УДК 519.21

ФАМ КИ АНЬ, НГУЕН ВАН ХУНГ, кандидаты физ.-мат. наук (Вьетнам)

Робастный вариант метода стягивающихся компактов

Предлагается модифицированный метод стягивающихся компактов, дающий оценку погрешности приближенных решений некорректной задачи в случае, когда не все входные данные измеряются с заданной точностью.

Пропонується модифікований метод компактів, що стягуються, який дає оцінку помилки наближених розв'язків некоректної задачі у випадку, коли не всі вхідні дані вимірюються з заданою точністю.

1. Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

где — A — непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства H в пространство $C[a, b]$.

Пусть вместо точной правой части y_T известны лишь n ее реализаций $y_\delta^i \in C[a, b]$, причем более половины из них (не известно каких), удовлетворяют соотношению

$$\| y_\delta^i - y \|_C \leqslant \delta. \tag{2}$$

Пусть $\Omega : X \subset H \to \mathrm{R}^1$ — стабилизирующий функционал [1] такой, что Ω непрерывен, неотрицателен, его область определения X всюду плотна в H, а множество $K(r) = \{x \in X : \Omega[x] \leqslant r\}$ является компактом при каждом $r \geqslant 0$.

Рассмотрим робастную функцию [2]

$$\Phi_\delta(y) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \rho_\delta(y_\delta^i(t) - y(t))\, dt,$$

где $\rho_\delta(s)$ — функция Хьюбера.

В дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

1) существует единственное решение уравнения (1) $x_T = A^{-1}y_T \in X$;

2) известен модуль непрерывности оператора A на каждом компакте $K(r)$:

$$\forall x_1, x_2 \in K(r); \qquad \| Ax_1 - Ax_2 \| \leqslant \psi(\| x_1 - x_2 \|, r), \tag{3}$$

где $\psi(t, r)$ — неотрицательная, непрерывная и неубывающая по каждой переменной функция, определенная на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty)$, причем $\psi(0, r) = 0$ при всех $r \geqslant 0$;

3) известна оценка погрешности входных данных:

$$\Phi_\delta(y_T) = \int_a^b \sum_{i=1}^n \rho_\delta(y_\delta^i(t) - y_T(t))\, dt \leqslant \omega(\delta), \tag{4}$$

где $\omega(\delta)$ — некоторая непрерывная, неотрицательная, стремящаяся к нулю при $\sigma \to 0$ функция.

Замечание 1. Условие (4) заведомо выполнено в случае, когда для всех реализаций y_δ^i, кроме удовлетворяющих (2), справедлива оценка

$$\| y_\delta^j - y_T \|_{L_{p_j}} \leqslant \delta, \tag{5}$$

где $p_j \geqslant 1$. Заметим, что в случае (5) в отдельных точках $t \in [a, b]$ отклонение $| y_\delta^j(t) - y_T(t)|$ может быть сколь угодно большим. Так как

$$\Phi_\delta(y_T) \leqslant \sum_{i=1}^n \| y_\delta^i - y_T \|_{L_1}$$

и

$$\| y_\delta^i - y\|_{L_1} \leqslant (b-a) \| y_\delta^i - y \|_C \times \| y_\delta^i - y \|_{L_1} \leqslant (b-a)^{1/q_j} \| y_\delta^j - y \|_{L_{p_j}},$$

где $q_j \geqslant 1$; $q_j^{-1} + p_j^{-1} = 1$, то из соотношений (2), (5) следует оценка (4).

2. Робастный вариант метода стягивающихся компактов. Очевидно, $X = \bigcup_{n=1}^\infty K(n)$. Через $S(n, h)$ обозначается $\varphi(h)$-конечная сеть компакта $K(n)$; $\varphi \in C(0, 1]$ — возрастающая, положительная функция такая, что $\varphi(h) \to 0\ (h \to +0)$. Тогда имеем

$$\forall h \in (0, 1],\ \forall x \in K(n) \quad \exists x_h \in S(n, h) \subset K(n) : \| x_h - x \| \leqslant \varphi(h).$$

Пусть $b > 0$ — произвольное фиксированное число. Выберем убывающую последовательность $h_n > 0$ и число $N = N(\delta)$ такие, что

$$\varphi(h_{N-1}) \geqslant \delta \geqslant \varphi(h_N),$$

положим $r_1 = 1$; $V_1 = \{v \in S(r_1, h_1)\colon \Phi_\delta(Av) \leqslant G\psi(\varphi(h_1) r_1) + \omega(\delta)\}$, где G — константа Липшица функции Φ_δ [2]. Далее, положим $r_2 = r_1$, если $V_1 \neq \varnothing$, и $r_2 = r_1 + 1$, если $V_1 = \varnothing$. Для всех $n \leqslant N - 1$ аналогично определим

$$V_n = \{v \in S(r_n, h_n) : \Phi_\delta(Av) \leqslant G\psi(\varphi(h_n), r_n) + \omega(\delta)\},$$

$r_{n+1} = r_n$, если $V_n \neq \varnothing$, $\quad r_{n+1} = r_n + 1$, если $V_n = \varnothing$;

$$V_N \equiv V_\delta = \{v \in S(r_N, h_N) : \Phi_\delta(Av) \leqslant G\psi(\varphi(h_N), r_N) + \omega(\delta)\}.$$

Доказательство сходимости метода будет проведено по схеме работы [3].

Лемма 1. *Предположим, что для фиксированного $v \in H$ выполнено соотношение $\Phi_\delta(Av) \to 0\ (\delta \to 0)$, и значит, в силу* (4)

$$|\Phi_\delta(Av) - \Phi_\delta(y_T)| \to 0\ (\delta \to 0).$$

Тогда $v = x_T \in X$.

Доказательство дословно повторяет рассуждения работы [2, с. 656].

Лемма 2. *Существует такое* $N_0 = N_0(x_T)$, что

$$\forall N \geqslant N_0 \quad \Omega[x_T] \leqslant r_N.$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\forall n \quad \exists N \geqslant n : r_N < \Omega[x_T].$$

Положим $n_1 = [\Omega[x_T]] + 1$; найдется N_1, $m_1 \leqslant N_1$, такое, что $V_{m_1} \neq \varnothing$ (иначе $r_{N_1} = N_1 \geqslant n_1 > \Omega[x_T]$). Далее, пусть $n_2 = N_1 + 1$, существует число N_2 такое, что при некотором $m_2 \leqslant N_2$, $V_{m_2} \neq \varnothing$ и т. д. Выберем последовательность $\{v_n\}$, где $v_n \in V_{m_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\Omega[v_n] \leqslant \leqslant r_{m_n} < \Omega[x_T]$, а r_{m_n} — целые числа, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\Omega[v_n] \leqslant \Omega[x_T] - \varepsilon \equiv r_T$.

Таким образом, последовательность $\{v_n\}$ компактна и, не умаляя общности, можно считать, что $v_n \to v_0$, и следовательно,

$$\Omega[v_0] \leqslant \Omega[x_T] - \varepsilon. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\Phi_\delta(Av_n) \leqslant G\psi(\varphi(h_{m_n}), r_{m_n}) + \omega(\delta) \leqslant G\psi(\varphi(h_{m_n}), \Omega[x_T]) +$$
$$+ \omega(\delta) \to 0 \ (n \to \infty).$$

В силу непрерывности Φ_δ и A имеем $\Phi_\delta(Av_0) \leqslant \omega(\delta)$. Согласно лемме 1 $v_0 = x_T \in X$, что противоречит (6).

Лемма 3. *При всех* $N \geqslant N_0$ *множества* V_N *не пусты и содержатся в некотором компакте* K_0.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что для всех $N \geqslant N_0$, $\Omega[x_T] \leqslant r_N$, следовательно, $x_T \in K(r_N)$. Пусть $x_h \in S(r_N, h_N)$ такой, что $\| x_h - x_T \| \leqslant \varphi(h \ ) \leqslant \delta$. Заметим, что $\Omega[x_h] \leqslant r_N$; согласно [2] имеем

$$0 \leqslant \Phi_\delta(Ax_h) \leqslant |\Phi_\delta(Ax_h) - \Phi_\delta(Ax_T)| + \Phi_\delta(Ax_T) \leqslant$$
$$\leqslant G\psi(\| x_h - x_T \|, r_N) + \omega(\delta) \leqslant G\psi(\varphi(h_N), r_N) + \omega(\delta).$$

Таким образом, $x_h \in V_N \equiv V_\delta$. В частности, $V_N \neq \varnothing$ для всех $N \geqslant N_0$, более того, $r_N \leqslant r_{N_0} \leqslant N_0$ и $V_N \subset K(N_0) \equiv k_0$ — компакт

Лемма 4. *Последовательность компактов* $\{V_\delta\}$ *стягивается в точку* x_T *пуи* $\delta \to 0$.

Доказательство. Предположим противное: найдутся $v_k^\pm \in V_{N_k}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\| v_k^+ - v_k^- \| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Поскольку $\{v_k^\pm\} \subset K_0$, то, не умаляя общности, считаем, что

$$v_k^\pm \to v^\pm, \quad k \to \infty, \tag{8}$$

и тогда $Av_k^\pm \to Av^\pm$. С другой стороны,

$$\Phi_\delta(Av_k^\pm) \leqslant G\psi(\varphi(h_{N_k}), r_{N_k}) + \omega(\delta) \leqslant G\psi(\varphi(h_{N_k}), N_0) + \omega(\delta).$$

Отсюда следует $0 \leqslant \Phi_\delta(Av^\pm) \leqslant \omega(\delta) \to 0 \ \ \delta \to 0)$, следовательно, по лемме 1 $v^\pm = x_T \in X$. Последнее противоречит (8) и (7). Таким образом, $\operatorname{diam} V_\delta \to 0$ $(\delta \to 0)$. Лемма доказана.

Выберем произвольный $x_\delta \in V_\delta \equiv V_N$ $(N \geqslant N_0)$. Тогда имеем

$$\| x_\delta - x_T \| \leqslant \| x_\delta - x_h \| + \| x_h - x_T \| \leqslant \operatorname{diam} V_\delta + \varphi(h_N),$$

следовательно,

$$\| x_\delta - x_T \| \leqslant \operatorname{diam} V_\delta + \delta. \tag{9}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Робастный вариант метода стягивающихся компактов сходится, при этом справедлива оценка* (9).

З а м е ч а н и е 2. Если для стабилизирующего функционала $\Omega[x]$ выполнено условие

$$\Omega[x] \geqslant c^{-1} \| x \| \quad \forall x \in X \quad (c = \mathrm{const} > 0),$$

то вместо условия (2) можно потребовать, чтобы

$$\forall x_1, x_2 \in H : \| Ax_1 - Ax_2 \| \leqslant \psi(\| x_1 - x_2 \|, r),$$

где $r = \max(\|x_1\|, \| x_2 \|)$, при этом все предыдущие рассуждения остаются верными, если в качестве V_n рассматривать множества

$$V_n = \{ v \in S(r_n, h_n) : \Phi_\delta(Av) \leqslant G\psi(\varphi(h_n), Cr) + \omega(\delta) \}.$$

В заключение отметим, что сам метод стягивающихся компактов [3] является частным случаем его робастной модификации, когда $n = 1$, $\Omega[x] = \| x \|_1$ и $\| y_\delta - y_T \| \leqslant \delta$, где $\| \cdot \|_1$ — некоторая норма, определенная на подпространстве X, непрерывно, плотно и компактно вложенном в H.

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 288 с.
2. *Арсенин В. Я., Крянев А. В., Цупко-Ситников М. В.* Применение робастных методов при решении некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1989.— 29, № 5.— С. 653—661.
3. *Гапоненко Ю. Л.* Об одном классе вполне регуляризуемых отображений // Там же.— 1982.— 22, № 1.— С. 3—9.

Получено 31.01.91