УДК 519.41/47

И. Д. ИВАНЮТА, канд. физ.-мат. наук (Киев. автодор. ин-т)

Силовские 2-подгруппы группы $U(q^2)$

Получена классификация силовских 2-подгрупп предельной унитарной группы $U(q^2)$ над конечным полем $GF(q^2)$ для нечетного числа q.

Одержана класифікація силовських 2-підгруп граничної унітарної групи $U(q^2)$ над скінченним полем $GF(q^2)$ для непарного числа q.

Унитарная группа U n, q^2) степени n над полем $GF(q^2)$ есть группа всех матриц $a = (\alpha_{ij})$ полной линейной группы $GL(n, q^2)$ степени n над $GF(q^2)$, удовлетворяющих условию $\bar{a}a' = e$, где $\bar{a} = (\alpha_{ij}^q)$, $\bar{a}'$ — матрица, транспонированная к $\bar{a}$, e — единичная матрица. Отождествляя матрицу $a \in U(n, q^2)$ с матрицей $\mathrm{diag}[a, 1] \in U(n+1, q^2)$, получаем бесконечную цепь унитарных групп конечных степеней, объединение которой есть группа $U(q^2)$.

1. Силовские 2-подгруппы классических групп конечных степеней над полем $GF(q)$ для нечетного q изучены в [2].

Пусть Z_2 — регулярно представленная циклическая группа порядка 2, $T_i = Z_2 \wr Z_2 \wr \ldots \wr Z_2$ — сплетение i экземпляров группы Z_2, P_1 — силовская 2-подгруппа группы $GL(2, q^2)$. Очевидно $q^2 \equiv 1 \pmod 4$. Если 2^s — наименьшая степень числа 2, делящая $q^2 - 1$ $(2^s \| q^2 - 1)$, то P_1 имеет порядок 2^{2s+1}. Пусть ε — примитивный корень степени 2^s из 1 в $GF(q^2)$. Тогда матрицы $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ порождают группу порядка 2^{2s+1} и, следовательно, $P_1 = Z_{2^s} \wr Z_2$. Сплетение $P_r = P_1 \wr T_{r-1}$ является силовской 2-подгруппой группы $GL(2^r, q^2)$.

Рассмотрим унитарную группу $U(2, q^2)$. Если $q \equiv 3 \pmod 4$ и $2^m \| q + 1$, то силовская 2-подгруппа Q_1 группы $U(2, q^2)$ имеет порядок 2^{2m+1}. Пусть δ — примитивный корень степени 2^m из 1 в $GF(q^2)$. Тогда матрицы $\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ порождают в $U(2, q^2)$ подгруппу порядка 2^{2m+1} и, следовательно, $Q_1 \simeq Z_{2^m} \wr Z_2$.

Если $q \equiv 1 \pmod 4$ и $2^k \| q-1$, то Q_1 имеет порядок 2^{k+2}. В этом случае $Q_1 = \langle a, b \mid a^{2^{k+1}} = b^4 = 1,\ a^{2^k} = b^2,\ b^{-1}ab = a^{2^k-1} \rangle$ — полудиэдральная группа. Силовской 2-подгруппой группы $U(2^r, q^2)$ является сплетение $Q_r = Q_1 \wr T_{r-1}$. Очевидно $Q_r < P_r$.

В общем случае строение силовских 2-подгрупп групп $GL(n, q^2)$ и $U(n, q^2)$ следующее. Если $n = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \ldots + 2^{r_t}$, $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_t$,— разложение n по степеням числа 2, то силовская 2-подгруппа группы $GL(n, q^2)$ изоморфна прямому произведению $\prod_{i=1}^{t} P_{r_i}$, где при $r_1 = 0$ P_0 — силовская 2-подгруппа мультипликативной группы поля $GF(q^2)$, а силовская 2-подгруппа группы $U(n, q^2)$ изоморфна прямому произведению $\prod_{i=1}^{t} Q_{r_i}$, где при $r_1 = 0$ Q_0 есть силовская 2-подгруппа группы корней степени $q+1$ из 1 в $GF(q^2)$.

Естественно вкладывая P_r в P_{r+1} и Q_r в Q_{r+1}, получаем возрастающие цепи групп, объединения которых обозначим через P и Q соответственно. Очевидно $Q < P$.

2. Предельная полная линейная группа $GL(q^2)$ есть линейная группа счетномерного линейного пространства V над полем $GF(q^2)$, а $U(q^2)$ есть группа изометрий V как унитарного пространства, где $\bar{\alpha} = \alpha^q$, $\alpha \in GF(q^2)$.

Силовские 2-подгруппы групп $GL(q^2)$ и $U(q^2)$ можно строить следующим образом. Представим V в виде прямой суммы 2^{r_i}-мерных подпространств, где $r_i < r_j$ при $i < j$ (не более чем по одному подпространству для каждого натурального числа r_i), и не более чем счетное множество Γ счетномерных подпространств. В полных линейных группах и унитарных группах 2^{r_i}-мерных подпространств выбираем силовские 2-подгруппы P_{r_i} и Q_{r_i} соответственно, причем $Q_{r_i} < P_{r_i}$, в полных линейных группах и унитарных группах счетномерных подпространств $V^{(\gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$, выбираем силовские 2-подгруппы $P^{(\gamma)}$ и $Q^{(\gamma)}$, изоморфные P и Q соответственно, причем $Q^{(\gamma)} < P^{(\gamma)}$. Прямые произведения

$$R = \prod_{i \in I} P_{r_i} \times \prod_{\gamma \in \Gamma} P^{(\gamma)}, \quad S = \prod_{i \in I} Q_{r_i} \times \prod_{\gamma \in \Gamma} Q^{(\gamma)} \qquad (1)$$

являются силовскими 2-подгруппами групп $GL(q^2)$ и $U(q^2)$ соответственно, причем $S < R$. Доказательство для группы $GL(q)$ приведено в [1] (лемма 2), а для группы $U(q^2)$ аналогично.

Отметим, что группы вида (1) исчерпывают все силовские 2-подгруппы группы $GL(q^2)$ (см. [1], теорема 1).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$S = \prod_{i \in I} Q_{r_i} \times \prod_{\gamma \in \Gamma} Q^{(\gamma)}, \qquad (2)$$

где $Q^{(\gamma)} \simeq Q$, причем I бесконечно, если $\Gamma = \varnothing$. Тогда S — силовская 2-подгруппа группы $U(q^2)$.

Теперь покажем, что группы вида (2) исчерпывают все силовские 2-подгруппы группы $U(q^2)$.

Теорема 2. *Пусть T — произвольная силовская 2-подгруппа группы $U(q^2)$. Тогда T есть одна из групп вида* (2).

Доказательство. Силовская 2-подгруппа T группы $U(q^2)$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе R группы $GL(q^2)$. Группа R имеет вид (1) и содержит силовскую 2-подгруппу S группы $U(q^2)$ вида (2). Поскольку R не может содержать различных силовских 2-подгрупп группы $U(q^2)$, то $T = S$, т. е. T имеет вид (2).

Теорема 3. *Пусть S и T — силовские 2-подгруппы группы $U(q^2)$, причем*

$$S=\prod_{i\in I} Q_{r_i}\times\prod_{\gamma\in\Gamma} Q^{(\gamma)},\quad T=\prod_{j\in J} Q_{r_j}\times\prod_{\delta\in\Delta} Q^{(\delta)}.$$

Группы S и T изоморфны тогда и только тогда, когда $I=J$ и множества Γ и Δ равномощны.

Доказательство. Пусть $I=J$ и множества Γ и Δ равномощны. Тогда S и T изоморфны естественным образом.

Обратно, пусть $S\simeq T$. Предположим, что в разложение в прямое произведение группы S входит множитель Q_0. Рассмотрим коммутанты S' и T' групп S и T. Очевидно $Q_0'=1$, а при $r_i\neq 0$ $Q_{r_i}'>Z(Q_{r_i})$ — центр группы Q_{r_i}. Тогда Q_0 — наибольшая подгруппа центра группы S, не содержащая в ее коммутанте. Так как при изоморфизме S' отображается на T', а $Z(S)$ — на $Z(T)$, то в разложении в прямое произведение группы T есть множитель Q_0.

Пусть в разложении в прямое произведение группы S есть множитель Q_1 и $Q_1=Z_{2^m}\wr Z_2$. Рассмотрев фактор-группы S/H_0 и T/L_0, где H_0 и L_0 — прямые произведения Q_0 и нулевых баз прямых множителей S и T соответственно, т. е. $H_0=Q_0\times\prod_{\alpha\in A} Z_{2^m}^{(\alpha)}$, $L_0=Q_0\times\prod_{\beta\in B} Z_{2^m}^{(\beta)}$, аналогично получим, что разложение в прямое произведение группы T содержит множитель Q_1, и т. д. При этом очевидно $\prod_{\gamma\in\Gamma} Q^{(\gamma)}$ отображается на $\prod_{\delta\in\Delta} Q^{(\delta)}$; эти группы не имеют центров и, следовательно, обладают единственными прямыми разложениями с неразложенными множителями $Q^{(\gamma)}$. Отсюда следует равномощность множеств Γ и Δ.

Если $Q_1=\langle a, b\rangle$ — полудиэдральная группа, то доказательство аналогично. В этом случае $H_0=Q_0\times\prod_{\alpha\in A}\langle a\rangle^{(\alpha)}$, $L_0=Q_0\times\prod_{\beta\in B}\langle a\rangle^{(\beta)}$. Теорема доказана.

1. *Иванюта И. Д.* Силовские 2-подгруппы группы $GL(q)$ // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 3.— С. 377—381.
2. *Carter R., Fong P.* The Sylow 2-subgroups of the finite classical groups // J. Algebra. 1964.— **1**, N 2.— P. 139—151.

Получено 11.10.90