УДК 517.948

Н. Ш. ИСКЕНДЕРОВ, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики и механики АН АзССР, Баку)

Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы n уравнений первого порядка на полуоси

Для гиперболической системы на полуоси для случая $n-1$ падающих и одной рассеянной волн при совместном рассмотрении $n-1$ задач с различными граничными условиями построен оператор рассеяния. Доказана возможность однозначного восстановления коэффициентов системы по оператору рассеяния.

Для гіперболічної системи на півосі для випадку $n-1$ падаючої і однієї розсіяної хвиль при сумісному розгляді $n-1$ задач з різними граничними умовами побудовано оператор розсіяння. Доведено можливість однозначного відновлення коефіцієнтів системи за оператором розсіяння.

Рассмотрим на полуоси $x \geqslant 0$ гиперболическую систему уравнений вида

$$\sigma \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = U(x, t)\, \psi(x, t), \tag{1}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ — искомая функция; $\sigma = \operatorname{diag}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — постоянная диагональная матрица, причем $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_{n-1} > 0 > \xi_n$; $U(x, t)$ — матричный потенциал с нулевыми элементами на диагонали $u_{ii}(x, t) \equiv 0$ и с интегрируемыми с квадратом недиагональными элементами

$$\iint |u_{ij}(x, t)|^2 dx dt < +\infty. \tag{2}$$

Прямая и обратная задачи рассеяния для гиперболической системы двух уравнений первого порядка на всей оси и на полуоси подробно исследованы в [1], а для гиперболической системы $n \geqslant 3$ уравнений на всей оси — в [2, 3].

Для общей системы вида (1) на полуоси $x \geqslant 0$ возникают случаи, когда имеются k падающих и $n-k$ рассеянных волн $(\xi_1 > \ldots > \xi_k > 0 > \xi_{k+1} > \ldots > \xi_n)$. При $n = 3, 4$ эти случаи изучены в работах [4—7]. В настоящей работе рассматривается случай, когда имеются $n-1$ падающие и одна рассеянная волны.

1. Задача рассеяния. Будем рассматривать обобщенные решения системы (1), которые являются обычными измеримыми по x и t функциями. При этом по переменной t они принадлежат пространству $L_2(E)$, а их L_2-норма равномерно по x ограничена. Такие решения будем называть допустимыми.

Всякое допустимое решение системы (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2), допускает на полуоси $x \geqslant 0$ асимптотическое представление

$$\begin{gathered} \psi_i(x, t) = a_i(t + \xi_i x) + o(1), \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \psi_n(x, t) = b(t + \xi_n x) + o(1), \quad x \to +\infty, \end{gathered} \tag{3}$$

где функции $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in L_2(E)$ определяют профили падающих волн, а функция $b(s) \in L_2(E)$ определяет профиль рассеянной волны.

Задача рассеяния на полуоси состоит в нахождении решения системы (1) по заданным падающим волнам $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и граничным условиям при $x = 0$.

Рассмотрим $n-1$ задачи; k-я задача состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего граничному условию

$$\psi_n^k(0, t) = \psi_k^k(0, t), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

по заданным падающим волнам $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, определяющим при $x \to +\infty$ асимптотику решений $\psi_1^k, \ldots, \psi_{n-1}^k$ вида (3).

Совместное рассмотрение этих $n-1$ задач будем называть задачей рассеяния для системы (1) на полуоси.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (2). *Тогда существует и единственно решение задачи рассеяния на полуоси для системы* (1) *с произвольными заданными падающими волнами* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in L_2(E)$.

Доказательство. Задача рассеяния для k-ой задачи эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$\psi_i^k(x, t) = a_i(t + \xi_i x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} (u_{ij}\psi_j^k)(y, t + \xi_i(x - y))\, dy,$$

$$\psi_n^k(x, t) = b_k(t + \xi_n x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} (u_{nj}\psi_j^k)(y, t + \xi_n(x - y))\, dy, \tag{5}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где

$$b_k(t) = a_k(t) + \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} [(u_{kj}\psi_j^k)(y, t - \xi_k y) - (u_{nj}\psi_j^k)(y, t - \xi_n y)\, dy.$$

Существование и единственность решений системы (5) в пространстве вектор-функций $\psi(x, t)$ с нормой

$$\| \psi \|_E = \max_{k=1,\ldots n} \operatorname{vrai}\sup_x \| \psi_k(x, \cdot) \|_{L_2}$$

следует из вольтерровости системы (5) по переменной t в силу леммы 1.2 [3].

В силу условий (2) из (5) получаем асимптотическое представление для $\psi_n^k(x, t)$ при $x \to +\infty$ вида (3):

$$\psi_n^k(x, t) = b_k(t + \xi_n x) + o(1), \ b_k(s) \in L_2(E), \ k = 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

На основании теоремы 1 согласно (6) каждой вектор-функции $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in L_2$, задающей падающие волны, соответствует $n-1$ решения системы (1) — решения соответствующих задач с граничными условиями (4). Эти $n-1$ решения определяют согласно (6) профили $n-1$ рассеянных волн $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in L_2$. Тем самым определен в пространстве $L_2(E, E_{n-1})$ оператор S, переводящий a в b: $b = Sa$. (7) Этот оператор называется оператором рассеяния для системы (1) на полуоси.

2. Интегральные представления решений. Допустимые решения системы (1) на полуоси можно выразить через их асимптотики (3) (т. е. функции $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$), через значения решений при $x = 0$ (т. е. через $\psi_1(0, t), \ldots, \psi_n(0, t)$) или через некоторые комбинации этих величин. С этой целью рассмотрим $2n$ вектор-функций

$$h^1(t) = \{\psi_1(0, t), \ \psi_2(0, t), \ldots, \psi_n(0, t)\}, \ \ h^k(t) = \{a_1, \ldots, a_{k-1}, \psi_k, \ldots \psi_n\}$$
$$(2 \leqslant k \leqslant n), \ h^{n+1}(t) = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, b\}, \ h^{n+k}(t) = \{\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, a_k, \ldots$$
$$\ldots, a_{n-1}, b\} \, (2 \leqslant k \leqslant n-1), \ h^{2n}(t) = \{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, b\}.$$

Лемма 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* (2). *Тогда для каждого допустимого решения справедливо интегральное представление*

$$\psi_i(x, t) = h_i^1(t + \xi_i x) + \int_{t+\xi_n x}^{t+\xi_1 x} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^1(x, t, s)\, h_j^1(s)\, ds, \tag{8}$$

$$\psi_i(x, t) = h_i^2(t + \xi_i x) + \int_{-\infty}^{t+\xi_1 x} A_{i1}^2(x, t, s)\, h_1^2(s)\, ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t+\xi_2 x} \sum_{j=2}^{n} A_{ij}^2(x, t, s)\, h_j^2(s)\, ds, \tag{9}$$

$$\psi_i(x,t) = h_i^k(t+\xi_i x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k-2} A_{ij}^k(x,t,s)\,h_j^k(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_{k-1}x} A_{i,k-1}^k(x,t,s)\,h_{k-1}^k(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_k x}\sum_{j=k}^{n} A_{ij}^k(x,t,s)\,h_j^k(s)\,ds,\quad 3\leqslant k\leqslant n, \tag{10}$$

$$\psi_i(x,t) = h_i^{n+1}(t+\xi_i x) + \int\limits_{t+\xi_1 x}^{+\infty} A_{i1}^{n+1}(x,t,s)\,h_1^{n+1}(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=2}^{n-1} A_{ij}^{n+1}(x,t,s)\,h_j^{n+1}(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_n x} A_{in}^{n+1}(x,t,s)\,h_n^{n+1}(s)\,ds, \tag{11}$$

$$\psi_i(x,t) = h_i^{n+k}(t+\xi_i x) + \int\limits_{t+\xi_{k-1}x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k-1} A_{ij}^{n+k}(x,t,s)\,h_j^{n+k}(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{t+\xi_n x}^{+\infty} A_{ik}^{n+k}(x,t,s)\,h_k^{n+k}(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{n} A_{ij}^{n+k}(x,t,s)\,h_j^{n+k}(s)\,ds,$$

$$2\leqslant k\leqslant n-1, \tag{12}$$

$$\psi_i(x,t) = h_i^{2n}(t+\xi_i x) + \int\limits_{t+\xi_{n-1}x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}^{2n}(x,t,s)\,h_j^{2n}(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{t+\xi_n x}^{+\infty} A_{in}^{2n}(x,t,s)\,h_n^{2n}(s)\,ds. \tag{13}$$

Ядра этих преобразований при фиксированном x суммируемы с квадратом по t, s, т. е. являются ядрами Гильберта — Шмидта, однозначно определяются коэффициентами $u_{ij}\ (x,t)$ системы (1). При произвольных $h_k(t)\in L_2(E,E_n)$ допустимые решения системы (1) выражаются формулами (8)— (13).

Доказательство теоремы аналогично методам работы [5].

3. Свойства оператора рассеяния. Интегральные представления (8)—(13) позволяют установить важные связи между компонентами векторов $h^i(t)$. Эта связь осуществляется при специальных предположениях с помощью вольтерровских операторов.

Лемма 2. *Для любых* $b_i\in L_2(E)$, $i=1,\ldots,n-1$,

$$\psi_p^p - \psi_q^p \equiv \psi_p^p(0,t) - \psi_q^p(0,t) = (I+A_{q+})(b_p-b_q),\quad p,q\in\{1,\ldots,n-1\}, \tag{14}$$

где

$$A_{mn+}^{n+1}b(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} A_{mn}^{n+1}(0,t,s)\,b(s)\,ds,\quad A_{q+} = A_{nn+}^{n+1} - A_{qn+}^{n+1}.$$

Доказательство. Полагая в представлении (11) $h^{n+1}=\{a_1,\ldots,a_{n-1},b_p\}$ и $h^{n+1}=\{a_1,\ldots,a_{n-1},b_q\}$, что соответствует решению p-й и q-й задач, путем вычитания получим

$$\psi_i^p-\psi_i^q = A_{in+}^{n+1}(b_p-b_q),\quad \psi_n^p-\psi_n^q = \psi_p^p-\psi_q^q = (I+A_{nn+}^{n+1})(b_p-b_q).$$

Отсюда (при $i=q$) следует равенство (14).

Лемма 3. *Если* $a_{k+1}=\ldots=a_{n-1}=b_1=\ldots=b_{k-1}=0$ $(2\leqslant k\leqslant n-2)$, *то*

$$\psi_1^i(0,t)=\ldots=\psi_{k-1}^i(0,t)=B_{1k-}a_k(t),\quad i=1,\ldots,k-1, \tag{15}$$

$$\psi_k^i(0,t) = (I+B_{2k-})\,a_k(t), \tag{16}$$

$$a_k(t) = (I + B_{k-})^{-1}(I + A_{k+})\, b_k(t), \tag{17}$$

где

$$B_{1k-} = \Big(I - \sum_{j=1}^{k-1} A_{nj-}^{n+k}\Big)^{-1} A_{nk-}^{n+k},\ \ B_{2k-} = A_{kk-}^{n+k} + \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj-}^{n+k} \times$$

$$\times \Big(I - \sum_{j=1}^{k-1} A_{nj-}^{n+k}\Big)^{-1} A_{nk-}^{n+k},\ \ B_{k-} = B_{2k-} - B_{1k-}.$$

Доказательство. Учитывая условие леммы, из (12) для первой задачи при $x = 0$ имеем

$$\psi_k^1(0, t) = (I + A_{kk+}^{n+k})\, a_k + \sum_{j=1}^{k-1} A_{kj-}^{n+k} \psi_j^1(0, t),$$

$$\psi_n^1(0, t) = A_{nk-}^{n+k} a_k + \sum_{j=1}^{k-1} A_{nj-}^{n+k} \psi_j^1(0, t),\ \ 2 \leqslant k \leqslant n - 2. \tag{18}$$

При $b_1 = \ldots = b_{k-1}$ из леммы 2 следует

$$\psi_1^i = \psi_2^i = \ldots = \psi_{k-1}^i,\ \ i = 1, \ldots, k - 1.$$

Учитывая это и $\psi_n^1(0, t) = \psi_1^1(0, t)$, из системы (18) получаем равенства (15) — (17).

Лемма 4. *Пусть* $b(t) \equiv b_1(t) = \ldots = b_{n-1}(t)$. *Тогда решения этих* $n - 1$ *задач совпадают. Если* $\alpha(t) \equiv \psi_k^1(0, t) = \ldots = \psi_k^{n-1}(0, t)$, *то*

$$\alpha(t) = (I + N_-)\, b(t), \tag{19}$$

$$\alpha(t) = (I + N_+)\, a_1(t), \tag{20}$$

где

$$N_+ = \Big(I - \sum_{j=2}^{n} A_{1j+}^2\Big)^{-1} (I + A_{11+}^2) - I,$$

$$N_- = (I - A_{nn-}^{2n})^{-1} \Big(I + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj-}^{2n}\Big) - I.$$

Доказательство. Пусть $b_1(t) = \ldots = b_{n-1}(t)$. Из леммы 2 следует $\psi_1^i(0, t) = \ldots = \psi_{n-1}^i(0, t) = \psi_n^i(0, t)$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$. Также из единственности задачи Коши для системы (1) получаем, что решения этих $n - 1$ задач совпадают. Остальные части доказательства вытекают из представлений (9) и (13).

Лемма 5. *Если* $b_k \neq 0$ *($k \neq n - 1$ фиксировано),* $b_i = 0$, $i \neq k$, *то*

$$\psi_k^i = (I + C_{k-})(I + A_{k+})\, b_k, \tag{21}$$

$$\psi_n^i = \psi_{n-1}^i = \psi_i^i = C_{k-}(I + A_{k+})\, b_k, \tag{22}$$

$$a_{n-1} = r_{k-}(I + A_{k+})\, b_k,\ \ k = 1, \ldots, n - 2, \tag{23}$$

а при $k = n - 1$, т. е. $b_{n-1} \neq 0$, $b_1 = \ldots = b_{n-2} = 0$,

$$\psi_n^i = \psi_i^i = C_{n-1-}(I + A_{n-1+})\, b_{n-1},\ \ i = 1, \ldots, n - 2, \tag{24}$$

$$\psi_{n-1}^i = (I + C_{n-1-})(I + A_{n-1+})\, b_{n-1}, \tag{25}$$

$$a_{n-1} = (I + B_{n-1-})(I + A_{n-1+}), \tag{26}$$

где

$$C_{k-} = (I - \widehat{C}_{k-})^{-1} - I,\ \ \widehat{C}_{k-} = \Big(I - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq k}}^{n-2} A_{n-1,j-}^{n+k}\Big)^{-1} \Big\{ A_{n-1,k-}^{n+k} +$$

$$+ (I + A^{n+k}_{n-1,n-1-}) \Big[\Big(I - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-}\Big)^{-1} (I + A^{n+k}_{n-1,n-1-}) -$$

$$- \Big(I - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n,n-1-}\Big]^{-1} \Big[\Big(I - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{nk-} -$$

$$- \Big(I - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n-1,k-}\Big]\Big\},$$

$$C_{n-1-} = (I - \widehat{C}_{n-1-})^{-1} - I, \quad \widehat{C}_{n-1-} = \Big(I - \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n,n-1-} \times$$

$$\times \Big[I + A^{n+k}_{n-1,n-1-} + \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-} \Big(I - \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n,n-1-}\Big];$$

$$\Gamma_{k-} = (I + A^{n+k}_{n-1,n-1-})^{-1} \Big[\Big(I - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-}\Big) \widehat{C}_{k-} - A^{n+k}_{n-1,k-}\Big] (I - \widehat{C}_{k-})^{-1},$$

$$k = 1, \ldots, n-2,$$

$$B_{n-1-} = \Big[I + A^{n+k}_{n-1,n-1-} + \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-} \Big(I - \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n,n-1-}\Big]^{-1} \times$$

$$\times (I - \widehat{C}_{n-1-})^{-1} - I.$$

Доказательство. В первом случае из (12) получаем

$$\psi^{i}_{n-1} = (I + A^{n+k}_{n-1,n-1-})\, a_{n-1} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-} \psi^{i}_{n-1} + A^{n+k}_{n-1,k-} \psi^{i}_{k},$$

$$\psi^{i}_{n} = \psi^{i}_{n-1} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-2} A^{n+k}_{nj-} \psi^{i}_{n-1} + A^{n+k}_{nk-} \psi^{i}_{k} + A^{n+k}_{n,n-1-} a_{n-1}. \qquad (27)$$

Решая эту систему, имеем $\psi^{i}_{n-1} = \widehat{C}_{k-} \psi^{i}_{k}$ или

$$\psi^{i}_{k} - \psi^{i}_{n-1} = \psi^{i}_{k} - \psi^{i}_{n} = \psi^{i}_{k} - \psi^{i}_{i} = (I - \widehat{C}_{k-})\, \psi^{i}_{k}. \qquad (28)$$

Сравнивая (14) и (27), получаем (21) и (22).
Равенство (23) также следует из (14), (27) и (28).

Во втором случае аналогично из (12) будем иметь

$$\psi^{i}_{n} = \Big(I - \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n,n-1-} a_{n-1},$$

$$\psi^{i}_{n-1} = \Big[I + A^{n+k}_{n-1,n-1-} + \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{n-1,j-} \Big(I - \sum_{j=1}^{n-2} A^{n+k}_{nj-}\Big)^{-1} A^{n+k}_{n,n-1-}\Big] a_{n-1}.$$

Отсюда $\psi^{i}_{n} = \widehat{C}_{n-1-} \psi^{i}_{n-1}$, или

$$\psi^{i}_{n-1} - \psi^{i}_{n} = (I - \widehat{C}_{n-1-})\, \psi^{i}_{n-1}. \qquad (29)$$

Сравнивая (14) и (29), получаем (24) и (25). Равенство (26) доказывается аналогично.

Лемма 6. *Если* $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$, *то*

$$\psi_i^i = (I - A_{in+}^n)^{-1} A_{i,n-1+}^n a_{n-1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{30}$$

$$\psi_{n-1}^{n-1} = (I - A_{n-1,n+}^n)^{-1} (I + A_{n-1,n-1+}^n) a_{n-1}. \tag{31}$$

Доказательство. Из представления (10) $(k = n)$ при $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$ для каждой задачи получаем

$$\psi_i^i = A_{i,n-1+}^n a_{n-1} + A_{in+}^n \psi_i^i, \ i = 1, \ldots, n-2,$$

$$\psi_{n-1}^{n-1} = (I + A_{n-1,n-1+}^n) a_{n-1} + A_{n-1,n+}^n \psi_{n-1}^{n-1}.$$

Решение этой системы имеет вид (30) и (31).

Установим свойства оператора рассеяния S.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (2). *Тогда оператор рассеяния задачи на полуоси имеет обратный* $S^{-1} = \| \gamma_{ij} \|_{i,j=1}^{n-1}$. *При этом* $S = I + F$, $S^{-1} = I + \mathfrak{I}$, *где* F *и* $\mathfrak{I}$ — *матричные интегральные операторы Гильберта—Шмидта. Матричные операторы* $\Delta_k = \| s_{ij} \|_{i,j=1}^{k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ *также обратимы. Более того, операторы*

$$(\gamma_{11} + \ldots + \gamma_{1,n-1})^{-1}, \ \gamma_{n-1,n-1}, \ s_{11}^{-1}, \ (\Delta_k^{-1})_{kk} \ (2 \leqslant k \leqslant n-2)$$

допускают левую факторизацию

$$(\gamma_{11} + \ldots + \gamma_{1,n-1})^{-1} = (I + N_-)^{-1} (I + N_+), \tag{32}$$

$$(\Delta_k^{-1})_{kk} = (I + B_{k-})^{-1} (I + A_{k+}), \ 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{33}$$

а операторы $s_{n-1,n-1} - s_{k,n-1}$ $(k = 1, \ldots, n-2)$, s_{k1} $(k = 2, \ldots, n-1)$, γ_{1k} $(k = 1, \ldots, n-1)$, $\gamma_{n-1,k}$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ *имеют вид*

$$s_{n-1,n-1} - s_{k,n-1} = I + G_{k+}, \tag{34}$$

$$s_{k1} = (I + A_{k+})^{-1} q_{k-} \quad (q_{k-} = A_{k1-}^{n+1} - A_{n1-}^{n+1}), \tag{35}$$

$$\gamma_{1k} = (I + N_+)^{-1} c_{k-} (I + A_{k+}) + \delta_{1k} I + t_{k+}, \tag{36}$$

$$\gamma_{n-1,k} = r_{k-} (I + A_{k+}). \tag{37}$$

Доказательство. Из представления (11), учитывая граничные условия (4) $(k = 1, \ldots, n-1)$, получаем равенства

$$b_1 = (I + A_{1+})^{-1} \left[(I + A_{11-}^{n+1} - A_{n1-}^{n+1}) a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} (A_{1j}^{n+1} - A_{nj}^{n+1}) a_j \right],$$

$$b_k = (I + A_{k+})^{-1} \Big[(A_{k1-}^{n+1} - A_{n1-}^{n+1}) a_1 + (I + A_{kk}^{n+1} - A_{nk}^{n+1}) a_k +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n-1} (A_{kj}^{n+1} - A_{nj}^{n+1}) a_j \Big], \ 2 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Отсюда и из определения оператора S имеем

$$s_{11} = (I + A_{1+})^{-1} (I + B_{1-}), \ s_{1p} = (I + A_{1+})^{-1} (A_{1p}^{n+1} - A_{np}^{n+1}) \ (p = 2, \ldots, n-1),$$

$$s_{k1} = (I + A_{k+})^{-1} (A_{k1-}^{n+1} - A_{n1-}^{n+1}), \ s_{kk} = (I + A_{k+})^{-1} (I + A_{kk}^{n+1} - A_{nk}^{n+1}),$$

$$s_{kp} = (I + A_{k+})^{-1} (A_{kp}^{n+1} - A_{np}^{n+1}), \ p \neq k, \ k = 2, \ldots, n-1,$$

где

$$B_{1-} = A_{11-}^{n+1} - A_{n1-}^{n+1}, \ \ A_{kp}^{n+1} a_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{kp}^{n+1}(0, t, s) a_p(s) \, ds.$$

Таким образом, установлена факторизация (33) ($k=1$) и свойство (35). Более того, показано, что $S=I+F$, где F — оператор Гильберта — Шмидта. Покажем теперь, что существует оператор S^{-1}. Пусть $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$, т. е. $Sa=0$. Из лемм 4,5 получаем $\alpha(t)=0$, $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Это означает, что S^{-1} существует и имеет вид $S^{-1} = I + \mathcal{J}$, где $\mathcal{J}$ — оператор Гильберта — Шмидта. Обратимость операторов Δ_k ($k = 2, \ldots, n-2$) доказывается аналогично.

Из леммы 5 соответственно получаем (по определению S^{-1}) (37) и (33) ($k = n \dot{-} 1$).

С другой стороны, из леммы 3 по определению $(\Delta_k^{-1})_{kk}$ следует (33) ($2 \leqslant k \leqslant n-2$).

Изучим свойство (36).

Пусть выполняются условия леммы 5. Тогда из представлений (9) при $b_1 \neq 0$, $b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$ имеем

$$\psi_1 = (I + A_{11+}^2)\, a_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 + \psi_2.$$

или

$$a_1 = (I + A_{11+}^2)^{-1} \left[\psi_1 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j+}^2 \psi_2\right] = (I + A_{11+}^2)^{-1} \Big(I + C_{1-} -$$

$$- \sum_{j=2}^{n} A_{1j+}^2 C_{1-}\Big)(I + A_{1+})\, b_1 = \Big[\Big(I + A_{11+}^2)^{-1}(I + A_{1+}) +$$

$$+ (I + A_{11+}^2)^{-1} \Big(I - \sum_{j=2}^{n} A_{1j+}^2\Big) C_{1-}(I + A_{1+})\Big]\, b_1.$$

Отсюда, учитывая (20), по определению S^{-1} имеем

$$\gamma_{11} = (I + N_+)^{-1} C_{1-}(I + A_{1+}) + (I + A_{11+}^2)^{-1}(I + A_{1+}). \tag{38}$$

Аналогично при $b_k \neq 0$, $b_i = 0$, $i \neq k$, $k \geqslant 2$ из (9) вытекает

$$\gamma_{1k} = (I + N_+)^{-1} C_{k-}(I + A_{k+}) - (I + A_{11+}^2)^{-1} A_{1k+}^2 (I + A_{1+}). \tag{39}$$

Обозначая $t_{1+} = (I + A_{11+}^2)^{-1}(I + A_{1+}) - I$, $t_{k+} = -(I + A_{11+}^2)^{-1} A_{1k+}^2 (I + A_{1+})$, $k = 2, \ldots, n-1$, из (38) и (39) получаем (36).

Докажем равенство (32), (34). Пусть $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} \equiv b$. В этом случае $a_1 = (\gamma_{11} + \gamma_{12} + \ldots + \gamma_{1,n-1})\, b$ и по лемме 4 $a_1 = (I + N_+)^{-1}(I + N_-)\, b$, т. е. справедливо равенство (32).

Пусть $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$. Из леммы 6

$$\psi_n^{n-1} - \psi_n^k = [(I - A_{n-1,n+}^n)^{-1}(I + A_{n-1,n-1+}^n) - (I - A_{kn+}^n)^{-1} A_{k,n-1+}^n]\, a_{n-1}.$$

С другой стороны, из (11) следует

$$\psi_n^{n-1} - \psi_n^k = (I + A_{nn+}^{n+1})(b_{n-1} - b_k).$$

Сравнив эти последние два равенства будем иметь

$$b_{n-1} - b_k = (I + A_{nn+}^{n+1})^{-1} [(I - A_{n-1,n+}^n)^{-1}(I + A_{n-1,n-1+}^n) -$$

$$- (I - A_{kn+}^n)^{-1} A_{k,n-1+}^n]\, a_{n-1},$$

т. е. $s_{n-1,n-1} - s_{k,n-1} = I + G_{k+}$, где

$$G_{k+} = (I + A_{nn+}^{n+1})^{-1} [(I - A_{n-1,n+}^n)^{-1}(I + A_{n-1,n-1+}^n) - (I - A_{kn+}^n)\, A_{k,n-1+}^n].$$

4. Обратная задача рассеяния. Обратная задача рассеяния для системы (1) состоит в восстановлении коэффициентов уравнений по известному оператору рассеяния S задачи на полуоси.

Обратную задачу рассеяния на полуоси с граничными условиями (4) сведем к обратной задаче для системы (1) на всей оси с дополнительным условием равенства нулю потенциала при $x < 0$.

Введем в рассмотрение оператор перехода Π, связывающий асимптотики $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ допустимого решения системы (1) с граничными значениями решения при $x = 0$, т. е. $(\psi_1(0, t), \ldots, \psi_n(0, t))$

$$\Pi \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(0, t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(0, t) \\ \psi_n(0, t) \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Теорема 3. *Пусть $S = \| s_{ij} \|_{i,j=1}^{n-1}$ — оператор рассеяния для системы* (1) *с коэффициентами $u_{ij}(x, t)$, удовлетворяющими условиям* (2). *Тогда оператор перехода Π выражается через элементы S, S^{-1} оператора рассеяния и вольтерровские операторы N_-, N_+, C_{k-} $(k = 1, \ldots, n-1)$ из факторизационных равенств* (32), (33) *следующим образом*:

$$\Pi = \begin{Bmatrix} I + C_{1-}, & \ldots, & C_{n-1-}, & I + N_- \\ C_{1-}, & \ldots, & C_{n-1-}, & I + N_- \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{1-}, & \ldots, & I + C_{n-1-}, & I + N_- \\ C_{1-}, & \ldots, & C_{n-1-}, & I + N_- \end{Bmatrix} \operatorname{diag}(I + A_{1+}, \ldots$$

$$\ldots, I + A_{n-1+}, I) \begin{pmatrix} S & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где

$$C_{1-} = [(I + N_+)\gamma_{11}(I + A_{1+})^{-1} - I]_-, \tag{42}$$

$$C_{k-} = [(I + N_+)\gamma_{1k}(I + A_{k+})^{-1}]_-, \quad k = 2, \ldots, n-1. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $\psi(x, t)$ является решением i-й задачи $(i = 2, \ldots, n-1)$ с $b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$. Тогда $a_1 = \gamma_{11} b_1, \ldots, a_{n-1} = \gamma_{n-1,1} b_1$, в силу леммы 5 $\psi_1(0, t)$ выражается через b_1 по формуле (21) $(k = 1)$, а $\psi_2(0, t) = \ldots = \psi_n(0, t)$ и выражается через b_1 по формуле (22). Подставляя эти значения в (40), имеем

$$\Pi \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{n-1,1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I + C_{1-})(I + A_{1+}) \\ \vdots \\ C_{1-}(I + A_{1+}) \\ C_{1-}(I + A_{1+}) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Аналогично, полагая $b_1 = b_{k-1} = b_{k+1} = 0$ $(k = 2, \ldots, n-1)$, $a_1 = \gamma_{1k} b_k, \ldots, a_{n-2} = \gamma_{n-2,k} b_k$, $a_{n-1} = \gamma_{n-1,k} b_k$, из леммы 5 получаем

$$\Pi \begin{Bmatrix} \gamma_{1k} \\ \vdots \\ \gamma_{kk} \\ \vdots \\ \gamma_{n-1,k} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{k-}(I + A_{k+}) \\ \vdots \\ (I + C_{k-})(I + A_{k+}) \\ \vdots \\ C_{k-}(I + A_{k+}) \end{Bmatrix}, \quad k = 2, \ldots, n-1. \tag{45}$$

Полагая $b_1 = \ldots = b_{n-1} \equiv b$, т. е. $a_1 = (\gamma_{11} + \ldots + \gamma_{1n}) b, \ldots, a_{n-1} = (\gamma_{n-1,1} + \ldots + \gamma_{n-1,n-1}) b$, из леммы 4 получаем

$$\Pi \begin{pmatrix} \gamma_{11} + \ldots + \gamma_{1,n-1} \\ \vdots \\ \gamma_{n-1,1} + \ldots + \gamma_{n-1,n-1} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + N_- \\ \vdots \\ I + N_- \\ I + N_- \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Объединяя равенства (44)—(46) в одно матричное равенство, получаем

$$\Pi\begin{pmatrix}\gamma_{1,n-1}, & \ldots, & \gamma_{n-1,1}, & \gamma_{11}+\ldots+\gamma_{1,n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{1,n-1}, & \ldots, & \gamma_{n-1,n-1}, & \gamma_{n-1,1}+\ldots+\gamma_{n-1,n-1}\\ 0, & \ldots, & 0, & I\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}I+C_{1-}, & \ldots, & C_{n-1-}, & I+N_{-}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ C_{1-}, & \ldots, & 1+C_{n-1-}, & I+N_{-}\\ C_{1-}, & \ldots, & C_{n-1-}, & I+N_{-}\end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix}\gamma_{11}, & \ldots, & \gamma_{n-1,1}, & \gamma_{11}+\ldots+\gamma_{1,n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \gamma_{1,n-1}, & \ldots, & \gamma_{n-1,n-1}, & \gamma_{n-1,1}+\ldots\gamma_{n-1,n-1}\\ 0, & \ldots, & 0, & I\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}s_{11}, & \ldots, & s_{1,n-1}, & -I\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{n-1,1}, & \ldots, & s_{n-1,n-1}, & -I\\ 0, & \ldots, & 0, & I\end{pmatrix},$$

то равенство (47) приводит к (41).

Равенство (42) следует из (38), а равенство (43) из (39).

Оператор перехода Π, введенный равенством (40), тесно связан с оператором рассеяния для гиперболической системы во всей плоскости (x, t). Действительно, сделав замену переменных $x \to -t$, $t \to x$ и продолжив коэффициенты в системе (1) тождественным нулем при $x < 0$, получаем, что оператор перехода для исходной системы совпадает с оператором рассеяния для преобразованной системы. Поскольку для гиперболических систем первого порядка на всей оси обратная задача разрешима и подробно изложена в [2, 3], то используя равенство (41), приходим к следующему результату в обратной задаче рассеяния для системы (1) на полуоси $x \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть потенциал $U(x, t)$ в системе* (1) *удовлетворяет условиям* (2). *Тогда по оператору рассеяния S для системы* (1) *на полуоси коэффициенты $u_{ij}(x, t)$ определяются однозначно.*

Формулы (32), (33), (42), (43), (41) вместе с процедурой решения обратной задачи на всей оси составляют алгоритм решения обратной задачи рассеяния для системы (1) на полуоси.

1. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев : Наук. думка, 1973.— 182 с.
2. *Нижник Л. П., Тарасов В. Г.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы уравнений // Докл. АН СССР.— 1977.— 233, № 3.— С. 300—303.
3. *Нижник Л. П., Тарасов В. Г.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы уравнений // Прямые и обратные задачи рассеяния.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 61—76.
4. *Искендеров Н. Ш.* Прямая и обратная задачи рассеяния для системы трех гиперболических уравнений первого порядка на полуоси с заданными рассеянными волнами.— Киев, 1985.— 20 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85—87).
5. *Нижник Л. П., Искендеров Н. Ш.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы трех уравнений первого порядка на полуоси // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 7.— С. 931—938.
6. *Искендеров Н. Ш.* Обратная задача рассеяния для системы четырех гиперболических уравнений первого порядка на полуоси.— Киев, 1988.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.38).
7. *Искендеров Н. Ш.* Задача рассеяния для гиперболической системы четырех уравнений первого порядка на полуоси // Граничные задачи для дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 53—55.

Получено 23.10.90