УДК 512.54,519.61

В. А. УСТИМЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Вычисления в группах Коксетера и связанных с ними геометрических объектах

Приведены некоторые алгоритмы генерации группы Коксетера, множества смежных классов этой группы по стандартной подгруппе вместе с оценками их сложности. Рассматриваются вычислительные задачи для геометрий и схем отношений, связанных с группами Коксетера.

Наведені деякі алгоритми генерації груп Коксетера, множина суміжних класів цієї групи за стандартною підгрупою разом з оцінками їх складності. Розглядаються обчислювальні задачі для схем відношень, пов'язаних з групами Коксетера.

Задачи генерации группы G, подгруппы H и смежных классов G по H — одни из центральных в компьютерной алгебре. Широко известны алгоритмы общего назначения (например, алгоритм Тодда—Коксетера), позволяющие их решать для случая «произвольных» G и H. Разумеется «произвольность» выбора G и H очевидным образом ограничивается ресурсами ЭВМ по быстродействию и памяти. Такие ограничения настолько существенны, что конкретные задачи компьютерной теории групп, как правило, решаются с помощью алгоритмов «специального назначения», предназначенных для вычислений в том или ином классе групп или для индивидуальной группы. Эффективность алгоритмов специального назначения во многом определяется выбором способа задания группы и используемым набором «теоремных средств».

В настоящей работе эти задачи рассматриваются для случая групп Коксетера, в том числе и для бесконечных, но конечного типа, т. е. таких, для которых удаление любой вершины диаграммы Коксетера приводит к диаграмме конечной группы. Применение ЭВМ к исследованию бесконечных объектов в данном случае мотивировано известной геометрической задачей о заполнении заданной части конечномерного действительного пространства регулярными многогранниками и построению инвариантных орнаментов (см. обзор в [1] или [2]). Некоторые из приведенных алгоритмов входят в программный комплекс Киевского филиала ВНИИ технической эстетики, предназначенный для решения задач дизайна, связанных с цветной симметрией.

Как в случае BN-пар, так и в случае групп Коксетера, для смежных классов рассматриваются задачи геометрического характера (инцидентность, схемы отношений). Все эти задачи сводятся к изучению двойных классов группы по подгруппам. Алгоритмы для групп Вейля основываются на линейной интерпретации, рассматриваемой в [3, 4]. Такой подход позволяет сводить вычислительные задачи к решению систем линейных уравнений.

Пусть G-группа, G_i, $i \in \mathcal{J}$, — некоторое семейство различных подгрупп в G. Групповой системой инцидентности $\Gamma(G, G_i)$ называют совокупность $\Gamma(G)$ всевозможных левых (правых) смежных классов группы G по подгруппам G_i для всех $i \in \mathcal{J}$. Два смежных класса α и β считают инцидентными и пишут $\alpha I \beta$, если их пересечение (как подмножеств G) не пусто. Полагая $t(\alpha) = i$, для $\alpha = gG_i$ определяют типовую функцию.

Флагом в системе инцидентности $\Gamma(G, G_i)$, $i \in \mathcal{J}$, называют подмножество F в $\Gamma(G)$ попарно инцидентных элементов. Под типом флага F понимают множество $t(F) = \{t(\alpha) \mid \alpha \in F\}$ в $\mathcal{J}$.

Пусть (W, S) — система Коксетера [1], т. е. W — группа с образующими $s_i \in S$, определенная соотношениями вида $(s_i \cdot s_j)^{m_{ij}} = 1$. Положим $W_{\mathcal{J}} = \langle S - \mathcal{J} \rangle$, где $\mathcal{J} \subset S$. Такие подгруппы называют стандартными (или параболическими). В случае максимальных стандартных подгрупп $W_{\{S\}}$ будем писать просто W_S. Систему инцидентности $\Gamma(W, W_{\mathcal{J}})$, $\mathcal{J} \in 2^S$, называют геометрической системой группы Коксетера W. Множество флагов типа $\mathcal{J}$, $\mathcal{J} \in S$, этой геометрии находится в естественном биективном соответствии со смежными классами W по W_S. Систему инцидентности $\Gamma(W, W_{\mathcal{J}})$, $\mathcal{J} \in 2^S$, называют геометрией флагов группы Коксетера.

Пусть (G, Ω) — группа преобразований множества Ω, G_a — семейство стабилизаторов точек, где a пробегает множество R представителей орбит группы. Орбиты φ_i, $i \in J$, естественного действия G на $\Omega \times \Omega$, называемые бинарными орбитами или орбиталями, можно рассматривать как бинарные отношения на Ω. Они порождают когерентную конфигурацию на Ω в смысле [5].

Отношения φ_i находятся в биективном соответствии с двойными смежными классами $G_a g G_b$, где $a, b \in R$. Если (G, Ω) транзитивна, то φ_i образуют, вообще говоря, некоммутативную схему отношений [6, 7]. Важную информацию о схеме θ и ее алгебре Боуза—Меснера дают структурные константы $p_{ij}^k = |\{x \in \Omega \mid (a, x) \in \varphi_i, (x, b) \in \varphi_j\}|$, где (a, b) — фиксированная пара из φ_k.

1. Один из общепринятых способов задания группы Коксетера W в памяти ЭВМ базируется на задании группы образующими $s_1, \ldots, s_n$ и соотношениями $(s_i \cdot s_j)^{m_{ij}} = e$.

Пусть $w \in W$. Наименьшее целое число q такое, что w есть произведение q-элементов из S, называют длиной w и обозначают $l(w)$. Приведенным разложением элемента w (относительно S) называется всякая последовательность $s = (s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S, для которой $w = s_1, \ldots s_q$ и $q = l(w)$. Максимальная длина элемента в данной конечной группе известна. В случае бесконечной группы следует ограничиться генерацией элементов, длина которых не превышает заданного значения m. Слова над алфавитом S длины меньше m полагаем эквивалентными, если произведения входящих в них букв дают один и тот же элемент. Для рассматриваемого набора соотношений выбирается одна из общих процедур сокращения в группе заданного слова $s_1 s_2 \ldots s_q$ и вычисления длины $w = s_1 \ldots s_q$. Отметим, что вопрос о «равенстве» слов $s_1 \ldots s_q$ и $s_1' \ldots s_q'$ сводится к вычислению $l(s_1 \ldots \ldots s_q s_q' \ldots s_1')$. При последовательной генерации элементов удобно использовать следующее «теоремное средство» [1].

Предложение 1. *Пусть* $s \in S$, $w \in W$ *и* $\bar{s} = (s_1 \ldots s_q)$ — *приведенное разложение для* w. *Возможны в точности два случая:*

а) $l(sw) = l(w) + 1$ *и* $(s, s_1, \ldots, s_q)$ — *приведенное разложение элемента* sw;

б) $l(sw) = l(w) - 1$ *и существует индекс* j, $1 \leqslant j \leqslant q$, *такой, что* $(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ *будет приведенным разложением элемента* sw, *а последовательность* $(s, s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ — *приведенным разложением* w.

В самом деле, после элементов $e, s_1, \ldots, s_n$ длины $\leqslant 1$ будем генерировать «слои» элементов заданной длины. Пусть $g_1, \ldots, g_s$ — все элементы (канонические представители) длины k. Для каждого из g_i рассмотрим $P(g_i) = \{s \in S \mid l(sg_i) = l(g_i) + 1\}$ и множество $R(g_i) = \{sg_i \mid s \in P(g_i)\}$. В множестве $R(g_i)$ все слова принадлежат различным классам эквивалентности, но в множествах $R(g_i)$ и $R(g_j)$ при $i \neq j$ могут находиться эквивалентные элементы. Выбрав по одному из них, получим множество представителей элементов длины $k+1$.

Для умножения канонических представителей достаточно задать правило умножения элемента w слева на элемент s из S. В самом деле, процесс умножения слова $(s_1, s_2, \ldots, s_q)$ на w можно рассматривать как последовательное умножение на s_q, s_{q-1} и т. д. Произведение sw согласно предложению 1 имеет длину $d = l(w) \pm 1$ и канонический представитель для него можно найти, рассматривая элементы соседнего слоя.

При решении задач построения множеств двойных смежных классов $W_{\mathcal{J}} g W_{\mathcal{J}'}$ группы W по стандартным подгруппам $W_{\mathcal{J}}$ и $W_{\mathcal{J}'}$ можно эффективно использовать известное предложение [1] о единственности элемента минимальной длины в $W_{\mathcal{J}} g W_{\mathcal{J}'}$. Эта теорема, в частности, позволяет генерировать смежные классы $gW_{\mathcal{J}}$ в соответствии с порядком Брюа на $W/W_{\mathcal{J}}$ процедурой, описанной выше для $\mathcal{J} = S$. Программу конструктивного перечисления классов $W_{\mathcal{J}} g W_{\mathcal{J}'}$ конечной группы Коксетера W, реализованную для персонального компьютера IBM PC, нам любезно передал А. Коэн. Ее базовый алгоритм существенно использует единственность элемента максимальной длины в W [8, 9].

2. Рассмотрим другой, «отраженческий» способ задания группы Коксетера.

Будем считать, что $l(\alpha) = \min l(\alpha)$, где $\alpha \in \Gamma F(W)$. Пусть Σ — множество отражений группы W — совокупность элементов, сопряженных с некоторым s из S. Элементу α из $\Gamma F(W)$ сопоставим тройку подмножеств: $\Delta^+(\alpha) = \{w \in \Sigma \mid l(w\alpha) < l(\alpha)\}$, $o(\alpha) = \{w \in \Sigma \mid l(w\alpha) = l(\alpha)\}$, $\Delta^-(\alpha) = \{w \in \Sigma \mid l(w\alpha) > l(\alpha)\}$. Рассмотрим совокупность $T(W)$ троек $(\Delta^-(\alpha), 0(\alpha), t(\alpha))$, где α пробегает множество $\Gamma F(W)$.

Теорема 1 [3]. *Пусть (W, S) — система Коксетера. Тогда*

а) *отображение ψ, сопоставляющее α из $\Gamma F(W)$ элемент $(\Delta^-(\alpha), 0(\alpha), t(\alpha))$ из $T(W)$, является биекцией;*

б) *элементы α и β из $\Gamma F(W)$ инцидентны тогда и только тогда, когда* $\rho(\alpha, \beta) = |\Delta^+(\alpha) \cap \Delta^-(\beta)| + |\Delta^-(\alpha) \cap \Delta^+(\beta)| = 0$.

Замечание. Функция $\rho(\alpha, \beta)$ выражается через $\Delta^-(\alpha)$ и $0(\alpha)$ и условие $\rho(\alpha, \beta)$ эквивалентно $(\Delta^-(\alpha) \cup 0(\alpha))$.

Это утверждение обосновывает «отображенческий» способ задания элементов $\Gamma F(W)$ их ψ-образами. Заметим, что мощность $o(\alpha)$ для элемента типа $\mathcal{J}$ совпадает с числом отражений $\varepsilon_{\mathcal{J}}$ в конечной группе Коксетера W.

Следствие. *Задача проверки элементов α и β на инцидентность имеет сложность $o(\varepsilon_{\mathcal{J}} + t(\alpha))$.*

В частности, если W конечна, то оценка сложности задачи $o(|\Sigma|)$.

Отраженческая интерпретация элементов $\Gamma F(W)$ тесно связана с заданием смежных классов по стандартным подгруппам представителями минимальной длины. В самом деле, для любой конечной последовательности $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S обозначим через $Q(s)$ последовательность $t_1, \ldots, t_q$ элементов T, определенных формулой $t_j = (s_1 \ldots s_{j-1}) s_j (s_1 \ldots s_{j-1})^{-1}$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Тогда $t_1 = s_1$ и $s_1 \ldots s_q = t_q t_{q-1} \ldots t_1$. Следующее утверждение обосновывает алгоритм перехода от задания элементов $\Gamma F(W)$ их представителями минимальной длины к заданию тройками из $T(W)$.

Лемма 1 [1]. *Если произведение элементов из s является приведенным разложением некоторого элемента w из W, то все элементы последовательности $Q(s)$ различны и составляют $\Delta^-(w)$.*

Группы преобразований $(G, \Gamma F(W))$ и $(W, \Gamma F(W))$, где G является BN-парой с группой Вейля W, имеют ряд общих свойств. Так, в виду разложения Брюа в смежном классе $P_{\mathcal{J}} g P_{\mathcal{J}'}$, найдется представитель из W. Таким образом, определяется каноническая биекция между двойными смежными классами группы G вида $P_{\mathcal{J}}gP_{\mathcal{J}'}$ и элементами $W_{\mathcal{J}}gW_{\mathcal{J}'}$, $g \in W$. Так как орбиталы группы преобразований нумеруются двойными смежными классами по стабилизаторам точек, то существует каноническая биекция между орбиталами групп $(G, \Gamma F(W))$ и $(W, \Gamma F(W))$. Орбиталы, соответствующие классу $W_s s W_s$ как в $(G, \Gamma_s(G))$, так и в $(W, \Gamma_s(W))$, называют орбиталами Коксетера. Эти бинарные отношения (графы) обладают рядом замечательных комбинаторных свойств.

Когерентная конфигурация группы преобразований есть множество всевозможных объединений орбиталов.

Предложение 2. *Пусть (W, S) — группа Коксетера. Непустые отношения $\Phi(d) = \{(\alpha, \beta) | \rho(\alpha, \beta) = d\}$ принадлежат когерентной конфигурации группы преобразований $(W, \Gamma F(W))$.*

Очевидно, что $\Phi(0)$ совпадает с отношением инцидентноути системы $\Gamma F(W)$ и задача о принадлежности элементов (α, β) отношению $\Phi(d)$ имеет оценку сложности, приведенную в следствии к теореме 1.

Пусть $\Phi_{ss'}(d)$ означает ограничение отношения $\Phi(d)$ на $\Gamma_s(W) \times \times \Gamma_{s'}(W)$. Рассмотрим набор $d_1, \ldots, d_n$ всевозможных целых чисел таких, что отношение $\Phi_{ss'}(d)$ не пусто. Назовем его спектром $S(s, s')$ пары (s, s') элементов S.

Предложение 3. *Пусть (W, S) — система Коксетера. Тогда $1 \in S(s, s)$ и $\Phi_{ss}(1)$ есть орбитал Коксетера для любого s из S.*

Спектр $S(s, s')$ полезен и при изучении геометрий BN-пар.

Предложение 4. *Пусть G—группа Шевалле нормального типа над произвольным полем k с группой Вейля W и p — элемент $\Gamma_s(G)$. Обозначим $K = \{x \in \Gamma_{s'}(G) | xIp\}$. Тогда множество размерностей орбит поточечного фиксатора G_k множества K в группе G как аффинного алгебраического многообразия совпадает со спектром $S(s, s')$.*

Среди схем отношений $Q_s(G)$ или $Q_s(W)$, образованных орбиталами конечной группы подстановок $(G, \Gamma_s(G))$ или $(W, \Gamma_s(W))$, с точки зрения таких приложений, как теория кодирования, особый интерес представляют так называемые метрические. Они соответствуют случаю, когда бинарные орбиты определяются метрикой, инвариантной относительно действия группы. Список всех таких схем вида $Q_s(G)$ или $Q_s(W)$ можно найти в [7] или [8].

Пусть W — группа Вейля BN-пары G. Схему отношений $Q_s(G)$ или $Q_s(W)$ назовем спектральной, если бинарные отношения $\Phi_{ss}(d)$, $d \in S(s, s)$, являются орбиталами $(G, \Gamma_s(G))$, $(W, \Gamma_s(W))$. Известно, что схема отношений $Q_s(G)$ является метрической тогда и только тогда, когда $Q_s(W)$ метрическая.

Теорема 2. *Пусть G — локально конечная BN-пара с группой Вейля W. Если схема отношений $Q_s(G)$ (или $Q_s(W)$) метрическая, то она спектральна.*

Пусть (W, S) — система Коксетера. Будем говорить, что пара (s, s') спектральна, если отношение $\Phi_{ss'}(d)$, $d \in S(s, s')$ является орбитой W, действующей на $\Gamma_s \times \Gamma_{s'}$.

Предложение 5. *Пусть (W, S) — конечная система Коксетера. Элемент (s, s') из $S \times S$ является спектральным, если выполнено одно из следующих условий:*

а) *группа W изоморфна одной из групп вида A_n, B_n, D_n, I_n;*

б) *один из элементов (s, s') соответствует крайней точке диаграммы Коксетера.*

Следствие. *Пусть α и β — два элемента типов s и s' конечной геометрии $\Gamma(W)$. Вопрос о том, каким двойным смежным классом нумеруется орбитал $(W, \Gamma(W))$, содержащий (α, β), «почти всегда» можно решить за $o(|\Sigma|)$.*

Простейшим примером неспектральной схемы отношений группы Коксетера является группа F_4, действующая на 96 однотипных элементах своей геометрии.

Если группа Коксетера W конечного типа является кристаллографической, то для генерации ее элементов и флагов удобно интерпретировать

W как группу Вейля системы корней, определяемой матрицей Картана A. Элементы a_{ij} матрицы A удовлетворяют условиям $a_{ii}=2$, $a_{ij}\leqslant 0$ при $i\neq j$, $a_{ij}=0\Rightarrow a_{ji}=0$. Пусть Γ — решетка над Z, натянутая на $\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha_n$ (простые корни), и r_i — преобразования на Γ, определенные равенствами $r_j(\alpha_i)=\alpha_i-a_{ij}\alpha_j$. Группа $W(A)$ вместе с системой образующих r_i, $i=1,\ldots,n$, является системой Коксетера [10]. Элементы вида α_i^g, $g\in W$, образуют множество действительных корней R.

Пусть Γ^* — множество целолинейных функций на Γ (дуальная решетка). Определим действие группы $W(A)$ на Γ^*, полагая $l(x)^g=l(g(x))$, где $l(x)$ — целолинейная функция на Γ, $g\in W$.

Орбиты $HF_{\mathcal{J}}(W)$ группы преобразований $(W(A),\Gamma^*)$, содержащие элемент $\sum\limits_{i\in\mathcal{J}}\alpha_i^*$, различны. Из раздельное объединение $HF(W)$, можно рассматривать как систему инцидентности, где $t(\alpha)=\mathcal{J}\Leftrightarrow\alpha\in HF(W)$, $\alpha I\beta\Leftrightarrow\forall r\in R\quad\alpha(r)\cdot\beta(r)\geqslant 0$. Ограничения I и t на $\bigcup HG_i(W)$, где $HG_i(W)=HF_{\{i\}}(W)$, определяют инцидентностную систему $HG(W)$.

Теорема 3. *Группа подстановок $W(A)$ действует на $HF(W)$ подобно $(W(A),\ \Gamma F(W))$, причем подобие индуцирует морфизм инцидентностных систем $HF(W)$ и $\Gamma F(W)$ и $HG(W)$ и $\Gamma(W)$ соответственно.*

Это утверждение приведено в [3], где рассмотрены также возможности интерпретации $\Gamma F(W)$, связанные с перевыбором системы простых корней в R. Оно обосновывает «линейную интерпретацию» группы в памяти ЭВМ. Рассмотрим следующий алгоритм: элемент $\sum\limits_{i\in\mathcal{J}}\alpha_i^*$ задан таблицей значений на простых корнях. Применяем к нему преобразования r_i, $i\in\mathcal{J}$, и результат записываем в базисе $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Получаем первый в соответствии с порядком Брюа слой элементов. Пусть уже имеются все элементы l-го слоя. К произвольному элементу k-го слоя применяем преобразования r_i такие, что $l(\alpha_i)>0$, и получаем элементы следующего слоя.

Заметим, что элементы HF_s отождествляются с элементами группы W и умножение r_i на элемент из HF_s задано правилом $r_j(\alpha_i)=\alpha_i-a_{ij}\alpha_j$. Алгоритм генерации элементов системы $HF(W)$ реализован В. И. Зайченко на персональном компьютере.

Пусть теперь $W(A)$ — неприводимая конечная группа, $(\ ,\ )$ — инвариантная метрика в пространстве R^n, натянутом на $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. В этом случае $\alpha_i^*(r)=(h_i,r)$, где h_i — вектор R^n, называемый фундаментальным весом. Дуальная решетка отождествляется с решеткой P в R^n, натянутой на $h_1,\ldots,h_n$ и $HF(W)\subset P$. Подмножество φ в $\Gamma_s(W)\times\Gamma_{s'}(W)$ назовем евклидовым, если пара $x\in\Gamma_s(W)$, $y\in\Gamma_{s'}(W)$ принадлежит φ тогда и только тогда, когда $(x,y)=d$ для некоторого фиксированного d.

Предложение 6 [11]. *Ограничение I на $\Gamma_s(W)\times\Gamma_s(W)$ является евклидовым.*

Предложение 7. *Если схема отношений $Q\ (W)$ метрическая, то любой ее орбитал евклидов.*

Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Предложение 8. *Задача о принадлежности пары $(x,\ y)$ евклидову подмножеству в $\Gamma_s(W)\times\Gamma_{s'}(W)$ имеет оценку сложности $o(n)$.*

Примером спектральных, но неевклидовых отношений на $\Gamma_s(W)$ являются орбиталы B_n, C_n, D_n в случае, когда s не является крайней точкой диаграммы.

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Ч. IV—VI.— М. : Мир, 1972.— 334 с.
2. *Узоры* симметрии / Под ред. М. Сенешаль и Дж. Флека.— М. : Мир, 1980.— 270 с.
3. *Ustimenko V. A.* On embedding of some geometries and flag systems in Lie algebras and superalgebras // Root systems representations and geometries.— Kiev, 1990.— P. 3—17.— (Preprint / Acad. sci. Ucr. SSR. Inst. Math., 90.8).
4. *Устименко В. А.* Линейная интепретация геометрий флагов групп Шевалле // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 3.— С. 383—387.
5. *Higman D. G.* Coherent configurations. Part. 1. Ordinary representation theory // Geom. dedic.— 1975.— 4.— P. 1—32.

6. *Клин М. Х.* Об аксиоматике клеточных колец // Исслед. по алгебр. теории комбинатор. объектов.— М. : ВНИИ систем. исслед., 1985.— С. 134—148.
7. *Баннаи Э.*, *Ито Т.* Алгебраическая комбинаторика.— М. : Мир, 1987.— 375 с.
8. *Brower A. E.*, *Cohen A. M.*, *Neumaier A.* Distance regular graphs // Ergeb. Math.— 1990.— **18**.— P. 2—16.
9. *Brower A. E.*, *Cohen A. M.* Computation of some parameters of Lie geometries // Algorithms in Combinatorial Design Theory, Ann. Discrete Math.— 1985.— **26**.— P. 1—48.
10. *Кас V. G.* Fourteen lectures on infinite dimensional Lie algebras.— Boston : Birkhauzer, 1988.— 412 p.
11. *Ustimenko V. A.* On some propeties of Shevalley groups geometries and their generalizations // Invest. algebr. comb.— Amsterdam, 1991.— P. 32—72.

Получено 24.01.91