УДК 517.544

Л. Н. Грибняк, Н. Я. Тихоненко

К приближенному решению одной трехэлементной краевой задачи со сдвигом и ее приложений

1. Настоящая работа посвящена обоснованию метода наименьших квадратов и метода Бубнова — Галеркина приближенного решения трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана специального вида, заданной на вещественной оси $\mathbb{R}$ и состоящей в следующем: найти функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, по краевому условию

$$(KF)(x) \equiv A(x) F^+(x) + B(x) F^+(-x) + C(x) F^-(x) = H(x), \quad x \in \dot{\mathbb{R}}, \qquad (1)$$

где $F^\pm(x)$ — краевые значения функций $F^\pm(z)$ соответственно; F — вектор-функция, $F = \{F^+(x), F^-(x)\}$; функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, на сомкнутой вещественной оси; $H(x) \in L_{2\rho}(\dot{\mathbb{R}}) = L_{2\rho}$, $\rho(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Очевидно, что сдвиг $\alpha(x) = -x$ удовлетворяет условию Карлемана $\alpha[\alpha(x)] = x$, является обратным и $\alpha'(x) = -1 \neq 0$. Обозначим $\Delta(x) = A(-x) \times C(x)$ и $\varkappa = \operatorname{ind} \Delta(x)$. Тогда согласно [1] при данных предположениях относительно коэффициентов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и правой части $H(x)$ в случае $\Delta(x) \neq 0$ задача (1) нетерова и при $\varkappa = 0$ имеет единственное решение $F^\pm(x) \in L_{2\rho}$, что в дальнейшем и будем предполагать.

Отметим, что к нахождению решений задачи (1) сводится широкий круг задач теории упругости и теории диффузии (см., например, [2, 3]). Как известно [1], в общем случае задача (1) неразрешима в замкнутом виде. Поэтому обоснование методов ее приближенного решения является актуальной задачей. Отметим при этом, что авторам не известны работы, посвященные данному вопросу.

Приближенное решение задачи (1) будем искать в виде*

$$F_n^{\pm}(x) = \pm\,\alpha_0\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{\pm}\varphi_k^{\pm}(x), \tag{2}$$

где α_0, $\alpha_k^{\pm}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению,

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_k^{\pm}(x) = (x \pm ik)^{-1}, \quad k \in N. \tag{3}$$

Очевидно, что функции (3) имеют следующие свойства:

$$\varphi_k^{\pm}(-x) = -\varphi_k^{\mp}(x), \tag{4}$$

$$\overline{\varphi_k^{+}} = \varphi_k^{-}(x), \quad \overline{\varphi_k^{-}(x)} = \varphi_k^{+}(x). \tag{5}$$

Символом $\mathfrak{L}_{2\rho}(\mathbb{R}) = \mathfrak{L}_{2\rho}$ обозначим пространство вектор-функций $F = \{F^{+}(x),\ F^{-}(x)\}$, $F^{\pm}(x) \in L_{2\rho}$. Норму элемента $F \in \mathfrak{L}_{2\rho}$ введем следующим образом: $\|F\|_{\mathfrak{L}_{2\rho}} = \|F^{+}(x)\|_{L_{2\rho}} + \|F^{-}(x)\|_{L_{2\rho}}$. Тогда согласно [5] система функций (3) полная в пространстве $\mathfrak{L}_{2\rho}$. Отметим, что согласно [1] линейный оператор K, определяемый равенством (1), при данных предположениях относительно функций $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)$ действует из пространства $\mathfrak{L}_{2\rho}$ в пространство $L_{2\rho}$, ограничен, нормально разрешим и имеет ограниченный обратный оператор $K^{-1}: L_{2\rho} \to \mathfrak{L}_{2\rho}$.

2. Метод наименьших квадратов. Согласно [6] неизвестные коэффициенты α_0, $\alpha_k^{\pm}$ находим из условия достижения минимума функционала $I = \|H(x) - (KF_n)(x)\|_{L_{2\rho}}^2$, где $F_n = \{F_n^{+}(x),\ F_n^{-}(x)\}$. Отсюда, учитывая свойства (4), (5), для определения неизвестных коэффициентов α_0, $\alpha_k^{\pm}$ получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\alpha_0 a_{00} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{+} a_{k0} + \alpha_k^{-} b_{k0}) = h_0,\\ \alpha_0 a_{0j}^{\pm} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{+} a_{kj}^{\pm} + \alpha_k^{-} b_{kj}^{\pm}) = h_j^{\pm}, \quad j = \overline{1,\ n},\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}a_{00} = (A + B - C,\ \overline{A + B - C}), \quad a_{k0} = (A\varphi_k^{+} - B\varphi_k^{-},\ \overline{A + B - C}),\\ b_{k0} = (C\varphi_k^{-},\ \overline{A + B - C}), \quad h_0 = (H,\ \overline{A + B - C}), \quad a_{0j}^{+} = (A + B - C,\\ \overline{A\varphi_j^{+} - B\varphi_j^{-}}), \quad a_{kj}^{+} = (A\varphi_k^{+} - B\varphi_k^{-},\ \overline{A\varphi_j^{+} - B\varphi_j^{-}}), \quad b_{kj}^{+} = (C\varphi_k^{-},\ \overline{A\varphi_j^{+} - B\varphi_j^{-}}),\\ h_j^{+} = (H, \overline{A\varphi_j^{+} - B\varphi_j^{-}}), \quad a_{0j}^{-} = (A + B - C,\ \overline{C\varphi_j^{-}}), \quad a_{kj}^{-} = (A\varphi_k^{+} - B\varphi_k^{-}, \overline{C\varphi_j^{-}}),\\ b_{kj}^{-} = (C\varphi_k^{-}, \overline{C\varphi_j^{-}}), \quad h_j^{-} = (H,\ \overline{C\varphi_j^{-}}), \quad k = \overline{1,\ n}, \quad j = \overline{1,\ n}.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь и ниже $(f,\ g)$ означает скалярное произведение элементов $f(x)$, $g(x) \in L_{2\rho}$, т. е. $(f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1} \cdot f(x) \cdot \overline{g}(x)\, dx$.

---

*В самом деле, функции $F^{\pm}(z)$ представимы в виде

$$F^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - z}\, dx, \quad z \in D^{\pm},$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная плотность, удовлетворяющая условию $\varphi(\infty) \neq 0$. Тогда согласно [4] $F^{\pm}(\infty) = \pm\frac{1}{2}\varphi(\infty)$.

Согласно [6] система (6) разрешима при любых n и имеет единственное решение. Установим теперь сходимость приближенного решения $F_n = \{F_n^+(x),\ F_n^-(x)\}$ задачи (1) к ее точному решению $F = \{F^+(x),\ F^-(x)\}$. Согласно [1] при данных предположениях относительно функций $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)$ линейный оператор K, определяемый равенством (1), действует из пространства $\mathfrak{L}_{2\rho}$ в пространство $L_{2\rho}$, ограничен, нормально разрешим и имеет ограниченный обратный оператор $K^{-1}: L_{2\rho} \to \mathfrak{L}_{2\rho}$. Тогда согласно теореме 3.4 работы [6] следует оценка

$$\| F - F_n \|_{\mathfrak{L}_{2\rho}} \leqslant \| K \| \| K^{-1} \| E_n(F)_{\mathfrak{L}_{2\rho}}, \tag{8}$$

где $E_n(F)_{\mathfrak{L}_{2\rho}}$ — наилучшее приближение решения $F = \{F^+(x),\ F^-(x)\}$ задачи (1) агрегатами вида $F_n = \{F_n^+(x),\ F_n^-(x)\}$; при этом $F_n^\pm(x)$ имеют вид (2). Согласно [7] $E_n(F)_{\mathfrak{L}_{2\rho}} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. при $n \to \infty$ $\| F - F_n \|_{\mathfrak{L}_{2\rho}} \to 0$. Из определения нормы в пространстве $\mathfrak{L}_{2\rho}$ следует

$$\| F^\pm(x) - F_n^\pm(x) \|_{L_{2\rho}} \leqslant \| K \| \| K^{-1} \| E_n(F)_{\mathfrak{L}_{2\rho}} \tag{9}$$

и $\| F^\pm(x) - F_n^\pm(x) \|_{L_{2\rho}} \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $A(x)$, $B(x)$, $C(x) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, $H(x) \in L_{2\rho}$, $\Delta(x) \neq 0$, $\varkappa = 0$. *Тогда система* (6) *разрешима при всех n и приближенное решение $F_n^\pm(x)$ задачи* (1) *при $n \to \infty$ стремится к ее точному решению $F^\pm(x)$ по метрике пространства $L_{2\rho}$.*

Теорема 2. *Пусть функции* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, $\Delta(x) \neq 0$, $\varkappa = 0$. *Тогда система* (6) *разрешима при всех n и приближенное решение $F_n^\pm(x)$ задачи* (1) *стремится в пространстве $L_{2\rho}$ к ее точному решению $F^\pm(x)$ со скоростью*

$$\| F^\pm(x) - F_n^\pm(x) \|_{L_{2\rho}} \leqslant d_1 (\ln \sigma / \sigma)^\lambda. \tag{10}$$

Здесь и ниже d_i — вполне определенные постоянные, не зависящие от n,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} k (1 + k^2)^{-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Так как функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ, $0 < \lambda < 1$, на сомкнутой вещественной оси, то согласно [1, 4] решение $F^\pm(x)$ задачи (1) также удовлетворяет условию Гельдера с показателем λ, $0 < \lambda < 1$, на сомкнутой вещественной оси, а следовательно, $F^\pm(x) \in L_{2\rho}$, $F = \{F^+(x),\ F^-(x)\} \in \mathfrak{L}_{2\rho}$. Тогда линейный оператор K, определяемый равенством (1), действует из пространства $\mathfrak{L}_{2\rho}$ в пространство $L_{2\rho}$, ограничен и нормально разрешим и имеет ограниченный обратный оператор $K^{-1}: L_{2\rho} \to \mathfrak{L}_{2\rho}$. Так как $E_n(F)_{\mathfrak{L}_{2\rho}} \leqslant \sqrt{\pi} E_n(F)$, где $E_n(F)$ — наилучшее приближение решения $F = \{F^+(x),\ F^-(x)\}$ задачи (1) агрегатами вида $F_n = \{F_n^+(x),\ F_n^-(x)\}$, $F_n^\pm(x)$ имеют вид (2) в пространстве непрерывных функций на сомкнутой вещественной оси. Известно [7], что $E_n(F) \to 0$ при $n \to \infty$. При этом согласно работе [8] $E_n(F) \leqslant d_2 (\ln \sigma / \sigma)^\lambda$, где σ определено равенством (11). Используя этот факт, на основании оценки (9) получаем оценку (10).

3. Метод Бубнова — Галеркина. Согласно [6] неизвестные коэффициенты α_0, $\alpha_k^\pm$ определяем из системы уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_0 a_{00} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^+ a_{k0} + \alpha_k^- b_{k0}) &= h_0, \\ \alpha_0 a_{0j}^\pm + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^+ a_{kj}^\pm + \alpha_k^- b_{kj}^\pm) &= h_j^\pm, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$a_{00}=(A+B-C,1),\quad a_{k0}=(A\varphi_k^+-B\varphi_k^-,1),\quad b_{k0}=(C\varphi_k^+,1),\quad h_0=(H,1),$$
$$a_{0j}^{\pm}=(A+B-C,\varphi_j^{\pm}),\quad a_{kj}^{\pm}=(A\varphi_k^+-B\varphi_k^-,\varphi_j^{\pm}),\quad b_{kj}^{\pm}=(C\varphi_k^-,\varphi_j^{\pm}),$$
$$h_j^{\pm}=(H,\varphi_j^{\pm}),\quad j=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Установим теперь разрешимость системы (12) и определим скорость сходимости приближенного решения $F_n=\{F_n^+(x),F_n^-(x)\}$ задачи (1) к ее точному решению $F=\{F^+(x),F^-(x)\}$. Ясно, что система (12) в смысле разрешимости эквивалентна уравнению

$$P_nKF_n=P_nH,\quad F_n\in\mathfrak{L}_{2\rho},\quad H\in L_{2\rho}, \tag{14}$$

т. е. система (12) и уравнение (14) одновременно разрешимы или нет. Здесь P_n — оператор проектирования пространства $L_{2\rho}$ на подпространство, содержащееся в $L_{2\rho}$ и имеющее своим базисом систему функций (3). Очевидно, что $P_n^2=P_n$ и $\|P_n\|=1$. Поскольку оператор P_n обладает свойством $P_n^2=P_n$, то для разрешимости уравнения (14) достаточно показать выполнимость условий I и II работы [9]. Так как оператор $\tilde{K}=P_nK$, то условие I выполняется с $\varepsilon_1^{(n)}=0$. Для любого элемента $F_n=\{F_n^+(x),F_n^-(x)\}$, принадлежащего $\mathfrak{L}_{2\rho}$, элемент $KF_n\in L_{2\rho}$. Так как система функций (3) полна в $L_{2\rho}$, то элемент KF_n при достаточно больших n сколь угодно близко приближается отрезком ряда Фурье по системе функций (3) в пространстве $L_{2\rho}$, т. е. в условии II $\varepsilon_2^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$. Так как оператор K нормально разрешим и имеет ограниченный обратный оператор K^{-1}, то на основании теоремы 1 работы [9] уравнение (14), а вместе с ним и система (12) будут разрешимы при достаточно больших n. Кроме того, на основании теоремы 5 работы [9] следует $\|F-F_n\|_{\mathfrak{L}_{2\rho}}\to 0$ при $n\to\infty$. Учитывая определение нормы в пространстве $\mathfrak{L}_{2\rho}$ немедленно получаем $\|F^{\pm}(x)-F_n^{\pm}(x)\|_{L_{2\rho}}\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функции* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)\in H_\lambda$, $0<\lambda<1$, $H(x)\in L_{2\rho}$, $\Delta(x)\neq 0$, $\varkappa=0$. *Тогда система* (12) *разрешима при достаточно больших* n *и приближенное решение* $F_n^{\pm}(x)$ *задачи* (1) *при* $n\to\infty$ *стремится к ее точному решению* $F^{\pm}(x)$ *по метрике пространства* $L_{2\rho}$.

Теорема 4. *Пусть функции* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)\in H_\lambda$, $0<\lambda<1$, $\Delta(x)\neq 0$, $\varkappa=0$. *Тогда система* (12) *разрешима при всех* n, *удовлетворяющих условию*

$$d_3(\ln\sigma/\sigma)^{\lambda}<1, \tag{15}$$

а приближенное решение $F_n^{\pm}(x)$ *задачи* (1) *стремится к ее точному решению* $F^{\pm}(x)$ *в пространстве* $L_{2\rho}$ *со скоростью*

$$\|F^{\pm}(x)-F_n^{\pm}(x)\|_{L_{2\rho}}\leqslant d_4(\ln\sigma/\sigma)^{\lambda}. \tag{16}$$

Доказательство. Как и в случае теоремы 3 условие I работы [9] выполняется с $\varepsilon_1^{(n)}=0$. На основании работы [8] условие II работы [9] выполняется с $\varepsilon_2^{(n)}=d_5(\ln\sigma/\sigma)^{\lambda}$. Так как оператор K нормально разрешим, ограничен и имеет ограниченный обратный оператор K^{-1}, то согласно теореме 1 работы [9] уравнение (14), а вместе с ним и система (12) разрешимы при всех n, удовлетворяющих неравенству (15). Тогда на основании теоремы 5 работы [9] следует оценка $\|F-F_n\|_{\mathfrak{L}_{2\rho}}\leqslant d_6(\ln\sigma/\sigma)^{\lambda}$, откуда и получаем оценку (16).

Замечание. Если $H(x)\in L_2(\mathbb{R})=L_2$, то в (2) необходимо положить $\alpha_0=0$. При этом порядки систем (6) и (12) понизятся на единицу и будут справедливы теоремы 1—4.

4. Если функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x)$ рациональные, то коэффициенты (7), (13) вычисляются элементарно с помощью теории вычетов. В общем случае для вычисления коэффициентов (7) и (13) необходимо привлечь приближенные методы, например, работы [10]. Согласно [10], если функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H(x) \in H_\lambda^{(r)}$, $0 < \lambda \leqslant 1$, $r \geqslant 0$, то коэффициенты (7) и (13) по известным квадратурным формулам вычисляются с точностью $\eta_n = d_7 n^{-r-\lambda}$. Тогда на основании результатов § 5 гл. 1 работы [9] об устойчивости и обусловленности прямых методов решения линейных уравнений получим, что приближенные системы, соответствующие системам (6) и (12), с коэффициентами (7) или (13), вычисленными приближенно, разрешимы одновременно с системами (6) и (12) соответственно, а также имеет место сходимость приближенных решений задачи (1) к ее точным решениям по метрике пространства $L_{2\rho}$. При этом на основании теоремы 11 работы [9], если выполнены условия теоремы 2, то система (6) с приближенно вычисленными коэффициентами (7) разрешима при всех n и справедлива оценка погрешности приближенного решения задачи (1)

$$\| F^{\pm}(x) - F_n^{\pm}(x) \|_{L_{2\rho}} \leqslant d_1 (\ln \sigma/\sigma)^{\lambda} + d_8 n^{-\lambda}.$$

Если же выполнены условия теоремы 4, то система (12) с приближенно вычисленными коэффициентами (13) разрешима при всех n, удовлетворяющих условию (15), и справедлива следующая оценка погрешности приближенного решения задачи (1):

$$\| F^{\pm}(x) - F_n^{\pm}(x) \|_{L_{2\rho}} \leqslant d_4 (\ln \sigma/\sigma)^{\lambda} + d_9 n^{-\lambda}.$$

5. В приложениях [2, 3] часто встречается уравнение

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [k(x-t) + n(x+t)] f(t)\, dt = h(x), \quad x \geqslant 0. \tag{17}$$

Согласно [11] уравнение (17) сводится к краевой задаче

$$F^{+}(x)[1 + K(x)] + N(x) F^{+}(-x) - F^{-}(x) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

где $K(x)$, $N(x)$, $H(x)$, $F^{\pm}(x)$ — преобразования Фурье* соответственно функций $k(x)$, $n(x)$, $h(x)$, $f_{\pm}(x)$,

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0; \\ -f(x), & x < 0. \end{cases}$$

Задача (18) совпадает с задачей (1). Предположим, что $K(x)$, $N(x) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, $H(x) \in L_{2\rho}$, $1 + K(-x) \neq 0$, $\varkappa = \operatorname{ind}[1 + K(-x)] = 0$. Тогда задача (18) нормально разрешима и имеет единственное решение $F^{\pm}(x) \in L_{2\rho}$. Приближенное решение задачи (18) строим по схемам п. 2 или п. 3. Чтобы построить приближенное решение уравнения (17), необходимо найти приближенное решение $F_n^{+}(x)$ задачи (18), затем, применив к $F_n^{+}(x)$ обратное преобразование Фурье, найти приближенное решение $f_n(x)$ уравнения (17). В силу равенства Парсеваля будет справедлива оценка вида

$$\| f(x) - f_n(x) \| \leqslant d_8 (\ln \sigma/\sigma)^{\lambda}.$$

---

* Преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$ называется интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{ixt} dt,$$

при этом

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\, e^{-ixt} dt.$$

Здесь и ниже прописными буквами обозначены преобразования Фурье заданных функций.

В работе [12] рассмотрено уравнение

$$\lambda f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [k_1(x-t) + k_2(x+t)] f(t)\, dt + \mu \overline{f(x)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [k_3(x-t) + k_4(x+t)] \overline{f(t)}\, dt = h(x), \quad x \geqslant 0, \tag{19}$$

которое сводится к краевой задаче

$$[\lambda + K_1(x)] F^+(x) + K_2(x) F^+(-x) + [\mu + K_3(x)] \overline{F^+(-x)} +$$

$$+ K_4(x) \overline{F^+(x)} - F^-(x) = H(x) \quad x \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где λ, μ — постоянные. Если $K_1(x)$, $K_2(x)$, $K_3(x)$, $K_4(x) \in H_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, $H(x) \in L_{2\rho}$ и выполнено условие нетеровости задачи (20) $\Delta(x) = [\lambda + K_1(x)] \times \times [\bar{\lambda} + \overline{K_1(-x)}] - [\mu + K_3(x)] [\bar{\mu} + \overline{K_3(-x)}] \neq 0$, $\varkappa = \operatorname{ind} \Delta(x) = 0$, то приближенные решения задачи (20) и уравнения (19) можно построить по предложенным схемам.

1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
2. *Баблоян А. А.* О двух интегральных уравнениях, встречающихся в теории упругости / Изв. АН АрмССР. Механика.— 1966.— 19, № 1.— С. 3—7.
3. *Соболев В. В.* Диффузия излучения в среде с зеркально отражающей границей // Докл. АН СССР.— 1961.— 136, № 3.— С. 571—574.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 382 с.
6. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 288 с.
7. *Джрбашян М. М., Мергелян С. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями // Докл. АН СССР.— 1954.— 99, № 5.— С. 673—675.
8. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения.— Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1979.— 174 с.
9. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.— Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980.— 232 с.
10. *Онегов Л. А.* Дробно-рациональная аппроксимация сингулярных интегралов на действительной оси // Изв. вузов. Математика.— 1976.— № 3.— С. 43—55.
11. *Беркович Ф. Д.* Об одном интегральном уравнении на полуоси // Там же.— 1966.— № 1.— С. 3—14.
12. *Комяк И. И.* Об одном интегральном уравнении на полуоси // Докл. АН БССР.— 1969.— 13, № 3.— С. 197—201.

Одес. ун-т

Получено 22.03.85