УДК 517.947

В. П. БУРСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН Украины, Донецк)

Об одной коммутативной диаграмме, связанной с дифференциальным оператором в области

Получена коммутативная диаграмма, содержащая максимальное и минимальное расширения дифференциальной операции в области и объекты, связанные с ними, а также характеризуются следы функций из ядра максимального расширения.

Одержана комутативна діаграма, в яку входять максимальне і мінімальне поширення диференціальної операції в області та об'єкти, пов'язані з ними, а також характеризуються сліди функцій з ядра максимального розширення.

1. Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$, являющейся гладким $(n-1)$-мерным подмногообразием в B^n, $\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $D^\alpha = (-i\partial)^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathrm{Z}_+^n$, $|\alpha| = \sum_k \alpha_k$ — дифференциальная операция с гладкими $(C^\infty(\overline{\Omega}))$ комплекснозначными коэффициентами, $\mathcal{L}^+ = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha (a_\alpha(x)\cdot)$ — формально сопряженная дифференциальная операция. Следуя работе [1], будем называть максимальным оператором L, порожденным операцией $\mathcal{L}$ в пространстве $L_2(\Omega)$, сужение оператора, порожденного операцией $\mathcal{L}$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, на область определения $\mathcal{D}(L)$, являющейся замыканием $C^\infty(\overline{\Omega})$ в норме графика $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{L}u\|_{L_2(\Omega)}^2$. Заметим, что пространство $\mathcal{D}(L)$ гильбертово. Ядро $\ker L$ замкнуто в $\mathcal{D}(L)$ и в $L_2(\Omega)$. Минимальный оператор L_0 суть сужение оператора L на область определения $\mathcal{D}(L_0)$, являющейся замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ в норме графика $\|u\|_L$. Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$L = (L_0^+)^*, \quad L^+ = (L_0)^*. \tag{1}$$

Операторы L_0 и L_0^+ имеют непрерывные левые обратные. (2)

Из условий (1), (2) следует, что, во-первых, ядра $\ker L_0$ и $\ker L_0^+$ тривиальны, во-вторых, операторы L и L^+ сюръективны, в-третьих, $\ker L^+$ является ортогональным дополнением к замкнутому подпространству $R(L_0)$ образов оператора L_0 в пространстве $L_2(\Omega)$.

Нетрудно показать, что оба условия (1), (2) следуют из сюръективности операторов L и L^+.

2. Запишем эти факты на языке точных последовательностей (см., например., [2, 3]), при этом точность последовательности будем понимать в алгебраическом смысле, мономорфизм — как линейную непрерывную инъекцию с замкнутым образом, эпиморфизм — как линейную непрерывную сюръекцию. Если иметь в виду теоретико-категорный смысл мономорфизма и эпиморфизма, ядра и т. п. [2], то можно сказать, что построения ведутся в категории $\mathcal{G}$ гильбертовых пространств, морфизмами в которой являются линейные непрерывные операторы с замкнутыми образами.

Тривиальность ядра и замкнутость образа минимального оператора L_0 означают теперь точность последовательности

$$0 \to \mathcal{D}(L_0) \xrightarrow{L_0} R(L_0) \to 0.$$

Замкнутость ядра и сюръективность максимального оператора L в принятых обозначениях записывается как точностью последовательности

$$0 \to \ker L \xrightarrow{i_L} \mathcal{D}(L) \xrightarrow{L} L_2(\Omega) \to 0,$$

где i_L — вложение.

Разложение в ортогональную сумму $L_2(\Omega) = R(L_0) \oplus \ker L^+$ запишем пока в виде точной последовательности

$$0 \to R(L_0) \xrightarrow{i_R} L_2(\Omega) \xrightarrow{s_R} \ker L^+ \to 0.$$

Нетрудно заметить, что мы имеем фрагменты коммутативной диаграммы, которую сейчас достроим (см. диаграмму $(\mathcal{D})$). Прежде всего введем вложение $0 \to \mathcal{D}(L_0) \xrightarrow{i_0} \mathcal{D}(L)$ и заметим, что правый верхний квадрат в $(\mathcal{D})$ коммутативен в силу того, что оператор L_0 является сужением оператора L;

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}(L_0) \arrow[r, "L_0"] \arrow[d, "i_0"] & R(L_0) \arrow[r] \arrow[d, "i_R"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{D}(L) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Gamma"] & L_2(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "s_R"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(L) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d] & C(L) \arrow[r, "s_C"] \arrow[d] & \ker L^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad (\mathcal{D})$$

Далее, в гильбертово пространство $\mathcal{D}(L)$ вложено замкнутое подпространство $\mathcal{D}(L_0)$, поэтому существует разложение в ортогональную сумму $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L_0) \oplus C(L)$ с некоторым фактором $C(L)$ и отображением факторизации Γ. Отсюда следует точность среднего столбца в $(\mathcal{D})$.

Обозначим ограничение оператора Γ на $\ker L$ через γ, его образ через $C^0(L)$, вложение $C^0(L)$ в $C(L)$ через i_C, тогда коммутативность левого нижнего квадрата очевидна, а точность левого столбца следует из замкнутости ядра $\ker L$ в $\mathcal{D}(L)$.

Оператор s_C определим с помощью следующей конструкции:

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[rr, "L"] \arrow[d, "\Gamma"] & & Lu \arrow[d, "s_R"] \\
g = \Gamma u = u + \mathcal{D}(L_0) & & \{Lu\} = Lu + R(L_0).
\end{tikzcd} \qquad s_C g = \{Lu\}.$$

Для каждого элемента $g \in C(L) = \{u + \mathcal{D}(L_0) \mid u \in \mathcal{D}(L)\}$ находим какой-нибудь элемент $u \in \mathcal{D}(L)$ со свойством $\Gamma u = g$ и к нему применяем оператор $S_R L$. Ясно, что результат не зависит от выбора элемента u, а построенное отображение s_C линейно. Его непрерывность следует из непрерывности оператора L. По построению правый нижний квадрат в $(\mathcal{D})$ коммутативен. Таким образом, диаграмма $(\mathcal{D})$ коммутативна, все столбцы и две верхние строки точны. Из алгебраической 3×3-леммы для С-модулей [3] получаем алгебраическую точность нижней строки. Еще раз подчеркнем, что все операторы в (D) непрерывны и имеют замкнутые образы. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Диаграмма $(\mathcal{D})$ коммутативна и состоит из точных строк и столбцов.*

3. Пространство Коши $C(L)$ Хермандер определил в [4] как фактор G_L/G_{L_0}, где G_L, G_{L_0} — графики операторов L и L_0 соответственно. Напомним, что график оператора $T: H_1 \to H_2$ есть по определению линейное многообразие пар $\{(h, Th) \mid h \in \mathcal{D}(T)\}$, замкнутое в норме пространства $H_1 \dot{+} H_2$, если оператор T замкнут. Очевидно, в нашем случае

$$C(L) = \mathcal{D}(L)/\mathcal{D}(L_0) \approx G_L/G_{L_0}.$$

В соответствии с традициями функционального анализа обозначаем знаком $\oplus$ ортогональную сумму, а знаком $\dot{+}$ прямую сумму пространств. Напомним, что термин «точная последовательность $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ расщепляется» означает, что $B \approx A \dot{+} C$, т. е. (находясь в рамках категории $\mathcal{G}$, для прямой суммы имеем следующее определение) существуют морфизмы

$\beta : B \to A$, $\rho : C \to B$ со свойствами: 1) $\beta\alpha = \mathrm{id}_A$; 2) $\sigma\rho = \mathrm{id}_C$; 3) $\alpha\beta + \rho\sigma = \mathrm{id}_B$ [2, 3].

Легко видеть, что для расщепления точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ достаточно существования морфизма ρ, правого обратного к σ, поскольку, если принять $\beta = \alpha^{-1}(\mathrm{id}_B - \rho\sigma)$, то свойства прямой суммы будут выполнены.

Полагаем теперь, что все последовательности из диаграммы ($\mathcal{D}$) расщепляются. То, что столбцы расщепляются в ортогональную сумму, доказано. Вообще говоря, расщепление строк в ортогональную сумму также не вызывает трудностей, поскольку в гильбертовом пространстве у замкнутого подпространства имеется ортогональное дополнение. Далее будем говорить о конкретных расщеплениях, о конкретных разложениях в прямую сумму, которые, как будет видно, порождаются корректными граничными задачами.

Напомним [4], что линейной однородной граничной задачей называется задача нахождения решения u уравнений

$$Lu = f, \quad \Gamma u \in B, \tag{3}$$

где B — линейное многообразие в $C(L)$. Граничное условие $\Gamma u \in B$ порождает подпространство $\mathcal{D}(L_B) = \Gamma^{-1}(B)$ в пространстве $\mathcal{D}(L)$ и оператор L_B, являющийся сужением оператора L на $\mathcal{D}(L_B)$ и расширением оператора L_0.

Граничная задача называется корректно поставленной [5, 4], а оператор L_B называется правильным [1], если оператор L_B имеет непрерывный правый обратный, определенный на всем $L_2(\Omega)$.

Утверждение 2. *В предположениях* (1), (2) *существует корректно поставленная граничная задача* (3), *и обратно.*

Доказательство следует из расщепления второй строки в ($\mathcal{D}$) в ортогональную сумму. (Ср. с доказательствами этого утверждения в работах [1, 4, 5].)

Вторая строка в ($\mathcal{D}$) теперь расщепляется, если взять $\rho = L_B^{-1}$. Для того чтобы показать расщепление нижней строки, возьмем $\rho = \Gamma L_B^{-1} s_R^{-1}$, где s_R^{-1} — правый обратный к s_R, существующий в силу расщепления правого столбца. Здесь $s_C \Gamma L_B^{-1} s_R^{-1} = id_{\ker L^+}$ по построению оператора s_C.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. *В предположениях* (1), (2) *столбцы и строки в диаграмме* ($\mathcal{D}$) *расщепляются. Конкретное расщепление задается конкретной корректной граничной задачей.*

4. Рассмотрим теперь подробнее пространства $C(L)$ и $C^0(L)$. Основой дальнейших рассмотрений является следующее утверждение.

Утверждение 4. *Для любой пары функций w и φ из соболевского пространства $H^m(\Omega)$ $(m = \deg L)$ справедлива следующая формула Грина:*

$$\int_\Omega (w\overline{L^+\varphi} - \overline{\varphi}Lw)\,dx = \sum_{q=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} L_{(m-q-1)} w \partial_\nu^q \overline{\varphi}\, ds_x, \tag{4}$$

где ds_x — евклидова мера на $\partial\Omega$, $\partial_\nu^q\varphi = \varphi_{\nu^q}^{(q)}$, $L_{(p)} = \sum_{s=0}^{p} L_\tau^{p,s}\partial_\nu^s$ — дифференциальный оператор по касательным направлениям τ с гладкими коэффициентами степени $p - s$.

Доказательство, а также вид операторов $L_\tau^{p,s}$ легко получается интегрированием по частям. Вид операторов $L_\tau^{p,s}$ весьма громоздкий, и мы его не приводим, отметим только, что $L_{(0)} w(x) = L_\tau^{p,p} w(x) = l_0(x) w(x)$, $l_0(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\nu(x))^\alpha$.

Пусть $J_{m,q} : H^{m-q-1/2}(\partial\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$, $q = 0, 1, \ldots, m-1$, — непрерывный оператор продолжения со свойством $\partial_\nu^p (J_{m,q}\psi)|_{\partial\Omega} = \delta_q^p \cdot \psi$, $p = 0, 1, \ldots$

$\ldots, m-1$, — символ Кронекера [6]. Подставим в (4) вместо φ функцию $J_{m,q}\psi$, а вместо w — последовательность $\{w_k\} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, сходящуюся к решению u уравнения $Lu = f$, где $f \in L_2(\Omega)$. Левая часть равенства (4) будет стремиться к выражению, линейному и непрерывному по $\psi \in H^{m-q-1/2} \times (\partial\Omega)$, а в правой части будет стоять $\langle L_{(m-q-1)} w_k, \psi \rangle \partial\Omega$, поэтому предел правой части также существует и задает линейный непрерывный функционал из пространства $H^{-m+q+1/2}(\partial\Omega)$ (обозначим его тем же символом $L_{(m-q-1)}u$), не зависящей от выбора последовательности w_k.

Определение. *Распределение $L_{(p)}$ и назовем p-м L-следом функции $u \in \mathcal{D}(L)$ на границе $\partial\Omega$.*

Ясно, что если $u \in \mathcal{D}(L_0)$, то все его L-следы тривиальны. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 5. У всякой функции u из $\mathcal{D}(L)$ существуют L-следы $L_{(p)}u \in H^{-p-1/2}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$, в том смысле, что для всякой последовательности $w_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, сходящейся в $\mathcal{D}(L)$ к u, последовательность функций $L_{(p)}w_k \in C^\infty(\partial\Omega)$ сходится к $L_{(p)}u$ в пространстве $H^{-p-1/2}(\partial\Omega)$. Пространство Коши $C(L)$ реализуется как подпространство в $H_m(\partial\Omega) := H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-3/2}(\partial\Omega) \times \ldots \times H^{-m+1/2}(\partial\Omega)$, состоящее из всех наборов L-следов функций из $\mathcal{D}(L)$.

Подставим теперь в равенство (4) вместо w функцию $u \in \mathcal{D}(L)$, а вместо φ—последовательность $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, приближащую произвольную выбранную нами функцию $v \in \mathcal{D}(L^+)$ в норме $\|\cdot\|_+$. Переходя к пределу, получаем равенство

$$\int_\Omega (u\overline{L^+v} - \overline{v}Lu)\,dx = \sum_{q=0}^{m-1} \langle L_{(m-q-1)}u, \partial_\nu^q v \rangle_{\partial\Omega}, \tag{5}$$

поскольку предел левой части существует и непрерывен по $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^+)$. Получаем следующее утверждение.

Утверждение 6. *Для всяких $u \in \mathcal{D}(L)$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_+)$ выполняется равенство* (5).

Мономорфизм i_C характеризует следующее утверждение.

Утверждение 7. *Для того чтобы набор $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ из пространства Коши $C(L)$ был набором L-следов решения u уравнения $Lu = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого решения v уравнения $L\ v = 0$ выполнялось условие*

$$\sum_{q=0}^{m-1} \langle u_{m-q-1}, \partial_\nu^q v \rangle_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Доказательство следует из формулы (5). Действительно, подставив в формулу (5) $Lu = 0$, $L^+v = 0$, получим необходимость условия (6). Наоборот, принадлежность $\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\} \in C(L)$ означает, что существует функция $u \in \mathcal{D}(L)$, L-следами которой являются функции u_k. Из формулы (5) и условия (6) тогда получим, что $\forall v \in \ker L^+$, $\int_\Omega Lu \cdot v dx = 0$, отсюда в силу условия (1) $Lu \in R(L_0)$, т. е. $\exists U \in \mathcal{D}(L_0)$, $Lu = L_0 U$. Получаем, что $u - U \in \ker L$, а L-следы функции $u - U$ совпадают с заданными.

Заметим, что условие (6) позволило изучить свойства решений некоторых неклассических краевых задач [7, 8], о других подходах см. [9, 10].

5. В этом пункте получим формулу представления решения и теорему о среднем. Рассмотрим сначала фундаментальные решения для операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^+$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, под которыми понимаются функции $\mathcal{E}_y \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}_y^+ \in \mathcal{D}'(\Omega)$ соответственно, удовлетворяющие уравнениям $\mathcal{L}_x \mathcal{E}_y = \delta(y - x)$, $\mathcal{L}_x^+ \mathcal{E}_y^+ = \delta(x - y)$, $y \in \Omega$.

Утверждение 8. *Пусть у операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^+$ со свойством* (1) $\mathcal{D}(L_0) \subset C(\Omega) \supset \mathcal{D}(L_0^+)$. *Тогда у них существуют фундаментальные реше-*

ния и имеет место представление: $\forall u \in \mathcal{D}(L_0)$, $\forall v \in \mathcal{D}\, L_0^+)$ *для почти всех* $y \in \Omega$,

$$\overline{u(y)} = \langle \mathscr{E}_y^+, L_0 u\rangle_\Omega,$$
$$\overline{v(y)} = \langle \mathscr{E}_y, L_0^+ v\rangle_\Omega. \tag{7}$$

Доказательство. Если $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, то $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\langle \mathscr{L}u, v\rangle = \langle u, \mathscr{L}^+ v\rangle. \tag{8}$$

Из наличия левого обратного $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}L_0 = 1_{\mathcal{D}(L_0)}$ следует наличие правого обратного $\mathcal{M}^* : \mathscr{L}^+\mathcal{M}^* = 1_{\mathcal{D}'(L_0)}$, что влечет сюръективность $\mathscr{L}^+ : L_2(\Omega) \to \mathcal{D}'(L_0) \supset C'(\Omega)$. Подставляя в равенство (8) функцию $\mathscr{E}_y$ вместо u, получаем второе представление (7) для $v \in C_0^\infty$ (Ω). Подставим теперь вместо $v \in C_0^\infty$ (Ω) последовательность $v_n \in C_0^\infty$ (Ω), сходящуюся в $\mathcal{D}(L_0)$ к функции $v \in \mathcal{D}(L_0)$, Тем самым получено второе представление (7). Аналогично получим первое.

Утверждение 9. *Пусть оператор* $\mathscr{L}^+$ *таков, что для всякой точки* $y \in \Omega$ *существует фундаментальное решение, представимое в виде* $\mathscr{E}_y^+ = e_y^0 + e_y^\infty$, *где* $e_y^0 \in \mathscr{E}'(\Omega)$, $e_y^\infty \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Тогда имеет место представление* (9): 1) $\forall u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\forall y \in \Omega$; 2) $\forall u \in \mathcal{D}(L)$, *для почти всех* $y \in \Omega$

$$\overline{u(y)} = \langle \mathscr{E}_y^+, Lu\rangle_\Omega + \sum_{q=0}^{m-1} \langle \partial_\nu^q \mathscr{E}_y^+, L_{(m-q-1)}u\rangle_{\partial\Omega}. \tag{9}$$

Доказательство следует из формулы (4). Подставим в нее вместо w функцию u, а вместо φ — последовательность $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi_k = e_k^\infty + \psi_k$, где ψ_k сходится в $\mathcal{D}'(\Omega)$ к e_y^0. Получим представление (9) для $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Как и в утверждении 8 совершим предельный переход в $\mathcal{D}(L)$, получим (9) для $u \in \mathcal{D}(L)$.

Заметим, что условие утверждения 9 выполнено, например, для гипоэллиптического оператора с постоянными коэффициентами [11]. Заметим также, что слагаемые в представлении (9) суть аналоги классических потенциалов.

Из доказанного непосредственно вытекает следующая теорема о среднем.

Утверждение 10. *Пусть в предположениях утверждения* 9 $\deg L = 2$, $u \in C(\overline{\Omega})$ — *решение уравнения* $Lu = 0$ и $\mathscr{E}_y^+(x) = 0$ *при* $x \in \partial\Omega$. *Тогда*

$$u(y) = \langle l_0 u, \partial_\nu \mathscr{E}_y^+\rangle_{\partial\Omega}.$$

6. Приведем некоторые примеры. Пусть вначале $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$, $\Omega = I =]0;\ 1[$. Тогда

$$\mathcal{D}(L) = H^2(I) \subset C^1(I), \quad \mathcal{D}(L_0) = \dot{H}^2(I), \quad \ker L = \{C_1 + C_2 x\}, \quad L^+ = L,$$
$$R(L) = \left\{u \in L_2(I) \mid \int_I u(x)\,dx = \int_I xu(x)\,dx = 0\right\}.$$

Формула Грина имеет вид

$$\int_I (Lu\cdot\overline{v} - u\cdot\overline{Lv})\,dx = -(u'v - uv')\,|_0^1,$$

откуда

$$L_{(0)}u = u,\ L_{(1)}u = -u'_\nu,\ C(L) = \{u(0),\ u(1),\ u'(0),\ -u'(1)\} = \mathrm{C}^4,$$
$$C^0(L) = \{0\}.$$

Одно из фундаментальных решений $\mathscr{E}_y(x) = (y - x + |y - x|)/2$, соответствующее представлению решения u уравнения $Lu = f$:

$$u(y) = \int_0^y f(x)(y - x)\,dx + u(0) + u'(0)\,y.$$

Пусть теперь $\Omega = K := \{x \in R^2 \mid |x| < 1\}$, $L = -\Delta = (\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2)$. Корректная граничная задача, как и в п. 3., возникает, если найти ортогональное дополнение $\widetilde{N}$ к ядру $N = \ker L$ в пространстве $\mathcal{D}(L)$ и взять $B = \Gamma(\widetilde{N})$. Произвольная граничная задача $\Gamma u \in B$ порождает оператор L_B^{-1}; из факта расщепления второй строки в $(\mathcal{D})$ получаем $\mathcal{D}(L) = N + M$, где $M = L_B^{-1}(L_2(K))$, N и M — подпространства в $L_2(K)$. В частности, если рассматривать задачу Дирихле $B = \{(0, u'_\nu) \mid u \in \mathcal{D}(L)\}$, то $M = H^2(K) \cap \cap \mathring{H}^1(K)$, $\Gamma M \doteq H^{1/2}(K)$ в силу существования оператора продолжения $J_{2,1}$ из п. 4. Из расщепления третьей строки в $(\mathcal{D})$ получаем $C(L) = C^0(L) \dot{+} \Gamma M$. Из утверждения 7 будем иметь, что

$$(\psi, \chi) \in C^0(L), \quad \psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{in\tau}, \quad \chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n e^{in\tau}$$

тогда и только тогда, когда $\chi_n = n\psi_n$ (впрочем, этот факт сразу следует из представления гармонической функции в полярных координатах: $u(r, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n e^{in\tau} + B_n e^{-in\tau})$), причем ψ может быть любым элементом из $H^{-1/2}(\partial K)$, поскольку $u \in L_2(K)$. Изучая $C(L)$ как подпространства в $H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-3/2}(\partial\Omega)$, видим, что, $C(L)$ состоит из всевозможных пар (ψ, χ) где ψ — любая функция из $H^{-1/2}(\partial K)$, а $\chi = \Gamma_{12}\psi + \widetilde{x}$, где $\Gamma_{12} : H^{-1/2}(\partial K) \to H^{-3/2}(\partial K)/\{\text{const}\}$ — ограниченный оператор $((\Gamma_{12}\psi)_n = n\psi_n)$, χ — любая функция из $H^{1/2}(\partial K) = \Gamma M$. Аналогично рассматривая задачу Неймана, заключаем, что проекция $C(L)$ на второй сомножитель $H^{-3/2}(\partial K)$ сюръективна. Тем не менее $C(L) \neq H^{-1/2}(\partial K) \times H^{-3/2}(\partial K)$, так как, очевидно, пара $(0, \chi) \notin C(L)$, если $\chi \in H^{-3/2}(\partial K)$ и $\chi \notin H^{1/2}(\partial K)$.

Заметим, что поскольку для эллиптических операторов с постоянными коэффициентами пространства $\mathcal{D}(L_0)$ совпадают, а $\mathcal{D}(L)$ индивидуальны [2], то индивидуальны и $C(L)$.

Осталось заметить, что $\ker L =$ (замыкание линейной оболочки $V = \{\exp(\lambda(x_1 + ix_2)) \mid \lambda \in \mathbf{C}\}$), $R(L_0) = \{u \in L_2(K) \mid \forall\lambda \in \mathbf{C}, \int_K u(x) \exp(\lambda(x_1 + ix_2))\,dx = 0\}$, из классической формулы Грина

$$L_{(0)}u = u|_{\partial K}, \quad L_{(1)}u = -u'_\nu|_{\partial K},$$

и

$$C^{(0)}(L) = \left\{(\psi, \chi) \in C(L) \mid \forall v \in V, \int_{\partial K} (u\bar{v}'_\nu - u'_\nu \bar{v})\,d\tau = 0\right\}$$

в силу плотности множества V в $\ker L$ [10].

1. *Девин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач.— М. : Наука, 1980.— 207 с.
2. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов.— М. : Мир, 1972.— 259 с.
3. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 543 с.
4. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 131 с.
5. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. Мат. о-ва.— 1952.— 1.— С. 187—246.
6. *Никольский С. М.* Приближения функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1977.— 455 с.

7. *Бурский В. П.* Гармонический анализ в краевых задачах для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 3.— С. 7—10.
8. *Бурский В. П.* Замечания о задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения и интегральной геометрии на сфере // Успехи мат. наук.— 1990.— 45, № 5.— С. 181—182.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К. : Наук. думка, 1984.— 283 с.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.— М. : Мир, 1986.— 379 с.

Получено 26.06.90