УДК 517.9

Я. С. БАРИС, канд. физ.-мат. наук,
О. Б. ЛЫКОВА, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. IV

С помощью приближенных интегральных многообразий получено обобщение второй основной теоремы Ляпунова — Малкина о критических случаях. Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы.

За допомогою наближених інтегральних многовидів одержано узагальнення другої основної теореми Ляпунова — Малкіна про критичні випадки. Наведено приклад, який ілюструє застосування доведеної теореми.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)\,y + g(t,\ x,\ y),\quad \frac{dy}{dt} = C(t)\,y + h(t,\ x,\ y), \tag{1}$$

в которой матричные функции A, B, C непрерывны на интервале $I_+ \supset [0, \infty)$, а вектор-функции $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ непрерывны на множестве $I_+ \times \mathbb{R}^m \times V$, где V — некоторая область из $\mathbb{R}^n$, содержащая замкнутый шар V_ρ радиуса ρ с центром в нуле. Полагаем, что система (1) имеет нулевое решение $x = 0$, $y = 0$.

В [1] при исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) применялось приближенное интегральное многообразие (ИМ) $y = 0$. При этом предполагалось, что невязка приближенного ИМ имеет порядок выше p, а задача об устойчивости для «укороченного» уравнения решается независимо от членов порядка выше p.

В настоящей работе исследуется случай, когда это предположение, вообще говоря, не выполняется. В этом случае мы не можем использовать в качестве приближенного ИМ плоскость $y = 0$. Мы вынуждены применять приближенные ИМ более общего вида.

Как известно [1], задача построения приближенного с невязкой $(0, b)$ ИМ $M_{\text{пр}} : y = \Phi(x)$ системы (1) эквивалентна задаче о построении решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}[A(t)x + B(t)\Phi + g(t, x, \Phi)] = C(t)\Phi + h(t, x, \Phi) + b. \quad (2)$$

Будем искать вектор-функцию $\Phi(t, x)$ в виде асимптотического разложения по координатам [2]

$$y = \Phi(t, x) \equiv \sum_{i=2}^{p} \Phi_i(t, x), \quad (3)$$

где Φ_i — формы i-й степени координат вектора x с непрерывно зависящими от $t \geqslant 0$ векторными коэффициентами. Подставляя (3) в уравнение (2), получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + \sum_{i=2}^{p} \frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\left[A(t)x + B(t)\sum_{j=2}^{p}\Phi_j + \tilde{g}\right] = C(t)\sum_{i=2}^{p}\Phi_i + \tilde{h} + b, \quad (4)$$

где

$$\tilde{g} = g\left(t, x, \sum_{i=2}^{p}\Phi_i(t, x)\right), \quad \tilde{h} = h\left(t, x, \sum_{i=2}^{p}\Phi_i(t, x)\right).$$

Предположим, что вектор-функции $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ имеют асимптотические разложения по x, y порядка не ниже $p-1$ и p соответственно. Тогда имеют место представления

$$\tilde{g} = \sum_{i=2}^{p-1} g_i(t, x) + R_{p-1}[\tilde{g}], \quad \tilde{h} = \sum_{i=2}^{p} h_i(t, x) + R_p[\tilde{h}],$$

где $R_p[\cdot]$ — остаток асимптотического разложения указанной в скобках функции. Приравнивая в (4) формы i-й степени, получаем уравнения

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial x}A(t)x = C(t)\Phi_i + u_i(t, x), \quad (5)$$

где формы u_i i-й степени не зависят от неизвестной формы Φ_j при $j \geqslant i$ $(i = 1, \ldots, p)$. Приравнивая оставшиеся члены, получаем выражение для невязки

$$b(t, x) = R_p\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(B(t)\Phi + g(t, x, \Phi)) - h(t, x, \Phi)\right]. \quad (6)$$

Следовательно, $b = o(\|x\|^p)$, $x \to 0$.

Решение уравнения (5) задает интегральное многообразие системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = C(t)y + u_i(t, x) \quad (7)$$

при каждом $i = 2, \ldots, p$. Зададим его формулой

$$y = \Phi_i(t, x), \quad (8)$$

в которой

$$\Phi_i(t, x) = \int_0^t Y(t, s)\, u_i(s, X(s, t)\, x)\, ds.$$

Здесь $X(s, t)$, $Y(t, s)$ — фундаментальные матрицы решений уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x, \quad \frac{dy}{dt} C(t)\, y, \tag{9}$$

удовлетворяющие условиям $X(s, s) = E$, $Y(s, s) = E$, где E — единичная матрица. В результате можем сформулировать следующую лемму.

Лемма. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются следующие условия.*

1. *Вектор-функции $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ имеют асимптотические разложения по x, y порядка не ниже $p - 1$ и p соответственно, причем, эти разложения начинаются членами не ниже второго порядка, а коэффициенты этих разложений являются непрерывными и ограниченными на I вектор-функциями переменного t.*

2. *Фундаментальные матрицы $X(t, s)$, $Y(t, s)$ уравнений* (9) *подчинены оценкам*

$$\| X(t, s) \| \leqslant K e^{\chi|t-s|}, \quad \| Y(t, s) \| \leqslant N e^{-\nu(t-s)} \ (t \geqslant s > 0),$$

χ, ν, K, N $(p\chi < \nu)$ — *положительные постоянные.*

Тогда система (1) *имеет приближенное ИМ* (3), *где формы $\Phi_i(t, x)$ имеют непрерывные и ограниченные коэффициенты и определяются формулой* (8).

Введем теперь в системе (1) замену $y = \Phi(t, x) + z$, где вектор-функция $\Phi(t, x)$ определяет приближенное с невязкой $(0, b)$ ИМ системы (1). В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)\, x + F(t, x, z), \\ \frac{dz}{dt} &= C(t)\, z + H(t, x, z), \end{aligned} \tag{10}$$

где обозначено

$$F = B(\Phi + z) + g(t, x, \Phi + z), \ H = h(t, x, \Phi + z) -$$

$$- h(t, x, \Phi) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} [Bz + g(t, x, \Phi + z) - g(t, x, \Phi)] - b(t, x).$$

Предположим, что относительно системы (1) выполняются условия леммы, а вектор-функции $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ в некоторой окрестности нуля удовлетворяют условию Липшица по x, y. Очевидно, тогда относительно системы (10) выполняются все условия теоремы 5 [1], кроме условия 2. Покажем, что это условие также выполняется. Для сужения вектор-функций F на $I_+ \times U_r \times \times V_\rho$ имеем

$$\| F(t, \bar{x}, \bar{z}) - F(t, x, z) \| = \| B\bar{z} + B\Phi(t, \bar{x}) + g(t, \bar{x}, \Phi)(t, \bar{x}) + \bar{z}) -$$

$$- Bz - B\Phi(t, x) - g(t, x, \Phi(t, x) + z) \| \leqslant | B | \| \bar{z} - z \| + | B | \| \Phi(t, \bar{x}) -$$

$$- \Phi(t, x) \| + l_1 \| \bar{x} - x \| + l_2 \| \Phi(t, \bar{x}) - \Phi(t, x) \| + l_2 \| \bar{z} - z \|.$$

Так как $\Phi(t, x)$ — многочлен относительно x, коэффициенты которого являются ограниченными функциями $t \geqslant 0$ и наинизшая степень этого многочлена не ниже 2, то

$$\| \Phi(t, \bar{x}) - \Phi(t, x) \| \leqslant l(r) \| \bar{x} - x \|,$$

где $l(r) \to 0$ при $r = \max\{\|x\|, \ \|\bar{x}\|\} \to 0$. Поэтому

$$\|F(t, \bar{x}, \bar{z}) - F(t, x, z)\| \leqslant [(|B| + l_2) l + l_1] \|\bar{x} - x\| + (|B| + l_2)\|\bar{z} - z\| \leqslant$$
$$\leqslant l_3 \|\bar{x} - x\| + l^* \|\bar{z} - z\|,$$

где $l_3 \to 0$ при $r \to 0$, $\rho \to 0$; l^* — положительная постоянная.

Для сужения функции H на $I_+ \times U_r \times V_\rho$ находим

$$\|H(t, \bar{x}, \bar{z}) - H(t, x, z)\| \leqslant \|h(t, \bar{x}, \Phi(t, \bar{x}) + \bar{z}) -$$
$$- h(t, x, \Phi(t, x) + z)\| + \|b(t, x) - b(t, x)\| + \left\| \frac{\partial \Phi(t, \bar{x})}{\partial x} B\bar{z} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} Bz \right\| + \left\| \frac{\partial \Phi(t, \bar{x})}{\partial x} g(t, \bar{x}, \Phi(t, \bar{x}) + \bar{z}) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} g(t, x, \Phi(t, x) + z) \right\|.$$

Отсюда видно, что

$$\|H(t, \bar{x}, \bar{z}) - H(t, x, z)\| \leqslant L_3 \|\bar{x} - x\| + L_4 \|\bar{z} - z\|,$$

где $L_3 \to 0$, $L_4 \to 0$ при $r \to 0$, $\rho \to 0$; $\|H(t, x, 0)\| = \|b(t, x)\| \leqslant N_1(r)$, где $N_1(r) \to 0$ при $r \to 0$. В результате можем сформулировать теорему.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, имеет приближенное ИМ* (3) *с невязкой* (0, b), *где* $\|b\| = 0(\|x\|^p)$, $x \to 0$ *равномерно относительно* $t \geqslant 0$. *Пусть также вектор-функции* $g(t, x, y)$, $h(t, x, y)$ *в некоторой окрестности точки* $x = 0$, $y = 0$ *удовлетворяют условию Липшица относительно* x, y. *Тогда нулевое решение системы* (1) *(асимптотически) устойчиво или неустойчиво, если (асимптотически) устойчиво или неустойчиво нулевое решение уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\Phi(t, x) + g(t, x, \Phi(t, x)).$$

независимо от членов порядка выше p.

Замечание. Сформулированная теорема является обобщением второй основной теоремы Ляпунова — Малкина о критических случаях, доказанной в [3] с помощью функций Ляпунова .

Пример [4]. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = - x_2(1 - \alpha y), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1(1 + \beta y), \quad \frac{dx}{dt} = - ky + \gamma x_1 x_2. \quad (11)$$

Обозначим $M_{\text{пр}}: y = \Phi(t, x)$ — приближенное с невязкой (0, b) ИМ системы (11). Для определения невязки (0, b) запишем уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}[- x_2(1 - \alpha\Phi)] + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}[x_1(1 + \beta\Phi)] = - k\Phi + \gamma x_1 x_2 + b. \quad (12)$$

Применим теорему 1 для исследования устойчивости нулевого решения уравнений (11). Для этого будем искать решение уравнения (12) в виде суммы двух форм: $\Phi = \Phi_2 + \Phi_3$. Подставляя Φ в (12), имеем

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}\right)(- x_2 + \alpha x_2 \Phi_2 + \alpha x_2 \Phi_3) + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2}\right)(x_1 + \beta x_1 \Phi_2 + \beta x_1 \Phi_3) =$$
$$= - k(\Phi_2 + \Phi_3) + \gamma x_1 x_2 + b.$$

Приравнивая формы второй и третьей степени, получаем соответственно

$$- \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} x_1 = - k\Phi_2 + \gamma x_1 x_2,$$

$$-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2}x_1=-k\Phi_3. \tag{13}$$

Приравнивая оставшиеся члены, получаем

$$b=\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1}\right)(\alpha x_2\Phi_2+\alpha x_2\Phi_3)+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2}\right)(\beta x_1\Phi_2+\beta x_1\Phi_3). \tag{14}$$

Для решения уравнений (13), (14) применим метод неопределенных коэффициентов. Ищем Φ_2 в виде $\Phi_2=Ax_1^2+Bx_1x_2+Cx_2^2$. Подставляя Φ_2 в первое уравнение системы (13), имеем

$$-(2Ax_1+Bx_2)x_2+(Bx_1+2Cx_2)x_1=-kAx_1^2-kBx_1x_2-kCx_2^2+\gamma x_1x_2.$$

Приравняв здесь коэффициенты при x_1^2, x_1x_2, x_2^2 получаем

$$B=-kA,\ -2A+2C=-kB+\gamma,\ B=-kC.$$

Из первого и третьего соотношений вытекает, что $A=C$, $B=kC$. Подставив эти значения во второе соотношение, находим $-2C+2C=k^2C+$ $+\gamma$, откуда следует $C=-\gamma/k^2$. Значит,

$$\Phi_2=-\frac{\gamma}{k^2}(x_1^2-kx_1x_2+x_2^2). \tag{15}$$

Находим также $\Phi_3\equiv 0$. Из (14) находим

$$b=\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\alpha x_2\Phi_2+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\beta x_1\Phi_2=o(\|x\|^3),\quad x\to 0.$$

Отсюда следует, что $p=3$. Итак, система (11) имеет приближенное ИМ

$$M_{\text{пр}}: y=-\frac{\gamma}{k^2}(x_1^2-kx_1x_2+x_2^2), \tag{16}$$

невязка которого имеет порядок выше, чем $p=3$. Рассмотрим на этом многообразии первые два уравнения системы (11):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-x_2-\frac{\alpha\gamma}{k^2}x_2(x_1^2-kx_1x_2+x_2^2),\\ \frac{dx_2}{dt}&=x_1-\frac{\beta\gamma}{k^2}x_1(x_1^2-kx_1x_2+x_2^2).\end{aligned} \tag{17}$$

Исследуем устойчивость нулевого решения этих уравнений. Для этого введем в (17) полярные координаты

$$x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta. \tag{18}$$

Дифференцируя эти равенства по t и разрешая полученные уравнения относительно $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, получаем

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx_1}{dt}\cos\theta+\frac{dx_2}{dt}\sin\theta,\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\left(\frac{dx_2}{dt}\cos\theta-\frac{dx_1}{dt}\sin\theta\right). \tag{19}$$

Подставляя (18) в правую часть (17), находим

$$x_1^2=-r\sin\theta-\frac{\alpha\gamma}{k^2}r^3(1-k\sin\theta\cos\theta)\sin\theta,$$

$$x_2^2=r\cos\theta-\frac{\beta\gamma}{k^2}r^3(1-k\sin\theta\cos\theta)\cos\theta.$$

Подставляя эти выражения в (19), получаем

$$\frac{dr}{dt} = -(\alpha+\beta)\frac{\gamma r^3}{k^2}(1-k\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1-(\beta\cos^2\theta-\alpha\sin^2\theta)\frac{\gamma}{k^2}r^2(1-k\sin\theta\cos\theta).$$

Исключая t, приходим к уравнению

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-(\alpha+\beta)\gamma r^3(1-k\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{k^2-\gamma r^2(\beta\cos^2\theta-\alpha\sin^2\theta)(1-k\sin\theta\cos\theta)} = \frac{f Pr^3}{k^2+Qr^2}. \quad (20)$$

Представим правую часть в виде

$$\frac{Pr^3}{k^2+Qr^2} = Ar^3+Br^4+Cr^5+\ldots.$$

Отсюда

$$Pr^3 = (k^2+Qr^2)(Ar^3+Br^4+Cr^5+\ldots).$$

Приравнивая коэффициенты, имеем

$$P = k^2A,\ 0 = k^2B,\ 0 = k^2C+QA.$$

Отсюда следует $A = \frac{P}{k^2}$, $B = 0$, $C = -\frac{Q}{k^2}A = \frac{Q}{k^2}\cdot\frac{P}{k^2} = \frac{PQ}{k^4}$.

Итак, имеем

$$\frac{Pr^3}{k^2+Qr^2} = \frac{Pr^3}{k^2}-\frac{PQr^5}{k^4}+\ldots.$$

В результате приходим к уравнению

$$\frac{dr}{d\theta} = R_3(\theta)r^3+R_5(\theta)r^5+\ldots, \quad (21)$$

где

$$R_3(\theta) = \frac{P}{k^2},\quad R_5 = -\frac{pQ}{r^4},$$

$$P = -(\alpha+\beta)\gamma(1-k\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\cos\theta,$$

$$Q = -\gamma(\beta\cos^2\theta-\alpha\sin^2\theta)(1-k\sin\theta\cos\theta).$$

Решение уравнения ищем в виде

$$r = r_1C+r_2C^2+r_3C^3+\ldots.$$

Подставляя это выражение в уравнение (21) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях C, получаем уравнения, определяющие r_1, r_2, r_3, ... Решая их, учитывая при этом начальное условие $r|_{\theta=0} = C$, получаем

$$r_1 = 1,\quad r_2 = \int_0^\theta R_2(\theta)\,d\theta = 0,$$

$$r_3 = \int_0^\theta (R_3+2R_2r^3)\,d\theta = \int_0^\theta R_3(\theta)\,d\theta.$$

Следовательно, имеем

$$r_3 = \frac{-(\alpha+\beta)\gamma}{2k^2}\left[-\frac{1}{2}(\cos 2\theta-1)-\frac{k}{4}\int_0^\theta(1-\cos 4\theta)\,d\theta\right] = g\theta+\varphi(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ — 2π-периодическая функция, $g = \frac{(\alpha+\beta)\gamma}{8k}$. Устойчивость нулевого решения системы (17) определяется знаком постоянной g [3, 4]. Если $g < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво, если $g > 0$, то нулевое решение неустойчиво. Так как $k > 0$, то нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво, если $(\alpha + \beta)\gamma < 0$ и неустойчиво, если $(\alpha + \beta)\gamma > 0$. На основании теоремы Малкина [3, с. 365] заключаем, что при $(\alpha + \beta)\gamma < 0$ нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво вне зависимости от членов порядка выше $p = 3$. Поэтому согласно теореме 1 при этом условии нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво.

Пусть теперь $(\alpha + \beta)\gamma < 0$. Тогда нулевое решение системы (17) асимптотически устойчиво при $t \to -\infty$. Согласно упомянутой теореме Малкина оно асимптотически устойчиво не зависимо от членов порядка выше p (при $t \to -\infty$). Поэтому при $t \to \infty$ это решение неустойчиво независимо от членов порядка выше $p = 3$. Остается рассмотреть случай $(\alpha + \beta)\gamma = 0$, т. е. $\alpha + \beta = 0$ или $\gamma = 0$. Пусть $\gamma = 0$. Тогда система (11) имеет локально асимптотически устойчивое (ρ, η)-многообразие M; $y = 0$. Полагая $y = 0$ в первых двух уравнениях, получаем

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1.$$

Нулевое решение этой системы устойчиво. Согласно принципу сведения ([5], теорема 2) нулевое решение системы (11) также устойчиво. Пусть теперь $\alpha + \beta = 0$. Умножим первое уравнение системы (11) на x_1, второе — на x_2 и результаты сложим. Тогда получим

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = (\alpha + \beta) x_1 x_2 y.$$

Так как $\alpha + \beta = 0$, то $x_1 \dfrac{dx_1}{dt} + x_2 \dfrac{dx_2}{dt} = 0$ или $\dfrac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 0$. Итак, в этом случае система (11) имеет интеграл $x_1^2 + x_2^2 = C$. Воспользуемся методом функций Ляпунова. Положим $V = x_1^2 + x_2^2$. Эта функция положительно определена. Ее производная в силу системы (11) имеет вид $\dfrac{dV}{dt} = 2x_1 \dfrac{dx_1}{dt} + 2x_2 \dfrac{dx_2}{dt}$. Функция $\dfrac{dV}{dt}$ знакоотрицательна. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение системы (11) устойчиво, но не асимптотически.

1. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Применение приближенных интегральных многообразий в теории устойчивости.— Киев, 1989.— 46 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.1).
2. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. III // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 8.— С. 1033—1044.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л. : Наука, 1950.— 383 с.
5. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. II // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 10.— С. 1315—1321

Получено 06.05.91