УДК 512.544

А. В. ТУШЕВ, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Нетеровы модули над абелевыми группами конечного свободного ранга

Доказано, что если M — нетеров JG-модуль, где G — абелева группа конечного свободного ранга, и либо $J = \mathbb{Z}$, либо $J = F\langle t\rangle$, где F — конечное поле, $\langle t\rangle$ — бесконечная циклическая группа, то модуль M принадлежит классу $\mathfrak{U}(J, \pi)$ для конечного множества π в смысле Ф. Холла.

Доведено, що якщо M — нетерів JG-модуль, де G — абелева група скінченного вільного рангу, та або $J = \mathbb{Z}$, або $J = F\langle t\rangle$, де F — скінченне поле, $\langle t\rangle$ — нескінченна циклічна група, то модуль M належить до класу $\mathfrak{U}(J, \pi)$ для скінченної множини π у сенсі Ф. Холла.

Пусть J — кольцо главных идеалов, $\sigma(J)$ — множество всех его простых неассоциированных элементов и $\pi \subseteq \sigma(J)$. J-модуль M принадлежит классу $\mathfrak{U}(J, \pi)$, если существует свободный подмодуль $V \leqslant M$ такой, что модуль M/V будет π-периодическим [1]. В дальнейшем будем предполагать, что либо $J = \mathbb{Z}$, либо $J = F\langle t\rangle$ — групповая алгебра бесконечной циклической группы $\langle t\rangle$ над конечным полем F.

В теореме 3.3 работы [2] показано, что если M — нетеров JG-модуль, где G — нильпотентная группа конечного свободного ранга, а J — ранг модуля M бесконечен, то почти для всех элементов $u \in \sigma(J)$ факторы M/Mu бесконечны. Если группа полициклическая, то эта теорема является простым следствием более сильного утверждения работы [1] о том, что $M \in \mathfrak{U}(J, \pi)$ для конечного множества π. В связи с этим естественно возникает вопрос: будет ли нетеров JG-модуль над нильпотентной группой G конечного свободного ранга принадлежать классу $\mathfrak{U}(J, \pi)$ для конечного множества π? Как показано в данной работе, это предположение верно в случае, когда группа G абелева.

В статье используются стандартные обозначения [3]. Если M — K-модуль и $G \subseteq M$, то $K[G]$ будет обозначать K-подмодуль, порожденный множеством G. Нетрудно заметить, что если M — коммутативное кольцо, K — его подкольцо множество G замкнуто относительно умножения, то $K[G]$ — подкольцо кольца M.

Л е м м а 1. *Пусть L — расширение поля F, $G \leqslant L^*$, причем $F^* \leqslant G$ и $|G/F^*| = l$ не делится на характеристику поля F. Если поле F содержит первообразные корни из единицы по всем простым числам, делящим l, то $[F(G) : F] = l$.*

Доказательство проведем индукцией по l. Пусть $|G/F^*| = q$ — простое число, тогда $G/F^* = \langle \bar{g} \rangle$ и $g^q = a \in F$. Если $G^q = (F^*)^q$, то $a \in (F^*)^q$. Но в этом случае, так как F содержит первообразный корень из 1 степени q, то F содержит все корни из a степени q, в частности $g \in F$, что невозможно. Таким образом $G^q \neq (F^*)^q$ и, следовательно, $|G^q : (F^*)^q| = q$. Тогда из [3] (гл. VIII, теорема 13) следует, что $[F(G) : F] = |G^q : (F^*)^q| = q$.

Пусть $\bar{g}$ — элемент простого порядка q из G/F^* и $F_1 = F(g)$. Тогда, как показано выше, $[F_1 : F] = q$. Предположим, что в $(G/F^*) \cap (F_1^*/F^*)$ существует элемент $\bar{g}_1$ простого порядка q_1 отличный от $\bar{g}$. Положим $m = qq_1$, если $q \neq q_1$, и $m = q$, если $q = q_1$, и пусть $\bar{G}_1 = \langle \bar{g}, \bar{g}_1 \rangle$, Тогда $|\bar{G}_1| = qq_1$. Так как $F(G_1) = F_1$, то из [3] (гл. VIII, теорема 13) следует, что $|G_1^m : (F^*)^m| = [F(G_1) : F] = [F_1 : F] = q$. Тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ получим $(g \cdot g_1^k)^m = a \in (F^*)^m$. Отсюда с учетом того, что F содержит первообразный корень из 1 степени m, следует, что F содержит все корни из a степени m, и, в частности, $gg_1^k \in F^*$, а это противоречит тому, что $|\bar{G}_1| = qq_1$. Полученное противоречие показывает, что $(G/F^*) \cap (F_1^*/F^*) = \langle \bar{g} \rangle$. Тогда $|G/F_1^*| = l_1$, где $l_1 q = l$ и по предположению индукции $[F(G) : F_1^*] = l_1$, а по теореме о составном конечном расширении [3] $[F(G) : F] = [F(G) : F_1] \cdot [F_1 : F] = l_1 q = l$. Лемма доказана.

Пусть H — подгруппа абелевой группы G. Множество элементов группы G, выбранных по одному из каждого смежного класса группы G по подгруппе H, называется трансверсалью подгруппы H в группе G.

Лемма 2. *Пусть L — расширение поля F, $G \leqslant L^*$, $L = F(G)$, $H = G \cap F^*$, G/H — периодическая группа, $\operatorname{char} F \notin \Pi(G/F^*)$, и F содержит первообразные корни из 1 для всех простых чисел из $\Pi(G/F^*)$. Тогда $L = \bigoplus_{t \in T} Ft$, где T — трансверсаль подгруппы H в группе G.*

Доказательство. Так как $F(G) = L$, то $L = \sum_{t \in T} Ft$. Покажем, что эта сумма прямая. Выберем произвольное конечное подмножество $\{t_1, \ldots, t_n\}$ из трансверсали T, и пусть G_1/F^* — подгруппа из $G \cdot F^*/F^*$, порожденная элементами $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n$, а T_1 — трансверсаль подгруппы F^* в G_1, содержащая элементы $t_1, \ldots, t_n$. Тогда $F(G_1) = \sum_{t \in T_1} Ft$, а так как по лемме 1 $\dim F(G_1) = [F(G_1) : F] = |T_1|$, то элементы $t_1, \ldots, t_n$ линейно независимы над F. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть M — конечнопорожденный $F_1 H$-модуль, где F_1 — локально конечное поле, H — свободная абелева группа конечного ранга. Тогда для любого конечного подполя $F \leqslant F_1$ и любого элемента $t \in H$ имеем $M \in \mathfrak{U}_1(J, \pi)$, где $J = F\langle t \rangle$ и $|\pi < \infty$.*

Доказательство. Положим $J_1 = F_1 \langle t \rangle$. Тогда из леммы 6 работы [1] следует, что $M \in \mathfrak{U}(J_1, \pi)$, где $|\pi_1| < \infty$, т. е. существует свободный J_1-подмодуль $V \leqslant M$ такой, что модуль M/V — π_1-периодический. Нетрудно заметить, что V — свободный J-модуль и в модуле M/V существует ряд подмодулей, каждый фактор которого аннулируется некоторым элементом из π. Тогда ввиду леммы 4.3 из [1] достаточно показать, что если J_1-модуль M аннулируется элементом $\alpha \in \pi$, то $M \in \mathfrak{U}(J, \pi_\alpha)$, где $|\pi_\alpha| < \infty$ и положить $\pi = \bigcup_{\alpha \in \pi_1} \pi_\alpha$.

Пусть поле F_2 получено присоединением к F коэффициентов элемента α как многочлена от t. Положим $J_2 = F_2 \langle t \rangle$. Нетрудно заметить, что α — простой элемент кольца J_2. Тогда для любого ненулевого элемента a из M получим $J_2[a] \cong J_2/J_2\alpha$, а так как $|J_2/J_2\alpha| < \infty$, то $J_2[a] \in \mathfrak{U}(J, \pi_\alpha)$, где $|\pi_\alpha| < \infty$. Отсюда следует, что $M \in \mathfrak{U}(J, \pi_\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть L — расширение конечного поля F,* $\operatorname{char} F =$

$= p$, $G \leqslant L^*$, $G/t(G)$ — *минимаксная группа, причем* $\mathrm{Sp}(G/t(G)) \subseteq \{p\}$. *Тогда, если* $t \in G$, $J = F\langle t \rangle$ и $K = F[G]$, *то* $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, *где* $|\pi| < \infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что поле L алгебраически замкнуто. Тогда существует p-делимая подгруппа G_1 из L^*, содержащая G, такая, что $G_1/t(G_1)$ — минимаксная группа и $\mathrm{Sp}(G_1/t(G_1)) \subseteq \{p\}$. По лемме 4.2 из [1], если $F[G_1] \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi| < \infty$, то $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что G — p-делимая группа. Тогда в группе G следует ряд подгрупп

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n \leqslant \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$$

такой, что $G_1 = H \times t(G)$, где H — свободная абелева группа конечного ранга, $t \in G_1$ и $G_{n+1}^q = G_n$, где $q = |F|$. Соответственно в K получим ряд подколец

$$K_1 \leqslant K_2 \leqslant \ldots \leqslant K_n \leqslant \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = K$$

такой, что $K_n = F[G_n]$ и $K_{n+1}^q = K_n$.

Если $|t| = n$, то $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где π — множество простых делителей элемента $t^n - 1$, поэтому можно считать, что $|t| = \infty$, и, следовательно, $t \in H$. Пусть $F_1 = F(t(G))$, тогда F_1 — локально конечное поле и K_2 — конечнопорожденный F_1H-модуль. Конечно порожденным будет и F_1H-модуль K_2/K_1. Тогда из леммы 3 следует, что модули K_1 и K_2/K_1 принадлежат классу $\mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi| < \infty$.

Пусть $t_n \in G_{n+1}$, $t_n^{q^n} = t$ и $J_n = F\langle t_n \rangle$. Нетрудно проверить, что для любого натурального n отображение $\varphi_n : a \mapsto a^{q^{n-1}}$ является автоморфизмом кольца K, индуцирующим изоморфизм между J_{n-1}-модулем K_{n+1}/K_n и J-модулем K_2/K_1. Тогда из леммы 2.5 работы [2] следует, что $K_{n+1}/K_n \in \mathfrak{U}(J, \pi)$ для любого натурального n, поэтому по лемме 4.3 из [1] $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$. Лемма доказана.

Отметим, что доказательство леммы 4 практически повторяет часть доказательства теоремы 3.3 работы [2] и отличается лишь использованием леммы 3 вместо леммы 6 работы [1].

Лемма 5. *Пусть L — трансцендентное расширение поля F, причем $L = F(H)$, где $|H| < \infty$. Если $F^* = t(F^*) \times M$, где M — счетная свободная абелева группа, то $L^* = t(F^*) \times M_1$, где M_1 — счетная свободная абелева группа.*

Доказательство. Очевидно L^*/F^* — группа без кручения, поэтому $t(L^*) = t(F^*)$. Пусть $z \notin F$ и $z, z_1, \ldots, z_n$ — максимальная система алгебраически независимых над F элементов из L. Положим $F_1 = F(z, z_1, \ldots, z_n)$. Тогда $F_1^* = F^* \times N$, где N — счетная абелева группа, и L является конечным расширением поля F_1. Положим $[L : F_1] = l$ и рассмотрим гомоморфизм $\varphi_z : L^* \to F_1^*$, который элементу ставит в соответствие его регулярную норму. Тогда $\varphi_z(z) = z^l \neq 1$ и, следовательно, $z \notin \mathrm{Ker}\, \varphi$, откуда можно заключить, что существует подгруппа $L_z \leqslant L^*$ такая, что $z \in L_z$ и L^*/L_z — свободная абелева группа. Пусть $T = \bigcap_{z \notin F} L_z$. Очевидно $T \leqslant F^*$ и L^*/T аппроксимируется свободными абелевыми группами. Тогда ввиду счетности группа L^*/T является свободной абелевой группой. Так как $T \leqslant F^*$, то T — прямое произведение периодической и свободной абелевой групп, откуда нетрудно заключить, что такой же будет и гуппа L^*. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть L — расширение конечного поля F, $\mathrm{char}\, F = p$, $G \leqslant L^*$, $G/t(G)$ — минимаксная группа, $\mathrm{Sp}(G/t(G)) \subseteq \{p\}$ и $F(G) = L$. Тогда $L/t(L^*)$ — расширение свободной абелевой группы с помощью p-группы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа G обладает рядом подгрупп

$$G_1 \leqslant G_2 \leqslant \ldots \leqslant G_n \leqslant \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$$

таким, что $G_{n+1}^{p} \leqslant G_n$ и $G_1 = H \times t(G)$, где H — свободная абелева группа конечного ранга. Тогда в группе L^* получим ряд подгрупп

$$L_1^* \leqslant L_2^* \leqslant \ldots \leqslant L_n^* \leqslant \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n^* = L^*,$$

где $L_1^* = F(G_n)$ и $(L_{n+1}^*)^p \subseteq L_n^*$. Пусть $F_1 = F(t(G))$. Тогда L_1 — конечнопорожденное расширение поля F_1, и из леммы 5 следует, что $L_1^* = H_1 \times F_1^*$ — где H_1 — свободная абелева группа. Отсюда нетрудно получить утверждение леммы. Лемма доказана.

Л е м м а 7. *Пусть L — конечнопорожденное расширение поля $\mathbf{Q}$. Тогда $L^* = H \times t(L^*)$, где $|t(L^*)| < \infty$ и H — свободная абелева группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — базис трансцендентности поля L над $\mathbf{Q}$ и $L_1 = \mathbf{Q}(z_1, \ldots, z_n)$. Тогда $[L : L_1] < \infty$. Далее, пусть F — максимальное алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$, содержащееся в поле L. Нетрудно показать, что если элементы из F линейно независимы над $\mathbf{Q}$, то они линейно независимы и над L. Тогда $[F : \mathbf{Q}] < \infty$ и по теореме 1 работы [4] получим $F^* = H \times t(F^*)$, где $|t\langle F^*)| < \infty$ и H — счетная свободная абелева группа. Тогда, так как L — конечнопорожденное трансцендентное расширение поля F, используя лемму 5, получаем $L^* = H_1 \times t(F^*)$, где H_1 — свободная абелева группа. Лемма доказана.

Л е м м а 8. *Пусть L — поле нулевой характеристики, $G \leqslant L^*$, $G = H \times T$, где H — свободная абелева группа конечного ранга, T — периодическая группа, все силовские подгруппы которой циклические, и $L = \mathbf{Q}(G)$. Тогда существует конечнопорожденная подгруппа D из G, содержащая подгруппу H, такая, что если $F = \mathbf{Q}(D)$, то для любой подгруппы T_1 из T справедливы следующие утверждения:*

1) $t(F(T_1)^*) = \langle t(F^*),\ T_1\rangle$;

2) *если $\xi \in T$ и $\langle \xi \rangle \cap t(F(T_1)^*) = \langle 1 \rangle$, то многочлен деления круга f_ξ элемента ξ неприводим над полем $F(T_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H_1 — максимальная подгруппа из H, которая может быть порождена системой алгебраически независимых над $\mathbf{Q}$ элементов, и $F_1 = \mathbf{Q}(H_1)$. Тогда $L = F_1(T \cup D\rangle$, где D — некоторое конечное множество алгебраических над F_1 элементов из L, и по теореме о примитивном элементе [5] существует $\alpha \in L$ такой, что $L = F_1(T)(\alpha)$. Очевидно, так как $T \leqslant t(L^*)$, то $L = F_1(t(F_1^*))(\alpha)$. Если f_α — минимальный многочлен элемента α над полем $F_1(t(F_1^*))$, то существует конечная подгруппа $K \leqslant T$ такая, что все коэффициенты многочлена f_α содержатся в поле $F_1(K)$. Тогда для любой подгруппы $K_1 \leqslant T$, содержащей K, получим

$$[F_1(K_1)(\alpha) : F(K_1)] = [F_1(K)(\alpha) : F_1(K)] = l. \tag{1}$$

Положим $D = \langle H,\ K\rangle$ и $F = \mathbf{Q}(D)$. Пусть T_1 — произвольная конечная подгруппа из T. Обозначим через ξ_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, порождающие силовских подгрупп группы $T_2 = \langle t(F^*),\ T_1\rangle$, и пусть $p_i^{n_i}$ — порядка этих порождающих. Нетрудно показать, что всякий многочлен, неприводимый над $\mathbf{Q}$, неприводим и над F_1. Тогда используя соотношение (1) и выражение для степени многочлена деления круга (см. [5], § 60]), получаем

$$[F(T_1) : F_1] = [F_1(T_2)(\alpha) : F_1(T_2)] \cdot [F_1(T_2) : F_1] = l \prod_{i=1}^{k} \varphi(p_i^{n_i}) \tag{2}$$

где φ — функция Эйлера.

1. Так как группа T является объединением конечных подгрупп, то достаточно рассмотреть случай, когда $|T_1| < \infty$. Пусть $\mu \in t(F(T_1))$, $\mu \notin$

$\notin \langle T_1, t(F^*)\rangle$ и $|\mu| = p^n$, где p — простое число. Тогда, с одной стороны, для подгруппы T_1 будет выполняться соотношение (2), а с другой,— так же, как для соотношения (2), можно показать, что

$$[F(T_1):F_1] = l\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\varphi(p_i^{n_i}\right)\varphi(p^n), \tag{3}$$

если $p_i \neq p$ для всех i, и

$$[F(T_1):F_1] = l\cdot\left(\prod_{i\neq i_1}\varphi(p_i^{n_i})\right)\cdot\varphi(p_{i_1}^{t}), \tag{4}$$

если $p = p_{i_1}$ для некоторого i_1, где $t > n_{i_1}$. Очевидно, соотношения (3) и (4) противоречат соотношению (2).

2. Так же, как и в первом утверждении, можно считать, что $|T_1| < \infty$. Пусть $|\xi| = m$ и $p_i^{n_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, — порядки порождающих силовских подгрупп группы $t(F(T_1)^*)$. Тогда так же, как для соотношения (2), можно показать, что $[F(T_1)(\xi):F_1] = [F(\langle T_1, \xi\rangle):F_1] = l\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\varphi(p_i^{n_i})\right)\times \varphi(m)$. В то же время из соотношения (2) следует, что $[F(T_1):F_1] = l\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\varphi(p_i^{n_i})\right)$, откуда $[F(T_1)(\xi):F(T_1)] = \varphi(m) = \deg f_\xi$, и, следовательно, многочлен f_ξ неприводим над $F(T_1)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть L — поле нулевой характеристики, $G \leqslant L^*$, $G = H \times T$, где T — периодическая группа, все силовские подгруппы которой циклические, H — свободная абелева группа конечного ранга, $L = \mathbf{Q}(G)$, $K = \mathbb{Z}[G]$. Тогда $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi| < \infty$.*

Доказательство. По лемме 8 существует такая конечно порожденная подгруппа D из G, содержащая H, что если $F = \mathbf{Q}(D)$, то для любой подгруппы $T_1 \leqslant T$ получим $t(F(T_1)) = \langle t(F^*), T_1\rangle$. Тогда можно получить существование конечно порожденной подгруппы $D_1 > D$ такой, что если $L_1 = \mathbf{Q}(D_1)$, то $T = (T \cap t(L_1^*)) \times T_2$. А так как $L = F(T)$ и T — прямая сумма циклических групп, то в поле L нетрудно получить ряд подполей

$$L_1 \leqslant L_2 \leqslant \ldots \leqslant L_n \leqslant \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = L$$

такой, что $L_{n+1} = L_n(\xi_n)$, где $\xi_n \in T$ и $L_n^* \cap \langle \xi_n\rangle = 1$. Соответственно в кольце K получим ряд подколец

$$\mathbb{Z}[D_1] = K_1 \leqslant K_2 \leqslant \ldots \leqslant K_n \leqslant \ldots \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = K$$

такой, что $K_{n+1} = K_n[\langle \xi_n\rangle]$. По лемме 8 многочлен деления круга f_n для элемента ξ_n неприводим над полем L_n. Тогда этот многочлен неприводим и над кольцом K_n, так как L_n — поле частных кольца K_n. Коэффициенты при наибольшей и наименьшей степенях многочлена f_n равны единице, поэтому $K_{n+1} = \bigoplus_{i=0}^{\deg f_n - 1} K_n \xi^i$, откуда следует изоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей K_{n+1}/K_n и $\bigoplus_{i=1}^{\deg f_n - 1} (K_n)_i$. Тогда по индукции в $\mathbb{Z}$-модуле K нетрудно получить ряд подмодулей, факторы которого изоморфны K_1. По лемме 6 работы [1] $K_1 \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi| < \infty$. Применив лемму 4.3 той же работы, получим $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi| < \infty$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть L — поле нулевой характеристики, $G \leqslant L^*$, $r_0(G) < \infty$, $\mathbf{Q}(G) = L$, $G_1 \leqslant G$, $G_1 = H \times T$, где H — свободная абелева группа, $r_0(H) = r_0(G)$ и T — периодическая группа, все силовские подгруппы которой простые циклические. Если $L_1 = \mathbf{Q}(G_1)$, то $L_1^* \cap G = H_1 \times$*

$\times T_1$, *где* H_1 — *свободная абелева группа конечного ранга,* T_1 — *периодическая группа, все силовские подгруппы которой циклические.*

Доказательство. Из леммы 8 следует существование конечнопорожденной подгруппы $D \leqslant G$, содержащей H, такой, что если $F = \mathbf{Q}(D)$, то $T = (F^* \cap T) \times T_2$, и для любой подгруппы $T_1 \leqslant T$ получим

$$t(F(T_1)^*) = \langle t(F^*), T_1 \rangle. \tag{5}$$

В частности, из (5) следует $t(L_1^*) = \langle t(F^*), T \rangle$, а так как по лемме 7 $|t(F^*)| < \infty$, то все силовские подгруппы из $t(L_1^*)$ циклические. Поэтому нам достаточно показать, что группа $(L_1^* \cap G)/t(L_1^* \cap G)$ конечно порождена. Так как $H \leqslant F^*$, то группа $(L_1^* \cap G)/(F^* \cap G)$ периодическая. Пусть $\bar{a} \in (L_1^* \cap G)/(F^* \cap G)$, $|\bar{a}| = p^n$, где p — простое число, $g(x)$ — минимальный многочлен элемента a над F, и $\deg g(x) = k$. Очевидно, существует $\mu \in T_2$ такой, что $a \in F(\mu)$. Так как $F_1 = F(\mu)$ — нормальное расширение поля F, то F_1 содержит все корни многочлена $g(x)$, т. е. F_1 содержит k различных корней из a^{p^n} степени p^n, и, следовательно, F_1 содержит k различных корней из 1 степени p^n. Тогда из (5) следует $p \in \Pi(t(F^*) \times \langle \mu \rangle)$.

Предположим, что $p \notin \Pi(t(F^*))$, тогда $p \in \Pi(\langle \mu \rangle)$. Покажем, что в этом случае для некоторого $a_1 \in F$ и некоторого $t \in T_2$ получим

$$a = ta_1. \tag{6}$$

Так как F_1 содержит ровно p корней из 1 степени p^n, то $k \leqslant p$. Если $k = p$, то

$$[F(a) : F] = p. \tag{7}$$

В то же время $F(\xi) \leqslant F(a)$, где ξ — первообразный корень из 1 степени p, и из леммы 8 следует $[F(\xi) : F] = p - 1$, а это противоречит (7). Таким образом $k < p$, и младший коэффициент многочлена $g(x)$ имеет вид ta^k, где $t \in \langle \xi \rangle$. Отсюда, так как $a^{p^n} \in F$ и $(p^n, k) = 1$, нетрудно получить (6).

Если $p \in \Pi(t(F^*))$, то по лемме 1 $[F(a) : F] = p^n$, и, следовательно, F_1 содержит первообразный корень из 1 степени p^n. Тогда из (5) следует, что p^n делит $m = |t(F^*)|$. Отсюда и из (6) получим $(L_1^* \cap G)^m \leqslant \langle t(L_1^* \cap G), F^* \rangle$. Тогда, так как ввиду леммы 7 фактор-группа $F^*(t \times (L_1^* \cap G))/t(L_1^* \cap G)$ — свободная абелева, то такой же будет и фактор-группа $(L_1^* \cap G)/t(L_1^* \cap G)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* L — *поле нулевой характеристики,* $G \leqslant L^*$, $r_0(G) < \infty$, $K = \mathbb{Z}[G]$. *Тогда* $K \in \mathfrak{U}(\mathbb{Z}, \pi)$, *где* $|\pi| < \infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что поле L алгебраически замкнуто и $t(G) = t(L^*)$. Пусть $\overline{K}$ — поле частных кольца K, $G_1 \leqslant G$, $G_1 = H \times T$, где T — периодическая группа, все силовские подгруппы которой простые циклические, $\Pi(T) = \Pi(t(G))$, H — свободная абелева группа конечного ранга, $r_0(H) = r_0(G)$, $K_1 = \mathbb{Z}[G_1]$, $\overline{K}_1$ — поле частных кольца K_1. Тогда, так как $\overline{K}_1 = \mathbf{Q}(G_1)$, по лемме 10 имеем $\overline{K}_1^* \cap G = G_2 = H_1 \times T_1$, где T_1 — периодическая группа, все силовские подгруппы которой циклические, H_1 — конечнопорожденная группа без кручения. По лемме 2 $\overline{K} = \bigoplus\limits_{t \in M} \overline{K}_1 t$, где M — транверсаль подгруппы G_2 в группе G. Тогда $K = \bigoplus\limits_{t \in M} K_2 t$, где $K_2 = \mathbb{Z}[G_2]$. По лемме 9 $K_2 \in \mathfrak{U}(\mathbb{Z}, \pi)$, где $|\pi| < \infty$. Тогда, очевидно, $K \in \mathfrak{U}(\mathbb{Z}, \pi)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* L — *поле характеристики* p, $G \leqslant L^*$, $r_0(G) < \infty$, $F < L$, $|F| < \infty$, $K = F[G]$. *Тогда для любого* $t \in G$ *получим* $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, *где* $J = F\langle t \rangle$ *и* $\pi < \infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что поле L алгебраически замкнуто и $t(G) = t(L^*)$. Пусть $G_1 \leqslant G$, $r_0(G_1) = r_0(G)$, $t(G_1) = t(G)$, $\mathrm{Sp}(G_1/t(G_1)) \subseteq \{p\}$ и $p \notin \Pi(G/G_1)$. Положим $K_1 = F[G_1]$ и пусть $\overline{K}$ — поле частных кольца K, $\overline{K}_1$ — поле частных кольца K_1. По лемме 6, если $G \cap \overline{K}_1^{\bullet} = G_2$, то $\mathrm{Sp}(G_2/t(G_2)) \subseteq \{p\}$. Пусть $K_2 = F[G_2]$ и $\overline{K}_2$ — поле частных кольца K_2. По лемме 2 $\overline{K} = \bigoplus_{t \in M} \overline{K}_2 t$, где M — трансверсаль подгруппы G_2 в группе G. Тогда $K = \bigoplus_{t \in M} K_2 t$. По лемме 4 $K_2 \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi < \infty$, и, следовательно, $K \in \mathfrak{U}(J, \pi)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть M — нетеров JG-модуль, где G — абелева группа конечного свободного ранга, и либо $J = \mathbb{Z}$, либо $J = F\langle t \rangle$, где F — конечное поле, $\langle t \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Тогда $M \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $|\pi| < \infty$.*

Доказательство. Так как M — нетеров JG-модуль, то кольцо $K = JG/\mathrm{Ann}_{JG}(M)$ нетерово. По [6] (гл. IV, § 1, теорема 1) существует ряд подмодулей

$$\langle 0 \rangle = M_0 \leqslant M_1 \leqslant \ldots \leqslant M_n = M,$$

такой, что $M_i/M_{i-1} = \overline{M}_i \simeq K/P_i$, где P_i — простые идеалы кольца K. Тогда из теорем 1 и 2 следует, что $\overline{M}_i \in \mathfrak{U}(J, \pi_i)$, где $|\pi_i| < \infty$, и по лемме 4.3 из [1] $\overline{M} \in \mathfrak{U}(J, \pi)$, где $\pi = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i$. Теорема доказана.

1. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc.— 1959.— 3, N 9.— P. 595—622.
2. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А., Тушев А. В.* Модули над нильпотентными группами конечного ранга // Алгебра и логика.— 1985.— 24, № 6.— С. 631—666.
3. *Ленг С.* Алгебра.— М. : Мир, 1968.— 564 с.
4. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. мат. журн.— 1954.— 6, № 3.— С. 295—304.
5. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М. : Мир, 1976.— 648 с.
6. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра.— М. : Мир, 1971.— 707 с.

Получено 09.01.91