывные по $(x, t) \in Q$ и $\xi \in R^{N(m)}$ ($N(m)$ — число различных мультииндексов длины не большей, чем m) функции $a_\alpha(x, t, \xi)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_\alpha(x, t, \xi^0,, \xi^1, \ldots, \xi^m)| \leqslant d_1 \sum_{i=0}^{m} |\xi^i|^{p-1} + f_{\alpha,1}(x, t), \ \xi = (\xi^0, \ldots, \xi^m), \tag{3}$$

$$\xi^i = (\xi_\alpha^i), \quad |\alpha| = i, \quad p > 1, \quad d_1 > 0,$$

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi^0, \ldots, \xi^m)\, \xi_\alpha^m \geqslant d_0 |\xi^m|^p - d_2 \sum_{i=0}^{m-1} |\xi^i|^p - f_{\alpha,2}(x, t), \quad d_0 > 0.$$

Введем необходимые обозначения:

1. $\Omega_\tau = Q \cap \{(x, t) : t = \tau\}$.

2. Если $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область, $S \subset \partial\Omega$, то через $\overset{0}{W}{}_q^m(\Omega, S)$ обозначаем замыкание в норме пространства Соболева $W_q^m(\Omega)$ множества гладких функций, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega \setminus S$; $\overset{0}{W}{}_q^m(\Omega, \varnothing) = \overset{0}{W}{}_q^m(\Omega)$.

3. Если $\tilde{Q}$ — ограниченная область в $H_T \subset R_{x,t}^{n+1}$, то под пространством $L_p(0, T; W_q^m(\tilde{\Omega}_t)$ понимаем $\left\{v(x, t) : \int_0^T (\|v(\cdot, t)\|_{W_q^m(\tilde{\Omega}_t)})^p\, dt < \infty\right\}$. Через $L_p(0, T; \overset{0}{W}{}_q^m(\tilde{\Omega}_t, S_t))$, $S_t \subset \partial\tilde{\Omega}_t$, обозначаем подпространство этого пространства функций $v(x, t) : v(x, \tau) \in \overset{0}{W}{}_q^m(\tilde{\Omega}_\tau, S_\tau)$ $\forall \tau \in [0, T]$.

4. Если $Q \subset H_T$ — неограниченная область, то $L_p(0, T; W_{q,\mathrm{loc}}^m(\Omega_t)) \equiv \{v(x, t) : v(x, t) \in L_p(0, T; W_q^m(\Omega_t'))$ для каждой ограниченной подобласти $Q' \subset Q\}$. Соответственно, $L_p(0, T; \overset{0}{W}{}_{q,\mathrm{loc}}^m(\Omega_t)) = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_p(0, T; \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega_t', \partial\Omega_t' \cap \Omega_t))$ для каждой ограниченной $Q' \subset Q\}$. Здесь $\Omega_\tau' = Q' \cap \{(x, t) : t = \tau\}$.

Задача (1), (2), (2′) в случае ограниченной цилиндрической области $Q = G \times (0, T)$ в пространствах типа $L_p(0, T; W_p^m(G))$ изучалась в ряде работ (см. [4] и имеющуюся там литературу). В [5] в случае $p \geqslant 2$ при некоторых дополнительных предположениях установлено существование решения $u(x, t)$ из $L_p(0, T; W_p^m(G))$, для которого $\partial u/\partial t \in L_2(0, T; L_2(G))$.

Пусть имеется неотрицательная функция $h(x)\, C_{\mathrm{loc}}^m(R^n)$, удовлетворяющая условиям $|\nabla h| \geqslant h_0 > 0$, $h(0) = 0$; $|\nabla^j h(x)| \leqslant h_1 (h(x))^{-j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$; $h_1 > 0$. Обозначим $Q(r) = Q \cap (B_h(r) \times (0, T))$, где $B_h(r) = \{x : h(x) < r\}$; $S(r) = Q \cap \partial Q(r)$. Геометрию ∂Q будем описывать величиной $\lambda_p(r, \tau)$:

$$\lambda_p^p(r, \tau) = \inf_{\mathfrak{M}(r)} \Big(\int_{\sigma(r,\tau)} |\nabla s v|^p ds\Big) \Big(\int_{\sigma(r,\tau)} |v|^p ds\Big)^{-1}, \quad \sigma(r, \tau) = S(r) \cap \Omega_\tau. \tag{4}$$

Здесь $\mathfrak{M}(r)$ — множество непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности множества $\sigma(r, \tau)$ функций, обращающихся в нуль на ∂Q; $\Delta_s v(x)$ — проекция вектора $\Delta v(x)$ на плоскость, касательную к $\sigma(r, \tau)$ в точке x. Свойства величины λ_p хорошо известны, примеры ее вычисления приведены например, в [6]; при $p = 2$ эта величина является основной частотой соответствующего множества. Хорошо известно следующее свойство $\lambda_p(r, \tau)$ как функции r.

Лемма 1. *Для произвольного $u(x) \in \overset{0}{W}{}_{p,\mathrm{loc}}^m(\Omega_t)$ и любой локально ограниченной в Ω_t измеримой функции $f(h(x))$ $\forall\, 0 \leqslant r_2 < r_1 < \infty$ справедливо* *неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_t(r_1)\setminus\Omega_t(r_2)} |\nabla_x^j u|^p \lambda_p^{(m-j)p}(h(x), t) f(h(x))\,dx \leqslant \frac{h_1}{h_0} \int\limits_{\Omega_t(r_1)\setminus\Omega_t(r_2)} |\nabla^m u|^p f(h(x))\,dx,$$

$$j \leqslant m. \tag{5}$$

Наши рассмотрения будут основаны на следующих утверждениях.

Лемма 2 [7]. *Пусть $I(t)$ — непрерывная на (t_0, ∞) функция, удовлетворяющая неравенству $0 \leqslant I(t) \leqslant \theta I(t/\varepsilon)$, $0 < \theta, \varepsilon < 1$ $\forall t \in (t_0, \infty)$. Тогда для $I(t)$ справедлива оценка $I(t) \geqslant \theta (t/t_0)^{\ln\theta/\ln\varepsilon} I(t_0)$.*

Лемма 3. *Пусть $I(t)$ — непрерывная неубывающая на (t_0, ∞) функция, удовлетворяющая неравенству*

$$0 \leqslant I(t) \leqslant \theta I(t\psi(t)), \quad \psi(t) = 1 + \varphi(t), \quad 0 < \varphi(t), \quad 0 < \theta < 1. \tag{6}$$

Пусть $\overline{\psi}(t) = t^{-1}\sup(g(t))$, где верхняя грань берется по всем неубывающим функциям $g(t): g(t) \leqslant t\psi(t)$ $\forall t \in (t_0, \infty)$ и $\overline{\varphi}_0(t)$ — произвольная непрерывная невозрастающая функция, удовлетворяющая неравенству $\overline{\varphi}_0(t) \geqslant \varphi(t) \equiv \overline{\psi}(t) - 1$ $\forall t > t_0$. Если дополнительно выполнено условие на $\overline{\varphi}_0(t)$:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau\overline{\varphi}_0(\tau)} \geqslant e(1+\gamma)\ln\frac{\overline{\varphi}_0(t_0)}{\overline{\varphi}_0(t)} \ \forall t > t_0, \quad \gamma > 0, \tag{7}$$

то выполняется неравенство

$$I(t) \geqslant \theta \exp\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\ln\theta^{-1}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\tau\overline{\varphi}_0(\tau)}\right) I(t_0). \tag{8}$$

Замечание 1. Легко проверяемым достаточным условием выполнения неравенства (7) является следующее:

$$\overline{\varphi}_0'(\tau) \geqslant -[e(1+\gamma)]^{-1}\tau^{-1}. \tag{7'}$$

Доказательство леммы 3 является естественным обобщением доказательства леммы 2.

Определение 1. *Функция $u(x, t) \in L_p(0, T; \overset{0}{W}{}^m_{p,\mathrm{loc}}(\Omega_t)) \cap W_2^1(0, T; L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega_t))$ называется обобщенным решением задачи* (1), (2), (2′), *где $f_{\alpha,1}(x, t) \in L_{p'}(0, T; L_{p',\mathrm{loc}}(\Omega_t))$, $f_{\alpha,2}(x, t) \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q)$, если выполнено условие* (2) *и справедливо интегральное тождество*

$$\int\limits_Q \frac{\partial u}{\partial t} v\,dx\,dt + \int\limits_Q a_\alpha(x, t, u, \ldots, \nabla^m u) D^\alpha v\,dx\,dt = 0 \tag{9}$$

$\forall v(x, t) \in L_p(0, T; \overset{0}{W}{}^m_p(\Omega_t)) \cap L_2(Q)$ *с компактным носителем в* $R^{n+1}_{x,t}$.

Введем в рассмотрение срезающую функцию $\eta_\tau(x) = \zeta_{\psi(\tau)}\left(\dfrac{h(x)}{\tau}\right)$, $\psi(\tau) > 1$, где $\zeta_s(r) = \zeta\left(\dfrac{s-r}{s-1}\right)$, $\zeta(r)$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция: $\zeta(r) = 0$ при $r \leqslant 0$, $\zeta(r) = 1$ при $r \geqslant 1$, $0 < \zeta(r) < 1$ при $0 < r < 1$. Обозначим $\tilde{a}_j = \max|\zeta^{(j)}|$. В силу условий на функцию $h(x)$ справедливы оценки

$$|D_x^j \eta_\tau(x)| \leqslant \frac{a_j}{[\tau(\psi(\tau)-1)]^j}, \quad \tau < h(x) < \tau\psi(\tau), \quad a_j = a_j(\tilde{a}_i, h_1),$$

$$D_x^j \eta_\tau(x) = 0 \ \text{при} \ h(x) \leqslant \tau \ \text{и} \ h(x) \geqslant \tau\psi(\tau). \tag{10}$$

Пусть $u(x, t)$ — произвольное обобщенное решение задачи (1) — (2'). Положим в интегральном тождестве (9) в качестве пробной функции $v(x, t) = u(x, t)\eta_\tau(x)\exp(-2\mu^2(\tau)t)$, где $\mu(\tau)$ — определяемая ниже функция. С учетом условий (3), (4) получим

$$I_{\mu,p}(\tau) \equiv \int_{Q(\tau)} (|\nabla^m u|^p + \mu^2(\tau)u^2)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{Q(\tau\psi(\tau))} \Big[C_1 \sum_{i=0}^{m-1} |\nabla^i u|^p + c_2 \sum_{i=0}^{m} |\nabla^i u|^{p-1} \sum_{j=0}^{m-1} |\nabla^j u| + c_3 \sum_{|\alpha|<m} |f_{\alpha,1}|\,|\nabla^{|\alpha|}u| +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m} |f_{\alpha,2}|\Big]\eta_\tau(x)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dxdt + \int_{Q(\tau\psi(\tau))\setminus Q(\tau)} \Big[c_4 \sum_{i=0}^{m} |\nabla^i u|^{p-1} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} |\nabla^{k-j}u|\,|\nabla^j \eta_\tau(x)| + c_5 \sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{k=1}^{|\alpha|} |f_{\alpha,1}|\,|\nabla^{|\alpha|-k}u|\,|\nabla^k \eta_\tau(x)|\Big] \times$$

$$\times \exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dxdt \equiv \int_0^T \Big(\int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} R_1(x, t)\,dx\Big)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt +$$

$$+ \int_0^T \Big(\int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))\setminus\Omega_t(\tau)} R_2(x, t)\,dx\Big)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt. \tag{11}$$

Здесь и в дальнейшем c_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — постоянные, зависящие лишь от d_1, d_2, m, n, p. Исходя из неравенства (11) установим несколько утверждений о поведении функции $I_{\mu,p}(\tau)$ при $\tau \to \infty$.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением случая $p = 2$. При $p \neq 2$ формулировки результатов и их доказательства близки проведенным нами ранее построениям для эллиптических уравнений. Обозначим $\lambda^2_{2,\mu(s)}(\tau, t) = \lambda^2_2(\tau, t) + \mu^{2/m}(s)$, $J_{p,\mu(s)}(\tau, t) \equiv \int_{\Omega_t(\tau)} (|\nabla^m u|^p + \mu^2(s)u^2)\,dx$, $J_{2,\mu(s)}(\tau, t) \equiv J_{\mu(s)}(\tau, t)$, $Q(\tau\psi(\tau))\setminus Q(\tau) \equiv K(\tau)$, $\Omega_t(\tau\psi(\tau))\setminus\Omega_t(\tau) \equiv M_t(\tau)$. Из леммы 1 $\forall j \leqslant m$, $\forall s > 0$ следует неравенство

$$\int_{M_t(\tau)} |\nabla^j u|^2 \lambda^2_{2,\mu(s)}(h(x)) f(h(x))\,dx \leqslant \frac{h_1}{h_0} \int_{M_t(\tau)} (|\nabla^{j+1}u|^2 + \mu^2(\tau)|\nabla^j u|^2) f(h(x))\,dx. \tag{5'}$$

Будем использовать интерполяционное неравенство Ниренберга — Гальярдо в виде

$$\int_{\Omega_t(\tau)} |\nabla^j u|^2 dx \leqslant \varepsilon \int_{\Omega_t(\tau)} |\nabla^m u|^2 dx + c\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} \int_{\Omega_t(\tau)} u^2 dx \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{12}$$

($c > 0$ не зависит от u, ε, τ), а также следующее из (12) неравенство

$$\mu^{\frac{2(m-j)}{m}}(\tau) \int_{\Omega_t(\tau)} |\nabla^j u|^2 dx \leqslant \int_{\Omega_t(\tau)} |\nabla^m u|^2 dx + c_6\mu^2(\tau) \int_{\Omega_t(\tau)} u^2 dx. \tag{12'}$$

Используя неравенство Гельдера, (5'), (12), (12'), получаем

$$\int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} R_1(x, t)\,dx \leqslant \varepsilon\Big[\int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} |\nabla^m u|^2 dx + \frac{k_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} u^2 dx\Big] +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} |f_{\alpha,2}|\,dx + c_7 \sum_{|\alpha|\leqslant m} \Big(\int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} |f_{\alpha,1}|^2 \lambda^{-2(m-|\alpha|)}_{2,\mu(\tau)}(h(x), t)\,dx\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\Omega_t(\tau\psi(\tau))} (|\nabla^m u|^2 + \mu^2(\tau)u^2)\,dx\Big)^{1/2}, \tag{13}$$

$$\Big(\int\limits_{M_t(\tau)} R_2(x,t)\,dx\Big)^2 \leqslant c_8 \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_{M_t(\tau)} |f_{\alpha,1}|^2 \lambda_{2,\mu(\tau)}^{-2(m-|\alpha|)}(h(x),t)\,dx \int\limits_{M_t(\tau)} (|\nabla^m u|^2 +$$

$$+\mu^2(\tau)u^2)\sum_{i=1}^m a_i^2(\tau(\psi(\tau)-1))^{-2i}\lambda_{2,\mu(\tau)}^{-2i}(h(x),t)\,dx + c_9\int\limits_{M_t(\tau)}(|\nabla^m u|^2 +$$

$$+\mu^2(\tau)u^2)\,dx\int\limits_{M_t(\tau)}(|\nabla^m u|^2+\mu^2(\tau)u^2)\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^k a_i^2 \times$$

$$\times(\tau(\psi(\tau)-1)^{-2i}\lambda_{2\mu(\tau)}^{-2(m-k+i)}(h(x),t)\,dx. \qquad (14)$$

Определим теперь функцию $\psi(\tau)$ соотношением

$$\inf_{\substack{\tau<h(x)<\psi(\tau)\tau\\ 0<t<T}} \lambda_{2,\mu(\tau)}(h(x),t)\,\tau(\psi(\tau)-1)\geqslant 1\quad \forall\tau>\tau_0, \qquad (15)$$

или в случае неубывающей по r функции $\lambda_{2,\mu(s)}(\tau,t)$:

$$\varphi(\tau)\equiv\psi(\tau)-1\geqslant(\tau\Lambda_{2,\mu(\tau)}(\tau))^{-1}\ \forall\tau>\tau_0,\quad \Lambda_{2,\mu(\tau)}(\tau)=\inf_{0<t<T}\lambda_{2,\mu(\tau)}(\tau,t). \qquad (15')$$

Наложим первое условие на функцию $\mu(\tau)$:

а) $\exists\tau_0=\tau_0(\varepsilon):\mu^2(\tau)>k_1(\varepsilon)/\varepsilon\ \forall\tau>\tau_0$, где $k_1(\varepsilon)$ из (13).
Тогда из (11) с учетом (13)—(15) при $\tau>\tau_0(\varepsilon)$ следует

$$\int\limits_0^T J_{\mu(\tau)}(\tau,t)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt\leqslant(\varepsilon+\varepsilon_1)\int\limits_0^T J_{\mu(\tau)}(\tau\psi(\tau),t)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt +$$

$$+(c_9^{1/2}B+\varepsilon_1)\int\limits_0^T[J_{\mu(\tau)}(\tau\psi(\tau),t)-J_{\mu(\tau)}(\tau,t)]\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt +$$

$$+(c_7^2c_1(\varepsilon_1)+c_8A^2c_2(\varepsilon_1))\,G_{\mu(\tau)}(\tau\psi(\tau)),\quad A^2=\sum_{i=1}^m a_i^2,\quad B=A\sup_{\substack{\tau_0<\tau\\0<t<T}}B_1(\tau,t),$$

$$B_1(\tau,t)=\sup_{M_t(\tau)}\Big(\sum_{k=1}^m\lambda_{2,\mu(\tau)}^{-(m-k)}(h(x),t)\Big),\quad G_{\mu(s)}(\tau)=\int\limits_{Q(\tau)}\Big[\sum_{|\alpha|=m}|f_{\alpha,2}|+$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m}|f_{\alpha,1}|^2\lambda_{2,\mu(s)}^{-2(m-|\alpha|)}(h(x),t)\Big]\exp(-2\mu^2(s)t)\,dxdt.$$

Из (16) непосредственно следует

$$\int\limits_0^T J_{\mu(\tau)}(\tau,t)\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon+\varepsilon_1+c_9^{1/2}B}{1+\varepsilon_1+c_9^{1/2}B}\int\limits_0^T J_{\mu(\tau)}(\tau\psi(\tau),t)\times$$

$$\times\exp(-2\mu^2(\tau)t)\,dt+C(\varepsilon,\varepsilon_1)\,G_{\mu(\tau)}(\tau\psi(\tau)),\quad \theta=\frac{c_9^{1/2}B}{1+c_9^{1/2}B}<1. \qquad (16')$$

Пусть теперь выполнено следующее условие на $\mu(\tau)$:

в) $\theta\exp((2\mu^2(\tau\psi(\tau))-2\mu^2(\tau))T)\leqslant\nu<1\ \ \forall\tau>\tau_0$,

или

в′) $\mu^2(\tau\psi(\tau))-\mu^2(\tau)<(2T)^{-1}(\ln\nu-\ln\theta)$.

Если к тому же $\mu(\tau)$ — неубывающая функция, то из (16′) следует справедливость $\forall\tau>\tilde{\tau}_0(\delta)$, $\forall\delta>0$ неравенства

$$I_{\mu(\tau)}(\tau)\leqslant(\nu+\delta)\Big(1+\tilde{c}(\delta)\frac{G_{\mu(\tau\psi(\tau))}(\tau\psi(\tau))}{I_{\mu(\tau\psi(\tau))}(\tau\psi(\tau))}\Big)I_{\mu(\tau\psi(\tau))}(\tau\psi(\tau)). \qquad (17)$$

Отсюда в силу леммы 3 вытекает справедливость следующего основного утверждения.

Теорема. *Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи* (1), (2), (2′) *при* $p=2$: $\mu(\tau)$ *и* $\psi(\tau)$ — *соответственно монотонно неубывающая и монотонно невозрастающая при* $\tau > \tau_0$ *функции, удовлетворяющие условиям* (15), а), в), *и для* $\overline{\varphi}_0(\tau)$, *строящейся по* $\varphi(\tau) \equiv \psi(\tau) - 1$ *в лемме* 3, *выполнено с некоторым* $\gamma > 0$, *условие* (7). *Тогда либо* $\varlimsup_{\tau\to\infty} I_{\mu(\tau)}(\tau) G^{-1}_{\mu(\tau)}(\tau) < c < \infty$, *либо* $I_{\mu(\tau)}(\tau)$ *растет при* $\tau \to \infty$ *столь быстро, что* $\forall \delta > 0$ $\exists \tau_0 = \tau_0(\delta)$:

$$I_{\mu(\tau)}(\tau) \geqslant \Phi_\delta(\tau, \tau_0) I_{\mu(\tau_0)}(\tau_0) \equiv (\nu+\delta) \exp\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \ln(\nu+\delta)^{-1} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau\overline{\varphi}_0(\tau)}\right) I_{\mu(\tau_0)}(\tau_0) \tag{18}$$

$\forall \tau > \tau_0(\delta)$; *здесь* $\nu < 1$ *из* в).

Замечание 2. Если рассматриваемая задача однородна, т. е. $G_{\mu(\tau)}(\tau) \equiv 0$, то оценка (18) справедлива для любого обобщенного решения.

Замечание 3. Утверждение теоремы, очевидно, является нетривиальным, только если для функции $G_{\mu(\tau)}(\tau)$ справедлива оценка $G_{\mu(\tau)}(\tau) < R(\tau) \Phi_{\delta_0}(\tau, \tau_0) G_{\mu(\tau_0)}(\tau_0)$, $\delta_0 > 0$, $R(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Замечание 4. Теорема справедлива для обобщенных решений задачи (1), (2), (2′) в случае, когда уравнение (1) является линейным недивергентным:

$$\partial u/\partial t + Lu \equiv \partial u/\partial t + (-1)^m \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x, t) D_x^\alpha u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha(x, t), \tag{1′}$$

$$\| a_\alpha(x, t) \|_{C^{|\alpha|-m}(R^{n+1})} < d_1 < \infty, \quad m \leqslant |\alpha| \leqslant 2m, \quad |a_\alpha| < d_1, \quad |\alpha| < m, \tag{3′}$$

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, t) \xi^\alpha \geqslant d_0 |\xi|^{2m} \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}, \quad d_0 > 0. \tag{4′}$$

Интегральное тождество (9) заменяется следующим:

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt + \int_Q B_1 u B_2 v dx dt = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_Q f_\alpha D_x^\alpha v dx dt, \tag{5′}$$

где B_1 и B_2 — дифференциальные операторы порядка m такие, что $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^{2m}(Q)$: $\int_Q L\varphi_1 \varphi_2 dx dt = \int_Q B_1 \varphi_1 B_2 \varphi_2 dx dt$.

При выводе основного неравенства (11) вместо неравенства (4) нужно воспользоваться неравенством Гординга. Конкретизируем теперь утверждение теоремы для ряда типичных областей.

1. Установим сначала универсальную оценку, справедливую для произвольных неограниченных областей. Очевидным достаточным условием выполнения условия (15′) является следующее:

$$\psi(\tau) - 1 = \tau^{-1} \mu^{-1/m}(\tau). \tag{15″}$$

Условие в′) по формуле конечных приращений можно представить в виде $2\mu(\tilde\tau) \mu'(\tilde\tau) \tau (\psi(\tau) - 1) \leqslant (2T)^{-1} (\ln \nu - \ln \theta)$ $\tilde\tau$ — некоторая точка из интервала $(\tau, \tau\psi(\tau))$; для справедливости этого неравенства при монотонно неубывающей функции $\mu(\tau)$ в силу (15″) достаточно, чтобы было выполнено: $\mu^{1-1/m}(\tau) \mu'(\tau) \leqslant (4T)^{-1} (\ln \nu - \ln \theta)$, либо $\mu^{2-1/m}(\tau) \leqslant (4mT)^{-1} (2m-1)(\ln \nu - \ln \theta)(\tau - \tau_0) + \mu^{2-1/m}(\tau_0)$. Значит, можно взять

$$\mu_1(\tau) = \nu_1 (\tau + k)^{m/(2m-1)} \forall k > 0, \quad \nu_1 = \left(\frac{(2m-1)(\ln \nu - \ln \theta)}{4mT}\right)^{m/(2m-1)} \tag{19}$$

и, следовательно, в силу (15″) можно положить

$$\psi(\tau) = \psi_1(\tau) \equiv 1 + \tau^{-1} \nu_1^{-1/m} (\tau + k)^{-1/(2m-1)}. \tag{20}$$

Так как для $\varphi(\tau) = \bar{\varphi_0}(\tau) \equiv \psi_1(\tau) - 1$ выполняется условие (7′) с любым сколь угодно большим γ при достаточно большом τ_0, то из теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 1. *В условиях теоремы при* $G_{\mu(\tau)}(\tau) = 0$ *выполняется следующая априорная оценка решения задачи* (1), (2), (2′):

$$I_{\mu_1(\tau)}(\tau) \geqslant \Phi_\delta^{(1)}(\tau, \tau_0) I_{\mu_1(\tau_0)}(\tau_0) \equiv (\nu+\delta) \exp\left(\ln(\nu+\delta)^{-1} \nu_1^{1/m} \frac{(2m-1)}{m} \times \right.$$

$$\left. \times (\tau^{2m/(2m-1)} - \tau_0^{2m/(2m-1)})\right) I_{\mu_1(\tau_0)}(\tau_0), \quad \tau_0 = \tau_0(\delta), \ \forall \delta > 0, \quad (21)$$

$\mu_1(\tau)$ *и* $\nu_1(\nu)$ *определены соотношениями* (19).

Несложно выбрать $\nu \in (\theta, 1)$ (θ из (16′)) оптимальным образом так, чтобы рост функции $\Phi_\delta^{(1)}(\tau, \tau_0)$ был максимальным.

Замечание 5. Оценка (21) в приложении к решению задачи (1′), (2), (2′) стандартным образом [1] дает класс единственности обобщенных решений рассматриваемой задачи (в частности, задачи Коши). Для классических решений этот класс, класс Тихонова, получен разными авторами для широкого класса эволюционных уравнений (см. [2] и имеющуюся там литературу). Заметим еще, что на основе (21) по известной схеме [1] доказывается существование решения задачи (1′), (2), (2′) в том же классе растущих функций, в котором установлена единственность.

2. Для достаточно узких областей Q, а именно, для областей, удовлетворяющих условию

$$\Lambda_2(\tau) \equiv \inf_{0<t<T} \lambda_2(\tau, t) > c\mu_1^{1/m}(\tau) \ \ \forall \tau > \tau_0, \quad c > 0, \quad (22)$$

где $\mu_1(\tau)$ из (19), можно установить более быстрый рост интеграла энергии, чем тот, что определяется (21). Легко проверить, что справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Утверждение теоремы справедливо с* $\mu(\tau) = \mu_0 = \mathrm{const}$, $\nu = \theta$ *из* (16′), *и функцией* $\psi(\tau)$, *удовлетворяющей условию* $\inf\limits_{\tau<s<\tau\psi(\tau)} \Lambda_2(s)\tau(\psi(\tau) - 1) \geqslant 1$, (*или, в случае неубывающей функции* $\Lambda_2(\tau): \psi(\tau) - 1 \geqslant (\tau\Lambda_2(\tau))^{-1}$).

Пример. Пусть $Q = \Omega \times (0, T)$ и Ω лежит в слое: $|x_n| < f(|x'|)$, $x' = x_1, \ldots, x_{n-1}$; $u(x, t)$ — обобщенное решение однородной ($G_{\mu_0}(\tau) \equiv 0$) задачи (1), (2), (2′) с $p = 2$. Положим $h(x) = |x'|$. Тогда $\Lambda_2(\tau) \geqslant c_p(f(\tau))^{-1}$, $c_p > 0$. Если $f(\tau)$ — неубывающая, то в силу замечания 1 и следствия 2 $\forall \delta > 0$, $\forall \tau > \tau_0(\delta)$ справедлива оценка

$$I_{\mu_0}(\tau) \geqslant (\theta + \delta) \exp\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \ln(\theta+\delta)^{-1} c_p \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{ds}{f(s)}\right) I_{\mu_0}(\tau_0).$$

В частности, при $f(\tau) = \tau^{1-l}$, $l > 1$,

$$I_{\mu_0}(\tau) \geqslant (\theta + \delta) \exp\left(c_p l^{-1} \ln(\theta+\delta)^{-1} (\tau^l - \tau_0^l)\right) I_{\mu_0}(\tau_0) \ \forall \tau > \tau_0(\delta).$$

Последняя оценка при $l > 1 + (2m-1)^{-1}$ является более сильной, чем универсальная оценка (21).

Замечание 6. Некоторые зависящие от геометрии области оценки решений смешанных задач для общих линейных параболических систем анонсированы в [8].

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1976.— **31**, № 6.— С. 142—166.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Там же.— 1978.— **33**, № 5.— С. 7—77.
3. *Тедеев А. Ф., Шишков А. Е.* Поведение решений и субрешений квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях и в окрестности граничной точки // Изв. вузов. Математика.— 1985.— № 9.— С. 77—79.

4. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники.— Соврем. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1976.— **9**.— С. 5—130.
5. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Мат. сб.— 1962.— **59**, вып. 2.— С. 289—325.
6. *Миклюков В. М.* Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением // Там же.— 1980.— **111**, вып. 1.— С. 42—66.
7. *Солонников В. А.* О дифференциальных свойствах слабых решений квазилинейных эллиптических уравнений // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та.— 1974.— **39**.— С. 110—120.
8. *Гагнидзе А. Г.* О единственности решений краевых задач для общих параболических систем в неограниченных областях // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, № 5.— С. 223—224.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 26.06.85,
после доработки — 26.03.86

УДК 517.92

И. Н. Щитов

Асимптотика решений систем с медленными и быстрыми переменными. II

Рассмотрим систему с медленными и быстрыми переменными,

$$dx/dt = \varepsilon X(t, z, x, \varepsilon t), \quad dz/dt = Z(t, z, x, \varepsilon t), \tag{1}$$

которую после замены $\varepsilon t = \tau$ можно представить в виде

$$dx/d\tau = X(\tau/\varepsilon, z, x, \tau), \quad \varepsilon dz/d\tau = Z(\tau/\varepsilon, z, x, \tau). \tag{2}$$

В предположении, что вырожденная система

$$dx/dt = 0, \quad d\tau/dt = 0, \; dz/dt = Z(t, z, x, \tau) \tag{3}$$

имеет интегральное многообразие S, обладающее некоторым свойством притяжения, и существует среднее $Y(x, \tau)$ функции $X(t, z, x, \tau)$, вычисленное «на» многообразии S, в работе с помощью усредненной системы

$$dy/dt = \varepsilon Y(y, \varepsilon t) \tag{4}$$

построена в первом приближении асимптотика решений системы (1) на отрезке $[0, T_0/\varepsilon]$ (для τ соответственно на отрезке $[0, T_0]$). Доказана теорема, содержащая в себе как частные случаи теорему А. Н. Тихонова [1, 2], теорему Л. С. Понтрягина и Л. В. Родыгина [3] и теорему В. М. Волосова [4, 5]. Она обобщает также результаты работы [6].

1. Пусть функции $X(t, z, x, \tau)$ и $Z(t, z, \tau)$ определены и непрерывны в области $Q \subset R_t^1 \times R_z^n \times R_x^m \times R_\tau^1$; обозначим через Ω проекцию Q на $R_x^m \times R_\tau^1$ и положим $Q_{t_0} = Q \cap \{t = t_0\}$, $Q_{x_0,\tau_0} = Q \cap \{x = x_0\} \cap \{\tau = \tau_0\}$ и т. д.

Для решений вырожденной системы $x = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, а быстрая составляющая z определяется из системы

$$dz/dt = Z(t, z, x, \tau). \tag{5}$$

Будем считать, что А $(t_0, z_0, x, \tau) \in Q$ существует единственное решение $z = \varphi(t, t_0, z_0, x, \tau)$ системы (5), проходящее через точку (t_0, z_0); это решение определено при всех $t \geqslant t_0$ и лежит в $Q_{x,\tau}$.

Допустим, что $\forall (x, \tau) \in \Omega$ система (5) имеет $k+1$-мерное интегральное многообразие $S_{x,\tau} \subset Q_{x,\tau}$; это означает, что любая интегральная кривая, имеющая с $S_{x,\tau}$ общую точку (t_0, z_0) принадлежит $S_{x,\tau}$ при всех $t \geqslant t_0$. Будем считать, что многообразие $S_{x,\tau}$ задается уравнением

$$z = f(t, p, x, \tau), \quad p \in G, \tag{6}$$