УДК 519.41/47

Н. С. ЧЕРНИКОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О цокольных и цокольно конечных группах

Решаются четыре известных давно поставленных вопроса, связанных с группами, обладающими возрастающим цокольным рядом.

Вирішуються чотири відомі давно поставлені питання, пов'язані з групами, які мають зростаючий цокольний ряд.

Напомним, что цоколь группы — это подгруппа, порожденная в группе всеми ее минимальными нормальными делителями, если такие есть, и единичная подгруппа — в противном случае (Р. Ремак).

Инвариантная система подгрупп группы G называется ее цокольной системой, если произвольный фактор B/A этой системы является цоколем группы G/A. Вполне упорядоченная по возрастанию цокольная система группы G называется возрастающим цокольным рядом этой группы; группа, обладающая возрастающим цокольным рядом, называется цокольной (см. [1], § 5).

Примеры цокольных групп — гиперконечные группы (т. е. группы, обладающие возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами), локально нормальные группы, группы с условием минимальности для нормальных делителей.

Очевидно, каждый фактор цокольного ряда группы с условием минимальности для нормальных делителей разлагается в прямое произведение конечного числа минимальных нормальных делителей соответствующей ее фактор-группы. Р. Бэром [2, с. 3] был поставлен следующий вопрос о справедливости обратного предложения.

Удовлетворяет ли условию минимальности для нормальных делителей группа, обладающая таким цокольным рядом, все факторы которого разлагаются в прямые произведения конечного числа минимальных нормальных делителей соответствующей ее фактор-группы?

Этот вопрос со ссылкой на Р. Бэра [2] повторен в известном обзоре С. Н. Черникова [1] (вопрос 5.1) и в монографии Д. Ю. Робинсона [3, с. 151].

Группа G, все фактор-группы которой по отличным от нее конечным нормальным делителям имеют конечные отличные от единицы цоколи, называется цокольно конечной. Цокольно конечная группа G, обладающая возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами, называется M'-группой. Если группа G обладает возрастающим инвариантным рядом

$$N_0 = 1 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_\alpha \subset \ldots \subset N_\gamma = G,$$

произвольный фактор $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ которого является максимальной инвариантной подгруппой группы G/N_α, разлагающейся в прямое произведение конечных простых групп, и все все факторы которого с натуральными номерами конечны, то она называется M''-группой (см. [1], § 5). (Здесь инвариантная подгруппа $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ группы G/N_α максимальна в том смысле, что она не содержится ни в какой большей инвариантной подгруппе группы G/N_α, разлагающейся в такое произведение.)

С. Н. Черников [1] (§5) установил, что каждая локально нильпотентная M'-группа и каждая локально разрешимая M''-группа экстремальна, и в связи с этим поставил следующие вопросы (5.1 и 5.2):

Является ли экстремальной произвольная M'-группа? Является ли экстремальной произвольная M''-группа? (В современной терминологии экстремальная группа — это черниковская группа.)

Следующая теорема автора отрицательно решает отмеченные вопросы Р. Бэра и С. Н. Черникова (причем первый из них и при условии конечности всех факторов возрастающего цокольного ряда группы).

Используемые ниже обозначения стандартны (см., например, [4]). Через $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ мы обозначаем множества натуральных и простых чисел, через ω — первое бесконечное порядковое число.

Теорема 1. *Произвольная бесконечная абелева черниковская группа A является центром некоторой локально нормальной одновременно M'- и M''-группы $G = G'$, не удовлетворяющей условию минимальности для нормальных делителей, которая:* 1) *имеет цоколь, совпадающий с цоколем подгруппы A;* 2) *обладает возрастающим цокольным рядом длины ω, каждый фактор которого конечен и содержит все инвариантные подгруппы соответствующей фактор-группы, разлагающиеся в прямые произведения простых групп;* 3) *имеет фактор-группу $G/Z(G)$, разложимую в прямое произведение счетного множества конечных неабелевых простых групп.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любого $m \in \mathbf{N}$ найдется (конечная) квазипростая группа с циклическим центром порядка m. (Напомним, что конечная группа, совпадающая со своим коммутантом, у которой фактор-группа по центру проста, называется квазипростой — см., например, [4].) Действительно, пусть $n \in \mathbf{N} \setminus 1$ и $m \mid n$; $p \in \mathbf{P}$, $k \in \mathbf{N}$ и $m \mid p^k - 1$, причем $p^k > 3$, если $n = 2$; $M = \langle g^m \mid g \in Z(\mathrm{SL}_n(p^k))\rangle$. Тогда $\mathrm{SL}_n(p^k)/M$ — требуемая квазипростая группа.

Пусть теперь A_i, $i \in \mathbf{N}$, — все отличные от единицы подгруппы группы A, изоморфные центрам тех или иных квазипростых групп, B_i — какая-нибудь (конечная) квазипростая группа с центром, изоморфным A_i, $i \in \mathbf{N}$; $G_0 = A$, G_i — прямое произведение групп G_{i-1} и B_i с отождествленными подгруппами A_i и $Z(B_i)$, $i \in \mathbf{N}$, и $G = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} G_i$; $H_0 = 1$ и H_i/H_{i-1} — цоколь фактор-группы G/H_{i-1}, $i \in \mathbf{N}$. Легко видеть, что группа G — центральное произведение подгрупп B_i, $i \in \mathbf{N}$, $A = Z(G)$, $G = G'$ и G/A — прямое произведение групп B_iA/A $(\simeq B_i/Z(B_i))$, $i \in \mathbf{N}$. Очевидно, G локально нормальна и не удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей. Далее, понятно, что при каждом i $B_i \subseteq H_n$ для подходящего n. Следовательно, $G = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} H_i$. Таким образом, группа G обладает возрастающим цокольным рядом длины $\leqslant \omega$.

Пусть $N \mathrel{\underset{\neq}{\triangleleft}} G$ и φ — естественный гомоморфизм G на G^φ; K — простая субнормальная подгруппа группы G^φ; ψ — естественный гомоморфизм G на $G^\varphi/Z(G^\varphi)$. Очевидно, что G^φ — центральное произведение подгрупп B_i^φ, $i \in \mathbf{N}$, любая отличная от единицы из которых квазипроста; G^ψ — прямое произведение групп B_i^ψ, каждая отличная от единицы из которых неабелева и проста, $Z(G^\psi) = 1^\psi$, $Z(G^\varphi) = A^\varphi$, и у подгруппы A^φ цоколь конечен. Покажем, что в случае, когда K неабелева, $K = B_j^\varphi$ для некоторого j, а в случае, когда K абелева, $K \subseteq Z(G^\varphi)$.

Пусть подгруппа К неабелева. Так как в любой группе произвольные две субнормальные подгруппы с единичным пересечением, хотя бы одна из которых неабелева и проста, поэлементно перестановочны (Г. Виландт — см., например, [3], теорема 5.42), G^φ— произведение нормальных подгрупп B_i^φ, $i \in \mathbf{N}$ и $K \not\subseteq Z(G^\varphi)$, то, очевидно, $K \subseteq B_j^\varphi$ для некоторого j. Понятно, что $B_j^\varphi = KZ(B_j^\varphi)$ и, значит, $B_j^\varphi = (B_j^\varphi)' = K' = K$.

Пусть K абелева. Так как подгруппа K^ψ субнормальна в группе G^ψ, то $K^\psi_i \cap B^\psi_i = 1^\psi$ и $[K^\psi, B_i^\psi] = 1^\psi$, $i \in \mathbf{N}$. Поэтому $K^\psi \subseteq Z(G^\psi) = 1^\psi$, т. е. $K \subseteq Z(G^\varphi)$.

Ввиду доказанного у любого нормального делителя L группы G^φ, разлагающегося в прямое произведение некоторых простых подгрупп, каждый прямой множитель разложения совпадает с одной из подгрупп B_i^φ либо содержится в $Z(G^\varphi)$; в частности, L принадлежит цоколю группы G^φ и последний является максимальной инвариантной подгруппой группы G^φ, разлагающейся в прямое произведение простых групп. Так как все подгруппы B_i непросты, то отсюда вытекает (при $N = 1$), что цоколь группы G содержится в подгруппе A и потому совпадает с цоколем последней. Далее, если N конечна, то число подгрупп B_i, у которых $Z(B_i) \subseteq \mathbf{N}$, конечно и, значит, число простых подгрупп B_i^{φ} конечно. Тогда с учетом конечности цоколя подгруппы A_i^{φ}, цоколь группы G^{φ} конечен.

Так как N выбиралась произвольно, то из доказанного вытекает, что G — M'-группа, $H_i \neq H_{i-1}$, $i \in \mathbf{N}$, и $H_0 = 1 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset \ldots \subset H_{\omega} = G$ — возрастающий цокольный ряд группы G, такой, как в условии 1 настоящей теоремы, и что G — M''-группа. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В доказательстве теоремы 1 в качестве B_i можно брать и полупростую в смысле [4] группу с изоморфным A_i центром, без простых прямых множителей у B_i/K при $K \lneqq Z(B_i)$.

Докажем теперь следующую теорему, из которой, в частности, вытекает положительное решение такого вопроса: содержит ли каждый бесконечный вполне приводимый нормальный делитель группы G, обладающей возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами, отличный от него бесконечный нормальный делитель группы G? (см. [1], вопрос 6.1).

Т е о р е м а 2. *Пусть бесконечная инвариантная FC-подгруппа A некоторой группы G финитно аппроксимируема и обладает конечной инвариантной в G подгруппой B, пересечение которой с произвольным содержащимся в A бесконечным нормальным делителем группы G отлично от единицы; $H = C_G(B)$, D — подгруппа, порожденная всеми элементами из $Z(A \cap H)$, порядки которых принадлежат $\pi = \pi(Z(B))$, и $K/A\,C_H(D)$ — произвольная конечная инвариантная подгруппа фактор-группы $G/A\,C_H(D)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Подгруппа A локально нормальна.*
2. *Подгруппа D обладает некоторой бесконечной подгруппой L, разложимой в прямое произведение конечных минимальных нормальных делителей подгруппы K, такой, что $L \cap B = 1$.*
3. *Индекс $|G : AC_H(D)|$ бесконечен.*
4. *Если $K \subseteq AH$ и $K \neq AC_H(D)$, то $Z(K \cap H) \cap D$ — инвариантная в G бесконечная собственная подгруппа группы D, содержащая $D \cap B$.*
5. *Если у фактор-группы $G/A\,C_H(D)$ множество конечных нормальных делителей бесконечно, то $D \cap B$ содержится в бесконечной собственной подгруппе группы D (а значит, и группы A), инвариантной в G.*

Заметим, что условие утверждения 5 выполняется тогда и только тогда, когда $G/A\,C_H(D)$ содержит бесконечную подгруппу, обладающую возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами, все члены которого нормальны в ней. Заметим также, что вполне приводимая группа, обладающая возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами, является прямым произведением конечных простых групп. С учетом этого из теоремы вытекают такие следствия.

С л е д с т в и е 1. *Пусть бесконечная инвариантная FC-подгруппа A некоторой группы G финитно аппроксимируема. Тогда если фактор-группа $G/Z(G)$ обладает возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами, то подгруппа A не удовлетворяет условию минимальности для содержащихся в ней нормальных делителей группы G.*

С л е д с т в и е 2. *Каждый бесконечный вполне приводимый нормальный делитель группы G, обладающей возрастающим инвариантным рядом с конечными факторами, содержит бесконечный отличный от него нормальный делитель группы G.*

Следствие 2 положительно решает вопрос 6.1 из [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Отметим прежде всего, что утверждения 3 и 5 — следствия соответственно утверждений 2 и 4.

Докажем утверждение 1. Так как A — FC-группа, то фактор-группа $A/Z(A)$ локально нормальна (см. [1], теорема 10.2). Пусть $F \subseteq Z(A)$, $F \cap B = 1$ и индекс $|Z(A) : F|$ конечен, m — экспонента фактор-группы $Z(A)/F$. Тогда $(Z(A))^m \cap B = 1$, $(Z(A))^m \lhd G$ и, значит, подгруппа $(Z(A))^m$ конечна. Вместе с тем подгруппа A локально конечна и, следовательно, локально нормальна. Утверждение 1 доказано.

Пусть L — максимальная подгруппа со свойствами $L \subset D$, $L \lhd K$, $L \cap B = 1$ и L порождена (конечными) минимальными нормальными делителями группы K; M — подгруппа, порожденная всеми нецентральными минимальными нормальными делителями группы $A \cap H$, если такие есть, и $M = 1$ — в ином случае; $N = \langle Z(B) \cup L \cup M \cup O_{\pi'}(A \cap H)\rangle$. Очевидно, $O_{\pi'}(A \cap H) \cap B = O_{\pi'}(A \cap H) \cap Z(B) = 1$ и $O_{\pi'}(A \cap H) \lhd G$. Поэтому подгруппа $O_{\pi'}(A \cap H)$ конечна. Далее, очевидно, $M \lhd G$. Нетрудно убедиться, что $M \cap Z(A \cap H) = 1$. Действительно, если это не так, то среди порождающих M нормальных делителей найдутся такие M_i, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, что $\langle \bigcup_{i=1}^{n} M_i \rangle \cap Z(A \cap H) \supseteq \langle g \rangle \neq 1$ и $\langle \bigcup_{i \neq j} M_i \rangle \cap Z(A \cap H) = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, $\langle \bigcup_{i=1}^{n} M_i \rangle = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Пусть $g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n$, $g_i \in M_i$, $a \in A \cap H$ и $[a, g_1] \neq 1$. Тогда $[a, g] = [a, g_1] \cdot [a, g_2] \ldots [a, g_n]$, $[a, g_i] \in M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому $[a, g] \neq 1$. Противоречие. Следовательно, подгруппа M конечна. Легко видеть, что L — прямое произведение некоторых из порождающих ее нормальных делителей.

Докажем утверждение 2. Пусть L конечна, F — произвольная подгруппа со свойствами $F \lhd (A \cap H)$, $F \cap N = 1$ и индекс $|(A \cap H) : F|$ конечен. Так как $F \neq 1$, то F содержит инвариантную в $A \cap H$ конечную нормальную подгруппу, а значит, и некоторый минимальный нормальный делитель R группы $A \cap H$. Очевидно, $R \subset D$, т. е. $F \cap D \neq 1$. Ввиду произвольности F отсюда вытекает бесконечность подгруппы D. Так как индекс $|K : C_K(D)|$, очевидно, конечен, то индекс $\left| D : \bigcap_{g \in K} (F \cap D)^g \right|$ конечен и, значит, $\bigcap_{g \in K} (F \cap D)^g \neq 1$. Тогда подгруппа $\bigcap_{g \in K} (F \cap D)^g$ содержит некоторый конечный минимальный нормальный делитель R группы K. Но подгруппа $LR \neq L$ и обладает теми же свойствами, что и L. Противоречие. Утвеждение доказано.

Докажем утверждение 4. Пусть T — подгруппа, определяемая для $K \cap H$ так же, как M для $A \cap H$. Тогда $T \lhd G$ и $T \cap Z(K \cap H) = 1$. Так как $T \subset H$ и, очевидно, $Z(B) \subseteq Z(K \cap H)$, то $(A \cap T) \cap B = (A \cap T) \cap (H \cap B) = (A \cap T) \cap Z(B) \subseteq T \cap Z(K \cap H)$. Поэтому $(A \cap T) \cap B = 1$ и, значит, подгруппа $A \cap T$ конечна. Ввиду утверждения 2 множество конечных минимальных нормальных делителей группы K, содержащихся в D, бесконечно. Каждый из них содержит некоторый минимальный нормальный делитель подгруппы $K \cap H$. Таким образом, D содержит бесконечное множество минимальных нормальных делителей подгруппы $K \cap H$. В силу конечности $A \subset T$ почти все они центральны в $K \cap H$. Следовательно, подгруппа $Z(K \cap H) \cap D$ бесконечна. Очевидно, она отлична от D и содержит $D \cap B$. Утверждение 4 доказано. Теорема доказана.

Теорема 3. *Подгруппа $A \trianglelefteq G$ с условием минимальности для нормальных в G подгрупп черниковская, если она имеет инвариантную систему с квазицентральными в G факторами (в смысле* [1] (§ 4)) *и $G/AC_G(A)$ гиперконечна.*

Доказательство. Можно считать, что $|A : N| < \infty$ и $N \trianglelefteq G \Rightarrow A = N$. Ввиду леммы 4. 1 [1], теоремы 2 и следствия 5.1 [1] A имеет цокольный ряд с конечными центральными факторами и черниковская.

Замечание. В утверждении 1 теоремы 1 цоколи G и A можно заменить n-ми членами их цокольных рядов ($n = 1, 2, \ldots$).

1. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук.— 1959.— 14, № 5.— С. 45—96.
2. *Baer R.* Groups with descending chain condition for normal subgroups // Duke J. Math.— 1949.— 16, N 1.— P. 1—22.
3. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups: In two parts.— Berlin etc.: Springer, 1972.— Pt. 1.— 210 p.
4. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию.— М. : Мир, 1985.— 352 с.

Получено 25.04.91