УДК 512.1

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ, чл.-корр. АН БССР (Ин-т математики АН БССР, Минск)

Условие простоты фундаментального идеала модулярной групповой алгебры локально конечной группы

Приведен критерий простоты фундаментального идеала группового кольца локально конечной группы. С его помощью доказывается простота этого идеала для группы $PSL(2, F)$, где F — бесконечное поле, являющееся объединением своих конечных подполей.

Наведено критерій простоти фундаментального ідеалу групового кільця локально скінченної групи. З його допомогою доводиться простота цього ідеалу для групи $PSL(2, F)$, де F — нескінченне поле, що є об'єднанням своїх скінченних підполів.

Каждое групповое кольцо над полем имеет по меньшей мере два собственных двусторонних идеала: нулевой и фундаментальный. Естественный вопрос об описании класса $\mathfrak{G}\langle P\rangle$ групп G, групповое кольцо которых над заданным полем P имеет ровно два собственных идеала, восходит к Капланскому [1, с. 37]. До недавнего времени единственной работой по этому вопросу была статья Бонваллета, Хартли, Пассмана и Смит [2]; они доказали, что класс $\mathfrak{G}\langle P\rangle$ содержит группы, удовлетворяющие следующему условию: существует простое число $q \neq p = \mathrm{char}(P)$ такое, что для любого конечного набора $1 \neq x_0, x_1, \ldots x_n \in G$ можно найти элементы $y_0, y_1, \ldots, y_n \in G$ такие, что группа, порожденная всеми элементами вида $\langle x_j y_i x_j^{-1}\rangle$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, является элементарной абелевой группой порядка $q^{(n+1)^2}$. Для поля P характеристики 0 и локально конечных групп G недавно автором [3, 4] был развит новый подход, основанный на использовании теории представлений конечных групп. В настоящей статье основная идея работы [4] распространяется на поля P простых характеристик. Чтобы сформулировать результат, введем следующее определение.

Определение. *Пусть A — направленное множество (т. е. частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов x, y существует элемент z такой что $x \leqslant z$, $y \leqslant z$). Пусть $\{G_a\}_{a\in A}$ — локальная система конечных подгрупп группы G (это означает, что $G = \cup_{a\in A} G_a$ и $G_a \subseteq G_b$ при $a \leqslant b$). Пусть M_a — некоторое непустое множество неприводимых представлений группы G_a над полем P. Будем говорить, что $\{M_a\}_{a\in A}$ — индуктивная система (представлений), если для каждого $a \in A$ и каждой группы $G_b \subseteq G_a$ множество неприводимых компонент ограничений $\mu \mid G_b$ $(\mu \in M_a)$ совпадает с M_b. Будем говорить, что индуктивная система $\{M_a\}$ тривиальна, если для всех $a \in A$ либо $M_a = \mathrm{Irr}\, PG_a$, либо $M_a = 1_{G_a}$.*

Здесь и далее для конечной группы H через $\mathrm{Irr}PH$ обозначено множество классов эквивалентности неприводимых представлений группы G над полем P. Если M — произвольный PH-модуль, то $\mathrm{Irr}M$ обозначает подмножество тех представлений $\Phi \in \mathrm{Irr}\, PH$, которые появляются в M в качестве композиционных факторов. Через 1_H обозначается тривиальный одномерный PH-модуль. Если $S \subseteq H$ — подгруппа, то $M \mid H$ обозначает ограничение PH-модуля M на S. Если группа G не проста, скажем, существует гомоморфизм группы G на некоторую группу H такую, что $1 \neq H \neq G$, то ядро K соответствующего гомоморфизма групповых колец $PG \to PH$ — ненулевой двусторонний идеал кольца PG, отличный от фундаментального. Поэтому класс $\mathfrak{G}\langle P\rangle$ состоит только из простых групп.

Теорема 1. *Пусть G — простая локально конечная группа и $\{G_a\}_{a\in A}$ — локальная система конечных подгрупп группы G. Пусть P — поле характеристики $p > 0$, PG — групповое кольцо группы G над P, JPG — радикал Джекобсона и APG — фундаментальный идеал группового кольца PG. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) *APG/JPG — простое кольцо;*

ii) *для каждого неприводимого PG-модуля $M \neq 1_G$ радикал JPG совпадает с ядром естественного гомоморфизма $APG \to \mathrm{End}\, M$;*

iii) *не существует нетривиальных индуктивных систем.*

Существует гипотеза о том, что $JPG=\{0\}$ для любой простой группы G. Эта гипотеза все еще не доказана даже в классе локально конечных групп; ряд результатов можно найти в [5, 6]. Для описания локально конечных групп класса $\mathfrak{G}(P)$ с $JPG = \{0\}$ представляется многообещающим использование эквивалентности i) $\to$ iii). Это требует кропотливого анализа представлений групп G_a. В данной статье ограничимся применением приведенного критерия, чтобы доказать простоту фундаментального идеала кольца PG в простейшем случае $G = PSL\,(2,\ F)$, где F — объединение конечных подполей характеристики $f \neq p$ (теорема 2). Нет сомнения, что этот результат можно расширить на простые группы Шевалле над F тех типов, для которых известны таблицы характеров и матрицы разложения соответствующих конечных групп Шевалле по всем простым, отличным от f.

Доказательство теоремы 1. i) $\Rightarrow$ ii). Предположим противное. Пусть существует такой неприводимый PH-модуль $M \neq 1_G$, для которого $L = \mathrm{Ker}\,(APG \to \mathrm{End}\, M)$ не совпадает с JPG. Заметим, что $L \supseteq JPG$ для любого $M \in \mathrm{Irr}\, PG$. Таким образом, $L \supset JPG$. Если $L = APG$, то $G| M = 1_G$. Следовательно, $JPG \subset L \subset APG$, что невозможно.

i) $\Rightarrow$ *iii)*. Предположим противное. Пусть $\{V_a\}_{a\in A}$ — некоторая нетривиальная индуктивная система. Пусть L_a — минимальный идеал кольца PG_a такой, что $\mathrm{Irr}\,(PG_a/L_a) \in V_a$. Ясно, что L_a содержится в каждом идеале с этим свойством. Покажем, что $L_a \subset L_b$, если $a \leqslant b$. В самом деле, $PG_a/(L_b \cap PG_a)$ — подмодуль модуля $(PG_b/L_b)\,|\,G_a$, и $\mathrm{Irr}\,(PG_b/L_b)\,|\,G_a = \mathrm{Irr}\,(PG_a/L_a) = V_a$ по определению индуктивной системы. Теперь, по определению L_a имеем $L_a \subset PG_a \cap L_b \subset L_b$. Положим $L = \mathrm{U}_{a\in A} L_a$. Ясно, что L — идеал кольца PG. Покажем, что L не содержится в JPG. Известно [6], что $JPG \cap PG_a \subseteq JPG_a$. Следовательно, соотношение $L \subseteq JPG$ влечет $L_a \subseteq JPG_a$ для всех $a \in A$. Тогда $\mathrm{Irr}\,(PG_a/L_a) \supseteq \mathrm{Irr}\,(PG_a/JPG_a) = \mathrm{Irr} PG_a$, так что $V_a = \mathrm{Irr} PG_a$,— противоречие. Следовательно, L не содержится в JPG. Положим $R = L + JPG$. Тогда и R не содержится в JPG. Покажем, что R не содержит APG. Так как группа G локально конечна, то JPG — нильидеал, так что и R/L — нильидеал. Если $R \supseteq APG$, то $g - 1 \in R$ для всех $g \in G$. Тогда элемент $g - 1$ нильпотентен по модулю L; в частности, $(g-1)^{p^r} \in L$ для подходящего $r = r\,(g)$, откуда $g^{p^r} - 1 \in L$. Таким образом, $g^{p^r} \in G_L$, где $G_L = \{g \in G \mid g - 1 \in L\}$. Ясно, что G_L — нормальная подгруппа группы G. Так как G проста, то либо $G_L = G$, либо $G_L = 1_G$. В последнем случае G есть p-группа; однако простых неабелевых p-групп не существует. Если $G = G_L$, то $L = APG$. Тогда $L \cap JPG_a = APG_a$ для всех $a \in A$; следовательно, $PG_a \cap L_b = APG_a$ для подходящего $b > a$. Отсюда вытекает $g - 1 \in L_b$ при $g \in G_a$, т. е. G_a действует тождественно на PG_b/L_b. Это означает, что $\mathrm{Irr}\,(PG_b/L_b)\,|\,G_a=\{1_{G_a}\}$, и по определению индуктивной системы $\mathrm{Irr}\,(PG_b/L_b)\,|\,G_a=\mathrm{Irr}\,(PG_a/L_a) = V_a = \{1_{G_a}\}$, т. е. $\{V_a\}$ тривиальна. Противоречие.

ii) $\Rightarrow$ *i)* и *iii)* $\Rightarrow$ *i)*. Предположим противное, что L — такой идеал кольца PG, что $JPG \subset L \subset APG$. Положим $N = PG/L$, $L_a = L \cap PG_a$ и $N_a = PG_a/L_a$. Будем рассматривать N как PG-модуль. Положим также $S_a = \mathrm{Irr}\, N_a$, $a \in A$. Заметим, что модуль N_a изоморфен подмодулю модуля $N\,|\,G_a$. Покажем сначала, что множество S_a отлично от $\{1_{S_a}\}$ для некоторого $a \in A$. Действительно, если для каждого $a \in A$ композиционные факторы модуля N_a тривиальны, то $(g-1)^{p^r} \in L_a$ для любого $g \in G_a$ и подходящего $r = r\,(g)$. Тогда $g^{p^r} - 1 = (g-1)^{p^r} \in L_a$, так что $g^{p^r} \in G_L$. Отсюда следует, что G/G_L — p-группа, что противоречит условию, если G не совпадает с G_L. Если $G = G_L$, то $L = APG$, — противоречие.

Заметим, что существует композиционный фактор $M \neq 1_G$ PG-модуля N. (Действительно, выберем $0 \neq n \in N$ и любой максимальный PG-подмодуль N' модуля N, не содержащий n. Тогда модуль $M = PGn/N'$

неприводим; более того, все композиционные факторы модуля N имеют вид PGn/N' для подходящих n и N'. Если все композиционные факторы модуля N тривиальны, то $S_a = \{1_{S_a}\}$ для каждого $a \in A$.) Итак, пусть $M \neq 1_G$. Для такого M имеем $APG \neq \operatorname{Ker}(APG \to \operatorname{End} M) \supseteq \operatorname{Ker}(APG \to \operatorname{End} N) = L$; так как L не содержится в JPG, то $\operatorname{Ker}(APG \to \operatorname{End} M)$ не содержится в JPG. Это доказывает $ii) \Rightarrow i)$.

Пусть T_b, $b \in A$, — множество тех $\zeta \in \operatorname{Irr} G_b$, которые появляются среди неприводимых компонент модуля $N \mid G_b$. Ясно, что $\{T_b\}_{b \in A}$ — индуктивная система. Так как $1_{G_b} \neq \{S_b\}_{b \in A} \subseteq \{T_b\}_{b \in A}$, то $T_b \neq \{1_{G_b}\}$ для некоторого $b \in A$. Имеем $LN = 0$ и $L_b N = 0$. Если идеал L_n нильпотентен для каждого b, то L локально нильпотентен и $L \subseteq PG$. Следовательно, существует $a \in A$ такой, что L_a не нильпотентен. Тогда и L_b не нильпотентен при $b \geqslant a$. Пусть $R_b = \operatorname{Irr}(L_b/JPG_b)$. Так как $L_b N = 0$, то T_b не содержит представлений из R_b (ибо каждый неприводимый PG_b-модуль изоморфен модулю, реализующемуся в некотором минимальном левом идеале полупростого кольца PG_b/JPG_b). Это означает, что $T_b \neq \operatorname{Irr} G_b$ при $b \geqslant a$; кроме того, $T_b \neq 0$. Таким образом, индуктивная система $\{T_b\}_{b \in A}$ нетривиальна. Это доказывает $iii) \Rightarrow i)$.

Теорема 2. *Пусть F — бесконечное поле характеристики $f > 0$, которое является объединением своих конечных подполей, $H = PSL(2, F)$ — проективная линейная группа степени 2 над F. Пусть P — поле характеристики $p \neq f$. Тогда групповая алгебра PH содержит только один собственный ненулевой двусторонний идеал, а именно, фундаментальный идеал.*

Предложение (Passman [6], предложение 6.7). *Пусть P и H такие, как в теореме 2. Тогда групповая алгебра PH полупроста.*

Доказательство теоремы 2. Ясно, что H — объединение подгрупп $H_i = PSL(2, F_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где $F_i \subset F_{i+1}$ и $F = \bigcup F_i$. Чтобы доказать теорему, достаточно проверить ввиду теоремы 1, что для каждого i существует такой номер $j > i$, что для любого представления $\Phi \in \operatorname{Irr} H_j$ с $\Phi \neq 1_{H_j}$ ограничение $\Phi \mid H_i$ содержит каждое неприводимое представление группы H_i в качестве неприводимой компоненты. Заметим сначала, что это верно для $P = \mathbb{C}$, поля комплексных чисел. В самом деле, пусть $\chi \neq 1$ — неприводимый характер группы H_j и ξ — неприводимый характер H_i. Положим $|F_i| = q$, $|H_i|^{-1} = d$, $|F_j| = q^k$. Из таблицы характеров группы $H_i = PSL(2, q)$ находим $|\xi(h)| \leqslant |\xi(1)|/(q^{1/2} - 1)$ при $q > 4$ и всех $1 \neq h \in H_i$. Кратность ξ в $\chi \mid H_i$ равна

$$(\chi \mid H_i, \xi) = d\Big(\chi(1)\,\xi(1) + \sum_{1 \neq h \in H_i} \xi(h)\,\chi(h^{-1})\Big) \geqslant d\chi(1)\,\xi(1) -$$

$$- d \sum_{1 \neq h \in H_i} |\xi(h)|\,|\chi(h^{-1})| \geqslant d\chi(1)\,\xi(1) - |\xi(1)|\,|\chi(1)|/(q^{k/2} - 1) =$$

$$= |\xi(1)|\,|\chi(1)|\,(d - (1/(q^{k/2} - 1)).$$

Теперь $d - (1/(q^{k/2} - 1)) \geqslant 1/q\,(q^2 - 1) - 1/(q^{k/2} - 1) > 0$ при $k > 5$. Более того, так как $\chi \neq 1$, то $|\chi(1)| \geqslant (q^k - 1)/2$; отсюда следует, что при $k > 5$ имеем $|\xi(1)|\,|\chi(1)|\,(d - (1/(q^{k/2} - 1)) > 6$. Следовательно, при $k > 5$ каждое неприводимое представление группы H_i содержится в множестве компонент ограничения $\Phi \mid H_i$ с кратностью > 6.

Нам необходима информация о матрице разложения по модулю $f = \operatorname{char}(F)$ для группы H_j. Из работы Бюркгардта [7] вытекает следующий факт.

Каждое неприводимое представление группы $PSL(2, F_j)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики p поднимается в характеристику 0, за исключением представлений γ_1, γ_2 степени $(|F_j| - 1)/2$ с $|F_j| \equiv 1 \pmod 4$ при $p = 2$. В ислючительном случае существуют неприводимые комплексные представления γ_1', γ_2' степени $(|F_j| + 1)/2$ такие, что $\gamma'_m \pmod 2$ содержит компоненты γ_m и 1, $m = 1, 2$.

Отсюда следует, что при $k > 5$ для любого неприводимого представления Ф группы $PSL\ (2,\ q^k)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики p ограничение $\Phi \mid PSL\ (2,\ q)$ содержит каждое неприводимое представление группы $PSL\ (2,\ q)$. Заметим, что если Φ_1 и Φ_2 — неприводимые представления конечной группы над P, то над алгебраическим замыканием поля P они не будут иметь общих неприводимых компонент. Отсюда следует, что условия теоремы 1 выполняются для произвольного поля P. Это доказывает теорему 2.

1. *Kaplansky I*. Lectures on ring theory // Lecture notes.— 1965.
2. *Bonvallet K*., *Hartley B*., *Passman D. S*., *Smith M*. Group rings with simple augmenation ideals // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— **56**.— P. 79—82.
3. *Залесский А. Е*. Групповые кольца индуктивных пределов знакопеременных групп.— Минск, 1989.— 27 с. (Препринт/АН БССР. Ин-т математики; 48 (398)).
4. *Zalesskii A. E*. Group rings locally finite groups and representation theory // Proc. Int. Conf. Algebra (Novosibirsk, August 22—27, 1989).— Contemporary Math.— 1991.
5. *Passman D. S*. On the semisimplicity of group rings of some locally finite groups // Pacif. J. Math. 1975.— 58.— P. 179—207.
6. *Amitsur S. A*. On the semisimplicity of group algebras // Mich. Math. J.— 1956.— **6**.— P. 251—253.
7. *Burkhardt R*., Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL\ (2,\ p^f)$ // J. Algebra.— 1976.— **40**.— P, 75—96,

Получено 21.01.91