УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко (Киев. ун-т)

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, ПОСТРОЕННОГО ПО ГРУППЕ*

This work contains an attempt to construct a differential operator from the admissible group in the space $L_2(\mathbb{R}^m, P)$ and to study its properties.

Зроблена спроба побудови диференціального оператора за припустимою групою у просторі $L_2(\mathbb{R}^m, P)$ та вивчення його властивостей.

Одним из основных объектов стохастического анализа является оператор стохастического дифференцирования, который определяется как замыкание оператора дифференцирования гладких функций вдоль допустимых сдвигов исходной меры. В данной работе сделана попытка построения аналогичного оператора и изучения его свойств в случае, когда на исходном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), P)$ действует допустимая группа. Построением дифференциальных операторов по группам занимались А. А. Дороговцев [1], О. Г. Смолянов [2].

Определение 1. *Борелевское отображение* $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *называется допустимым, если* $P T^{-1} \ll P$.

Определение 2. *Семейство допустимых отображений* $\{T(t,\cdot)|\ t\in\mathbb{R}^m\}$ *назовем допустимой группой, если* 1) $T(0,\cdot)$ — *тождественный оператор*; 2) $T(t, T(s,\cdot)) = T(t+s,\cdot)$.

Определение 3. *Функцию* $f\in L_2(\mathbb{R}^m, P)$ *назовем дифференцируемой по допустимой группе* T, *если существует такое* $g\in L_2(\mathbb{R}^m, P)\otimes\mathbb{R}^m$, *что*

1) *существует окрестность нуля* $U\subset\mathbb{R}^m$ *такая, что* $f(T(t,\cdot))\in\in L_2(\mathbb{R}^m, P)$, $t\in U$;

2) $\langle g, t\rangle = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f(T(\alpha t,\cdot)) - f(\cdot)}{\alpha}$, $t\in U$,

где предел рассматривается в $L_2(\mathbb{R}^m, P)$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *обозначает скалярное произведение в* $\mathbb{R}^m$.

Назовем g производной f по группе T и будем обозначать $g = Df$.

Рассмотрим примеры действия следующих групп на $\mathbb{R}^m$.

***Пример* 1.** Группа сдвигов: $T(t,x) = t+x$.

***Пример* 2.** Пусть $h_1,\ldots,h_m$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$, причем

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}} h_k(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} h_k(x) < \infty, \quad k = 1,\ldots,m.$$

Положим $T(t,x) = (x_1(t_1),\ldots,x_m(t_m))$, где $x_k(t_k)$ — значение в момент t_k решения задачи Коши

$$x_k'(t) = h_k(x_k(t)),$$
$$h_k(0) = x_k.$$

***Пример* 3.** Вращения и сжатия в $\mathbb{R}^2$.

* Частично поддержана Международной Соросовской программой поддержки просвещения в области точных наук (ISSEP) (грант № GSU041053).

Пусть $i\colon (x_1, x_2) \to (r(x), \varphi(x))$ — отображение, ставящее в соответствие точке $x = (x_1, x_2)$ ее полярные координаты $(r(x), \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ определено с точностью до $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Положим $T((t_1, t_2), (x_1, x_2)) = i^{-1}(e^{t_1} r(x), t_2 + \varphi(x))$.

Если исходная мера P эквивалентна мере Лебега λ^m на $\mathbb{R}^m$, то группы в примерах 1–3 являются допустимыми, и оператор дифференцирования D на классе $\mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$ гладких финитных функций действует как $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$, $\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, h_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$, $\left(r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$ в примерах 1–3 соответственно.

Предположим, что допустимая группа T удовлетворяет условиям

$$
\begin{gathered}
T(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m), \\
T(\cdot, x) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m), \quad x \in \mathbb{R}^m.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Тогда оператор дифференцирования D, построенный по T, имеет следующие свойства:

1. Если $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi \in \mathcal{D}(D)$ и

$$
(D\varphi)(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) \left.\frac{\partial T(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0}.
$$

2. Если $f \in \mathcal{D}(D)$, $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$, то

$$
\varphi f \in \mathcal{D}(D), \quad D(\varphi f) = \varphi D f + f \mathcal{D}\varphi.
$$

3. Если $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(D)$ такие, что

$$
(f_1 - f_2)\chi_U = 0 \,(\operatorname{mod} P),
$$

то

$$
(D f_1 - D f_2)\chi_U = 0 \,(\operatorname{mod} P).
$$

Основные результаты. В случае, когда T является группой сдвигов, а $P(dx) = p(x)\,dx$, где $p \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^m)$, замыкание оператора D совпадает с соболевским оператором дифференцирования.

Лемма 1. *Пусть группа T, $T(t, x) = t + x$ является допустимой в $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), p(x)\,dx)$, где $p \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^m)$. Тогда $D \subset \nabla$, где ∇ — замыкание градиента в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m, p(x)dx)$ (с семейства функций $\mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$).*

Замечания. **1.** При условиях леммы мера $p(x)\,dx$ эквивалентна мере Лебега λ^m.

2. Поскольку $\mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}(D)$ (свойство 1), то замыкание D равно ∇.

3. Вообще говоря, оператор D не является замкнутым. Рассмотрим следующий пример. Пусть $m = 1$, $p(x) = e^{x^2}(1 + x^4)^{-1}$, $f(x) = e^{-x^2/2}$. Тогда $f \in \mathcal{D}(\nabla)$, $\nabla f = -x e^{-x^2/2}$, $f \notin \mathcal{D}(D)$, поскольку для любого $t \neq 0$: $f(\cdot + t) \notin L_2(\mathbb{R}^m, p(x)\,dx)$.

Однако, если $p \equiv 1$, T — группа сдвигов, то оператор D является замкнутым.

Лемма 2. *Оператор D, построенный по группе сдвигов в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m)$, замкнут.*

Замечание 4. λ^m не является вероятностной мерой. Под оператором D понимается оператор, построенный аналогично определению 3.

В дальнейшем через D будем обозначать замыкание оператора дифференцирования по группе T.

Теорема 1. *Пусть T удовлетворяет условиям* (1), $P(dx) = p(x)\,dx$, *где* $p \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^m)$, *и*

$$\det \frac{\partial T(t,\cdot)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \neq 0 \pmod P.$$

Тогда оператор D локален, т. е. для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(D)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, из равенства

$$(f_1 - f_2)\chi_\Delta = 0 \pmod P$$

следует

$$(Df_1 - Df_2)\chi_\Delta = 0 \pmod P.$$

Замечание 5. При условиях теоремы оператор дифференцирования, построенный по группе T, допускает замыкание.

Теорема 2. *Пусть $P = \lambda^m$, T удовлетворяет* (1) *и*

$$\det \frac{\partial T(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

$G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое связное множество.

Тогда для любой функции $f \in \mathcal{D}(D)$ такой, что

$$\chi_G Df = 0 \pmod{\lambda^m},$$

существует такое $c \in \mathbb{R}$, что

$$(f - c)\chi_G = 0 \pmod{\lambda^m}.$$

Замечание 6. Теорема 2 остается справедливой, если $P(dx) = p(x)\,dx$, где $p > 0$, $p \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^m)$, а условие (2) заменить на такое: множество $A = \left\{x\colon \det \frac{\partial T(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\right\}$ имеет нулевую меру Лебега и удовлетворяет условию: для каждого открытого связного U множество $U \setminus A$ связно.

T из примера 3 не удовлетворяет (2), однако условия замечания 6 для нее выполняются.

Доказательство результатов. Будем использовать следующие обозначения:

$$\|x\| = \left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m, P)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} f\,dP\right)^{1/2}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^m, P),$$

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^m, P)\otimes\mathbb{R}^m} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} \|g\|^2 dP\right)^{1/2}, \quad g \in L_2(\mathbb{R}^m, P)\otimes\mathbb{R}^m,$$

$$\|f\|_{2,1} = \left(\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m,P)} + \|Df\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m,P)\otimes\mathbb{R}^m}\right)^{1/2}, \quad f \in \mathcal{D}(D).$$

***Доказательство леммы* 1.** Отметим, что действия операторов ∇ и D совпадают на $\mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$, поэтому для доказательства леммы достаточно проверить для любого $f \in \mathcal{D}(D)$ существование последовательности $\{f_n | \ n \geq 1\} \subset \subset \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$ такой, что

$$\|f_n - f\|_{2,1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Условие (3) достаточно проверить для $f \in \mathcal{D}(D)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} f$ ($\operatorname{supp} f$ обозначает топологический носитель меры $|f(x)|^2 p(x)\,dx$), поскольку каждую функцию $f \in \mathcal{D}(D)$ можно приблизить по норме $\|\cdot\|_{2,1}$ функциями из $\mathcal{D}(D)$ с компактными носителями. В качестве такой последовательности можно взять, например, $\{\varphi_n f | \ n \geq 1\}$, где

$$\varphi_n \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m); \quad \|(\nabla\varphi_n)(x)\| \leq 1, \quad |\varphi_n(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^m;$$

$$(\varphi_n - 1)\chi_{\{\|x\| \leq n\}} = 0.$$

Пусть $\{\omega_n | \ n \geq 1\} \subset \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp}\omega_n \subset \{\|x\| \leq 1\}$ — такая последовательность, что $\omega_n * g \to g$, $n \to \infty$, в $L_2(\mathbb{R}^m)$ для любого $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$.

Тогда для каждого $f \in \mathcal{D}(D)$ с компактным носителем:

$$\omega_n * f \to f, \ \ n \to \infty, \ \ \text{в} \ \ L_2(\mathbb{R}^m, p(x)\,dx),$$

$$D(\omega_n * f) = \omega_n * Df \to Df, \ \ n \to \infty, \ \ \text{в} \ \ L_2(\mathbb{R}^m, p(x)\,dx) \otimes \mathbb{R}^m.$$

Здесь использовался тот факт, что из сходимости в $L_2(\mathbb{R}^m)$ функций с носителем в общем компакте следует сходимость и в пространстве $L_2(\mathbb{R}^m, p(x)\,dx)$, так как p — непрерывна.

Поскольку $\omega_n * f \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$, то лемма 1 доказана.

***Доказательство леммы* 2** проведем для случая $m = 1$. (Случай $m > 1$ рассматривается аналогично.)

Из леммы 1 следует, что для доказательства достаточно проверить, что для всех $f \in \mathcal{D}(\nabla)$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(t+\cdot) - f(\cdot)}{t} - \nabla f \right\|_{L_2(\mathbb{R}^m)} = 0.$$

Из свойств соболевских пространств [3] следует существование функции $\tilde{f} = f$, λ-п. н. такой, что

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(0) + \int_0^x (\nabla f)(s)\,ds.$$

Рассмотрим семейство операторов $\{A_t | \ t > 0\} \subset \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$:

$$(A_t g)(x) = \frac{1}{t}\int_x^{x+t} g(s)\,ds.$$

Заметим, что $A_t \xrightarrow{s} \mathbb{1}$, $t \to 0$. Действительно, для любой $g \in C_0(\mathbb{R})$

$$\| A_t g - g \|_{L_2(\mathbb{R})} \to 0, \quad t \to 0,$$

и $\sup\limits_{t>0} \| A_t \| \le 1 < \infty$, поскольку для всех $g \in L_2(\mathbb{R})$

$$\| A_t g \|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t} \int\limits_x^{x+t} g(s)\, ds \right)^2 dx \le \frac{1}{t} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_x^{x+t} g^2(s)\, ds\, dx =$$

$$= \frac{1}{t} \int\limits_{\mathbb{R}} g^2(s) \int\limits_{s-t}^{s} dx\, ds = \int\limits_{\mathbb{R}} g^2(s)\, ds = \| g \|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Поэтому для $f(x) = f(0) + \int_0^x (\nabla f)(s)\, ds$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(t + \cdot) - f(\cdot)}{t} - \nabla f \right\|_{L_2(\mathbb{R})} = \lim_{t \to 0} \| A_t \nabla f - \nabla f \|_{L_2(\mathbb{R})} = 0,$$

значит, D — замкнут. Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Для доказательства достаточно показать, что для каждого $x \in \mathbb{R}^m$, $\det \left. \dfrac{\partial T(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} \ne 0$ существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}^m$, $x \in U$, такое, что

$$(Df_1 - Df_2)\chi_{\Delta \cap U} = 0 \ (\mathrm{mod}\, p(x)\, dx).$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\det \left. \dfrac{\partial T(t, x_0)}{\partial t} \right|_{t=0} \ne 0$ фиксировано. Отображение $\psi: t \to T(t, x_0)$ устанавливает диффеоморфизм между некоторыми окрестностями V_0, V_{x_0} точек 0 и x_0 соответственно, причем оператор

$$A: L_2(V_{x_0}, p(x)\, dx) \to L_2(V_0, q(t)\, dt),$$

$$q(t) = p(\psi(t)) \left| \det \frac{d\psi}{dt} \right|, \quad (Af)(t) = f(\psi(t)), \quad t \in V_0,$$

является унитарным.

Заметим, что в случае, когда $x \in V_{x_0}$, $\psi^{-1}(T(t, x)) = t + \psi^{-1}(x)$ для малых t. Аналогично лемме 1 можно показать, что для любой $f \in \mathcal{D}(D)$, $\mathrm{supp} f \subset V_{x_0}$: $ADf = \nabla A f$, где ∇ — замыкание градиента в пространстве $L_2(V_0, q(t)\, dt)$.

Известно [4], что ∇ локален в $L_2(V_0, q(t)\, dt)$. Поэтому теорема доказана в случае, когда $\mathrm{supp}(f_1 - f_2) \subset V_{x_0}$. Действительно, из

$$(ADf_1 - ADf_2)\chi_{V_0 \cap \psi^{-1}(\Delta)} = 0 \ (\mathrm{mod}\, q(t)\, dt)$$

следует

$$(Df_1 - Df_2)\chi_{V_{x_0} \cap \Delta} = 0 \ (\mathrm{mod}\, p(x)\, dx).$$

Если же $\mathrm{supp}(f_1 - f_2) \not\subset V_{x_0}$, то, применив аналогичные рассуждения к функции $(f_1 - f_2)\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(V_{x_0})$, $(\varphi - 1)\chi_U = 0$, для некоторого открытого U, $x_0 \in U \subset V_{x_0}$, и свойство 2 (оно, очевидно, справедливо и для замыкания оператора дифференцирования по группе), получим

$$0 = \chi_{\Delta\bigcap U} D(\varphi \cdot (f_1 - f_2)) = \chi_{\Delta\bigcap U}((f_1 - f_2) D\varphi + \varphi D(f_1 - f_2)) =$$
$$= \chi_{\Delta\bigcap U} \cdot \varphi \cdot (Df_1 - Df_2) = \chi_{\Delta\bigcap U}(Df_1 - Df_2).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Множество G является открытым и связным в $\mathbb{R}^m$, а значит, и линейно связным в $\mathbb{R}^m$, т. е. любые две точки x, y из G можно соединить непрерывной кривой, лежащей в G, следовательно, для доказательства теоремы достаточно проверить, что для каждого $x_0 \in G$ существует открытое связное множество U, $x_0 \in U \subset G$ и число $c \in \mathbb{R}$ такие, что

$$(f - c)\chi_U = 0 \ (\mathrm{mod}\, \lambda^m).$$

Пусть $x_0 \in G$ фиксировано. Аналогично доказательству теоремы 1 построим диффеоморфизм $\psi\colon V_0 \to V_{x_0}$, $V_{x_0} \subset G$, операторы A и ∇.

Пусть $\varphi \in \mathbb{C}_0^1(V_{x_0})$, $U \subset V_{x_0}$ такое, что $(\varphi - 1)\chi_U = 0$, где $x_0 \in U \subset \subset V_{x_0}$, $\psi^{-1}(U)$ — открытый шар. Тогда

$$\chi_U D(\varphi f) = \chi_U f D\varphi + \chi_U \varphi Df = 0$$

и, следовательно,

$$\chi_{\psi^{-1}_{(U)}} \nabla A(\varphi f) = 0.$$

Функция q отделена от 0 и ∞ на V_0, поэтому пространство Соболева $W_2^1(V_0, q(t)\,dt)$ совпадает с пространством $W_2^1(V_0)$, и для всякой функции $g \in W_2^1(V_0, q(t)\,dt)$ справедливо неравенство Пуанкаре [5]

$$\int\limits_{\psi^{-1}(U)} g^2 d\lambda^m \le K\left(\int\limits_{\psi^{-1}(U)} \|\nabla g\|^2 d\lambda^m + \frac{1}{\lambda^m(\psi^{-1}(U))}\left(\int\limits_{\psi^{-1}(U)} g\, d\lambda^m\right)^2\right), \quad (4)$$

где постоянная K не зависит от g.

Подставив $g = A(\varphi f) - \int_{\psi^{-1}(U)} A(\varphi f)\, d\lambda^m$ в неравенство (4), получим

$$g\chi_{\psi^{-1}(U)} = 0, \quad A^{-1}\big(g\chi_{\psi^{-1}(U)}\big) = \left(\varphi f - \int\limits_{\varphi^{-1}(U)} A(\varphi f)\, d\lambda^m\right)\chi_U = 0.$$

Теорема 2 доказана.

1. *Dorogovtsev A. A.* An approach to the stochastic calculus in the non-Gaussian case // J. Appl. Math. and Stochast. Anal. – 1995. – **8**, № 4. – P. 361–370.
2. *Smolyanov O. G.* Differentiable measures on the group of functions taking values in a compact Lie group / Abstrs VI Intern. Vilnius Conf. Probab. Theory and Math. Statistics. – Vilnius, 1993. – P. 139–140.
3. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
4. *Пилипенко А. Ю.* О локальности операторов, заданных на пространстве интегрируемых в квадрате функций // Математика сегодня, 95 / Под ред. А. Я. Дороговцева. – Киев: Выща шк., 1996. – С. 1–11.
5. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. – М.: Гостехиздат, 1951. – 544 с.

Получено 09.03.95