УДК 517.9

С. А. Щеголев, канд. физ.-мат. наук (Одес. ин-т инж мор. флота)

О РЕШЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Existence of a special solution is proved for a quasilinear differential system whose coefficients can be represented by a trigonometric system with slowly changing coefficients and frequency; this solution has the same structure.

Для квазілінійної диференціальної системи, коефіцієнти якої зображувані у вигляді тригонометричного ряду з коефіцієнтами і частотою, що повільно змінюються, доведено існування частинного розв'язку з аналогічною структурою.

Системам дифференциальных уравнений с периодическими и медленно меняющимися коэффициентами посвящено большое число работ. Из вышедших в последнее время отметим монографии [1, 2].

В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [3–5].

Обозначим

$$Z = \{\pm n,\ n \in \mathbb{N}\},\ \ \mathbb{R}^1 =]-\infty, +\infty[,\ \ \mathbb{C}^1 = \{x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}^1\},$$

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^1 \times \ldots \times \mathbb{C}^1,\ \ G = \{t, \varepsilon\colon\ t \in \mathbb{R}^1,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^1\}.$$

***Определение* 1.** *Через S обозначим класс функций $f(t, \varepsilon)$, удовлетворяющих условиям:*

1) $f(t, \varepsilon)$: $G \to \mathbb{C}^1$, $f(t, \varepsilon) \in C(G)$, $\sup\limits_G |f(t, \varepsilon)| = M_f < +\infty$;

2) $df(t, \varepsilon)/dt = \varepsilon\, g(t, \varepsilon)$, *где* $g(t, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию* 1.

***Определение* 2.** *Через S_γ обозначим класс функций $f(t, \varepsilon)$, удовлетворяющих условиям:* $f(t, \varepsilon) \in S$, $|\operatorname{Re} f(t, \varepsilon)| \ge \gamma > 0$, γ — *постоянная.*

***Определение* 3.** *Через V обозначим пространство функций вида*

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s(t, \varepsilon) \exp(i\, s\theta(t, \varepsilon)), \tag{1}$$

$\theta(t, \varepsilon)$ *вещественная,* $\omega(t, \varepsilon) \equiv d\theta(t, \varepsilon)/dt \in S_{\omega_0}$,

$$\|f\|_V \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sup_G |f_s(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

***Определение* 4.** *Через B обозначим класс функций $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ из пространства V, причем функции $f_s(t, \varepsilon)$ в формуле* (1) *таковы, что*

$$df_s(t, \varepsilon)/dt = \varepsilon\, g_s(t, \varepsilon),\ \ \sup_G |g_s(t, \varepsilon)| \le L_f < +\infty,\ \ s \in Z,$$

L_f *не зависит от* t, ε, s.

***Определение* 5.** *Через U обозначим пространство бесконечномерных вектор-столбцов* $\varphi(t, \varepsilon) = \operatorname{colon}(\varphi_s(t, \varepsilon))$, $s \in Z$, *таких, что*

$$\|\varphi(t, \varepsilon)\|_U \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sup_G |\varphi_s(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Целью настоящей статьи является выяснение условий, при которых система

© С. А. ЩЕГОЛЕВ, 1993

дифференциальных уравнений "почти треугольного" вида

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))\, x_k + q_j(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) +$$

$$+ \mu X_j(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), x_1, \dots, x_n), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

в которой $p_{jk}, q_j \in B$, X_j определены в $G \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^n$, имеет частные решения класса B.

Теорема 1. *Пусть "треугольная" система*

$$\frac{dx_{j0}}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))\, x_{k0} + q_j(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)), \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

удовлетворяет условиям:

1) $$\left\{ \begin{matrix} p_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \\ q_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \end{matrix} \right\} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} p_{jks}(t,\varepsilon) \\ q_{js}(t,\varepsilon) \end{matrix} \right\} \exp(i\, s\, \theta(t, \varepsilon)) \in B;$$

2) $$\|p_{jk}\|_V \le P, \quad \left| \frac{dp_{jks}(t,\varepsilon)}{dt} \right| \le \varepsilon r_0, \quad p_{jj0}(t, \varepsilon) \in S_{\rho_0};$$

3) $$\|q_j\|_V \le Q, \quad \left| \frac{dq_{js}(t,\varepsilon)}{dt} \right| \le \varepsilon l;$$

4) *функции* $da_{js}(t, \varepsilon)/dt$, $db_{js}(t, \varepsilon)/dt$, *где*

$$\left\{ \begin{matrix} a_{js}(t,\varepsilon) \\ b_{js}(t,\varepsilon) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\omega(t,\varepsilon)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega(t,\varepsilon)} \left\{ \begin{matrix} \operatorname{Re} p_{jjs}(t,\varepsilon) \\ \operatorname{Im} p_{jjs}(t,\varepsilon) \end{matrix} \right\} \right),$$

при $s \ne 0$ *сохраняют знак всюду в области* G.

Тогда система (3) *имеет единственное частное решение*

$$x_{j0}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{js0}(t, \varepsilon) \exp(i\, s\theta(t, \varepsilon)) \in B, \quad j = \overline{1,n},$$

причем существуют такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, *не зависящие от* t, ε, j, s, *что справедливы неравенства*

$$\|x_{j0}\|_V \le c_1 (1 + Pc_1)^{j-1} Q, \tag{4}$$

$$\left| \frac{d\varphi_{js0}(t,\varepsilon)}{dt} \right| \le \varepsilon\, c_2 (1 + \xi_1)^{j-1} (l + Q), \tag{5}$$

где $\xi_1 = Pc_2 + r_0 c_1 + Pc_1$.

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (3):

$$\frac{dx_{10}}{dt} = p_{11}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))\, x_{10} + q_1(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)). \tag{6}$$

В [5] установлено, что при выполнении условий теоремы уравнение (6) имеет единственное решение x_{10} класса B, причем существуют такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, определяемые лишь коэффициентом p_{11} и не зависящие от функции q_1, что

$$\|x_{10}\|_V \le c_1 Q, \quad \left|\frac{d\varphi_{js0}(t,\varepsilon)}{dt}\right| \le \varepsilon c_2 (l+Q).$$

Используя эти оценки применительно к последующим уравнениям системы (3), получаем неравенства (4), (5).

Теорема 2. *Пусть система дифференциальных уравнений* (2) *такова, что*:

1) *функции* p_{jk} и q_j *удовлетворяют всем условиям теоремы* 1;

2) *на функции* X_j $(j=\overline{1,n})$ *налагаются следующие ограничения: пусть*

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \varphi_{js}(t,\varepsilon) \\ \psi_{js}(t,\varepsilon) \end{Bmatrix} \exp(i s \theta(t,\varepsilon)) \in V,$$

$\|x_j\|_V = \|\varphi^j\|_U \le \alpha$, $\|y_j\|_V = \|\psi^j\|_U \le \alpha$, *где* $\varphi^j = \operatorname{colon}(\varphi_{js})$, $\psi^j = \operatorname{colon}(\psi_{js})$, $s \in Z$,

$$\left|\frac{d\varphi_{js}(t,\varepsilon)}{dt}\right| \le \varepsilon\alpha_1, \quad \left|\frac{d\psi_{js}(t,\varepsilon)}{dt}\right| \le \varepsilon\alpha_1, \quad j=\overline{1,n},\ s\in Z,$$

α, α_1 — *постоянные; тогда существуют положительные постоянные* $L(\alpha)$, $L_1(\alpha,\alpha_1)$, $L_2(\alpha,\alpha_1)$ *такие, что выполнены неравенства*:

а)

$$\|X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,\ldots,x_n) - X_j(t,\varepsilon,\theta,y_1,\ldots,y_n)\|_V \le$$

$$\le L(\alpha)\sum_{k=1}^{n}\|x_k-y_k\|, \quad j=\overline{1,n},$$

б)

$$\left|\frac{dH_{js}(t,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)}{dt} - \frac{dH_{js}(t,\varepsilon,\psi^1,\ldots,\psi^n)}{dt}\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(L_1(\alpha,\alpha_1)\sum_{k=1}^{n}\|\varphi^k-\psi^k\|_U + \frac{1}{\varepsilon}L_2(\alpha,\alpha_1)\sum_{k=1}^{n}\max_s\left|\frac{d\varphi_{ks}}{dt} - \frac{d\psi_{ks}}{dt}\right|\right),$$

где

$$H_{js}(t,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,\ldots,x_n)\, e^{-is\theta}\, d\theta, \quad j=\overline{1,n},\ s\in Z.$$

При этих условиях существует такое $\mu_0 > 0$, *что* $\forall\,\mu \in [0,\mu_0)$ *система* (2) *имеет единственное частное решение*

$$x_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),\mu) = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\varphi_{js}(t,\varepsilon,\mu)\exp(i s\theta(t,\varepsilon)), \quad j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

принадлежащее классу B.

Доказательство. Подставим выражение (7) в систему (2) и приравняем коэффициенты при $\exp(i s\theta)$. В результате получим счетную систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов φ_{js}:

$$\frac{d\varphi_{js}}{dt} + i s\omega(t,\varepsilon)\varphi_{js} = \sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{jk,\,s-m}(t,\varepsilon)\,\varphi_{km}\right) +$$

$$+\ q_{js}(t,\varepsilon)+\mu H_{js}(t,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^n),\ \ j=\overline{1,n},\ \ s\in Z. \tag{8}$$

Из теоремы 1 вытекает, что при $\mu = 0$ система (8) имеет единственное частное решение $\varphi_{js0}\in S$, и для него справедливы оценки (4), (5) (с учетом того факта, что $\|\varphi^{j0}\|_U = \|x_{j0}\|_V$). Построим последовательность $\{\varphi_{jsr}\}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, элементами которой являются решения класса S линейных систем

$$\frac{d\varphi_{jsr}}{dt}+is\omega(t,\varepsilon)\varphi_{jsr}=\sum_{k=1}^{j}\Big(\sum_{s=-\infty}^{\infty}p_{jk,s-m}(t,\varepsilon)\,\varphi_{kmr}\Big)+$$

$$+\ q_{jk}(t,\varepsilon)+\mu H_{js}(t,\varepsilon,\varphi^{1,r-1},\ldots,\varphi^{n,r-1}),\ \ j=\overline{1,n},\ \ s\in Z, \tag{9}$$

$r = 1, 2, \ldots$, где $\varphi^{jr} = \operatorname{colon}(\varphi_{jsr})$, $s\in Z$. Обозначим

$$\Omega=\{\varphi^j\in U\colon\ \|\varphi^j-\varphi^{j0}\|_U\le W,\ W>0\},$$

$$H(W)=\max_{1\le j\le n}\ \sup_{\varphi^1,\ldots,\varphi^n\in\Omega}\|H^j(t,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)\|_U,$$

где $H^j = \operatorname{colon}(H_{js})$, $s\in Z$.

Используя (4), нетрудно установить оценку

$$\|\varphi^{jr}-\varphi^{j0}\|_U\ \le\ \mu\,c_1(1+\xi_1)^{n-1}H(W)\quad\forall\, r=1,2,\ldots,$$

следовательно, условие

$$\mu\,c_1(1+\xi_1)^{n-1}H(W)\ \le\ w_0\ <\ W \tag{10}$$

гарантирует принадлежность всех φ^{jr} $(r = 1, 2, \ldots)$ области Ω. Обозначая $\alpha = c_1(1+\xi_1)^{n-1}Q + W$, получаем $\|\varphi^{jr}\|_U\le\alpha$ $\forall\, j=\overline{1,n}$, $r = 1, 2, \ldots$.

Далее, индукцией по числу r, используя условие 2а) теоремы и неравенство (4), устанавливаем справедливость неравенства

$$\|\varphi^{jr}-\varphi^{j,r-1}\|_U\ \le\ c_1(1+\xi_1)^{j-1}\left(\mu c_1 L(\alpha)\frac{(1+\xi_1)^n-1}{\xi_1}\right)^r Q. \tag{11}$$

Отсюда следует, что условие

$$\mu\,c_1\,L(\alpha)\frac{(1+\xi_1)^n-1}{\xi_1}<1 \tag{12}$$

гарантирует сходимость последовательности φ^{jr} $(r = 1, 2, \ldots)$ по норме пространства U к решению $\varphi^j = \operatorname{colon}(\varphi_{js})$, $s\in Z$, класса S счетной системы (8).

Обозначим

$$\Omega_1=\left\{\varphi^j\in\Omega\colon\ \max_s\left|\frac{d\varphi_{js}}{dt}-\frac{d\varphi_{js0}}{dt}\right|\le\varepsilon W_1,\ W_1>0\right\},$$

$$H_1(W_1)=\max_s\ \max_{1\le j\le n}\ \sup_{\varphi^1,\ldots,\varphi^n\in\Omega_1}\ \sup_G\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{dH_{js}(t,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^n)}{dt}\right|$$

(если $\varepsilon = 0$, то в этом случае H_{js} — постоянные числа, и тогда $H_1(W_1) = 0$).

Используя оценку (5), легко показать, что при условии

$$\mu\, c_2\,(1+\xi_1)^{n-1}(H_1(W_1) + H(W)) \le w_1 < W_1 \tag{13}$$

все φ^{jr} $(r = 1, 2, \ldots)$ остаются внутри области Ω_1. Обозначив $\alpha_1 = c_2\,(1 + \xi_1)^{n-1}(l+Q) + W_1$, получим

$$\left|\frac{d\varphi_{jsr}(t,\varepsilon)}{dt}\right| \le \varepsilon\,\alpha_1 \quad \forall\, j=\overline{1,n},\ s\in Z,\ r=1,2,\ldots .$$

Далее, использование условия 2б) теоремы и неравенства (5) позволяет по индукции доказать оценку

$$\left|\frac{d\varphi_{jsr}(t,\varepsilon)}{dt} - \frac{d\varphi_{js,r-1}(t,\varepsilon)}{dt}\right| \le$$

$$\le \varepsilon\, c_2\,(1+\xi_1)^{n-1}\left(\mu\xi_2\frac{(1+\xi_1)^n-1}{\xi_1}\right)^r (l+Q), \tag{14}$$

где $\xi_2 = c_1L_1(\alpha, \alpha_1) + c_2L_2(\alpha, \alpha_1) + c_1L(\alpha)$. Поэтому условие

$$\mu\,\xi_2\,\frac{(1+\xi_1)^n-1}{\xi_1} < 1 \tag{15}$$

гарантирует сходимость последовательности $\left\{\dfrac{d\varphi_{jsr}}{dt}\right\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ равномерно $\forall\, t, \varepsilon \in G$ $(j=\overline{1,n},\ s\in Z)$ к функции $d\varphi_{js}/dt$. Отметим, что в силу выполнения неравенства (15) автоматически выполняется неравенство (12).

Из (11), (12) вытекают оценки для решения x_j класса B системы (2):

$$\|x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\|_V \le c_1\,(1+\xi_1)^{j-1}\left(1 - \mu\, c_1\, L(\alpha)\frac{(1+\xi_1)^n-1}{\xi_1}\right)^{-1} Q,\quad j=\overline{1,n},$$

а из (14), (15) — оценки для производных коэффициентов этого решения:

$$\left|\frac{d\varphi_{js}(t,\varepsilon,\mu)}{dt}\right| \le \varepsilon\, c_2\,(1+\xi_1)^{j-1} \times$$

$$\times\left(1-\mu\xi_2\frac{(1+\xi_1)^n-1}{\xi_1}\right)^{-1}(l+Q),\ j=\overline{1,n},\ s\in Z.$$

Теорема доказана.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
3. *Костин А. В., Щеголев С. А.* Об одном классе решений квазилинейной дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 101–103.
4. *Щеголев С. А.* Об одном классе решений многочастотной квазилинейной системы дифференциальных уравнений // Там же. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1294–1296.
5. *Щеголев С. А.* Исследование специального класса решений линейного уравнения с периодическими коэффициентами // Деп. в ВИНИТИ 25.07.91, № 3205–В91. – 18 с.

Получено 15.11.91