УДК 517.977

О. И. КУШЛЫК, асп. (Киев. ун-т)

О задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями для линейной системы уравнений с запаздыванием

Рассматривается задача оптимального управления для одной линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, для которой начальная функция на начальном множестве является управляемой. На траекторию движения объекта наложены фазовые ограничения с переменными моментами времени. Получены необходимые условия оптимальности управлений в допустимых классах.

Розглядається задача оптимального керування для однієї лінійної системи диференціальних рівнянь з запізненням, для якої початкова функція на початковій множині є керованою. На траєкторію руху об'єкту накладено фазові обмеження зі змінними моментами часу. Одержано необхідні умови оптимальності керувань в припустимих класах.

Рассмотрим объект, поведение которого описывается линейной системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{l=0}^{s} A_l x(t - \Delta_l) + u(t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор в пространстве R^n, A_l, $j = 0, \ldots, s$, — квадратные матрицы размера $(n \times n)$, Δ_l — вещественные постоянные, $0 = \Delta_0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_s$. Управление $u(t)$ — допустимое управление в U, т. е. $u(t)$ — это измеримая функция, причем для каждого $tu(t)$ принадлежит выпуклому компактному множеству U, $U \subset R^n$.

Для однозначного определения траектории движения $x(t)$ объекта уравнения (1) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ необходимо задать начальную функцию $\varphi(t)$ на начальном множестве $-\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$. Полагаем, что $\varphi(t)$, $-\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$, является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Cx(t) + Dv(t), \ -\Delta_s \leqslant t \leqslant 0, \tag{2}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор в пространстве R^n, $x(-\Delta_s) = x_{\Delta_s} = \text{const}$, C — $(n \times n)$-матрица, а D — $(n \times r)$-матрица. Допустимое управление $v(t)$ определено на некотором выпуклом компактном множестве V, $V \subset R^r$.

Исследуем задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями. Пусть в пространстве $R^n \times [0, T]$ заданы непустые множества N_i, $i = 1, \ldots, m$, такие, что $x_0 = \vec{0} \in N_i$, $i = 1, \ldots, m$, и $N_i \bigcap\limits_{i \neq j} N_j = \varnothing$. Эти множества описываются неравенствами вида $W_i(x, t) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, где $x \in R^n$, $t \in [0, T]$. Известно, существуют такие моменты времени, что траектория движения объекта (1), (2) достигает каждого из заданных множеств. Здесь $W_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, m$, — дважды дифференцируемая функция своих аргументов.

Среди всех допустимых управлений $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и $v(t)$, $-\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$, необходимо найти такие и определить моменты времени t_i, $i = 1, \ldots, m$, что соответствующая им траектория $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяет условиям:

$$1)\ W_i(x(t_i), t_i) \leqslant 0, \ i = 1, \ldots, m; \tag{3}$$

$$2)\ \text{функционал} \int_0^T y^*(t)\, x(t)\, dt \tag{4}$$

достигает на них своего минимума. Здесь $y(t)$ — непрерывная вектор-функция из пространства R^n, звездочка означает транспонирование.

Теорема. *Для того чтобы допустимые управления $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и $v_0(t)$, $-\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$, были решением поставленной задачи, необходимо существование таких неотрицательных чисел λ_0, λ_i, $i = 1, \ldots, m$ (причем λ_0, λ_i, $1 = i, \ldots, m$, не все равны нулю), вектор-функций $\Phi_{1l}^*(\tau)$, $l = 1, \ldots, s$, $\Phi_2^*(\tau)$, определенных соответственно для управлений $v(t)$, $-\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$, и $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, чтобы выполнялись условия:*

$$1) \quad \left[\sum_{l=1}^{s-1} \int_{-\Delta_l}^{0} \Phi_{1l}^*(\tau) + \int_{-\Delta_s}^{0} \Phi_{1s}^*(\tau)\right] Dv_0(\tau)\, d\tau =$$

$$= \min_{v(\tau)\in V} \left[\sum_{l=1}^{s-1} \int_{-\Delta_l}^{0} \Phi_{1l}^*(\tau) + \int_{-\Delta_s}^{0} \Phi_{1s}^*(\tau)\right] Dv(\tau)\, d\tau,$$

$$\int_0^T \Phi_2^*(\tau)\, u_0(\tau)\, d\tau = \min_{u(\tau)\in V} \int_0^T \Phi_2^*(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

для почти всех τ, где τ определено на соответствующих интервалах;

2) *вектор-функции $\Phi_{1l}^*(\tau)$, $l = 1, \ldots, s$, $\Phi_2^*(\tau)$ являются решением системы сопряженных дифференциальных уравнений, причем $\Phi_2(T) = 0$;*

3) *в моменты времени t_i, $i = 1, \ldots, m$, выполняются равенства*

$$\frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial t} + \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x} \dot{x}_0(t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Рассмотрим поведение функционалов $W_i \times (x(t_i), t_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Для уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента матрица Коши $K(t, \tau)$ [1, С. 20] зависит от разности аргументов $K(t, \tau) = \tilde{K}(t - \tau)$. Тогда, согласно [2, с. 343, решение $x(t)$ для (1) записывается через управление $u(t)$ в таком виде:

$$x(t) = K(t, 0)\,\varphi(0) + \int_0^T K(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau + \sum_{l=1}^{s} \int_{-\Delta_l}^{0} K(t, \tau + \Delta_l)\, A_l \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где $K(t, \tau)$ — матрица Коши, удовлетворяющая однородной системе

$$K_t'(t, \tau) = \sum_{l=0}^{s} A_l K(t, \tau - \Delta_l)$$

с разрывными начальными условиями

$$K(t, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant T, \\ E, & t = \tau, \end{cases}$$

E — единичная матрица.

В формуле (5) начальная функция $\varphi(t)$ согласно известной формуле Коши [3, с. 84] выражает решение системы уравнений (2) через управление $v(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \exp(C(t + \Delta_s))\, x_{-\Delta_s} + \int_{-\Delta_s}^{t} \exp(C(t - \tau))\, Dv(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Таким образом, $W_i(x(t_i), t_i)$, $i = 1, \ldots, m$, — это функционалы над пространством управлений и временем.

Пусть $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и $v_0(t)$, $\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$, — оптимальные для данной задачи управления, $x_0(t)$ — соответствующая им траектория. Рассмотрим вариацию $W_i(x(\cdot), t_i)$, где t_i — один из моментов времени, удовлетворяющий (3),

$$W_i(x_0(t_i+\delta t_i)+\delta x(t_i+\delta t_i),\ t_i+\delta t_i)-W_i(x_0(t_i),\ t_i)=$$
$$=\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial t}\delta t_i+\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\delta x(t_i)+$$
$$+\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\dot{x}_0(t_i)\delta t_i+o(\delta t_i)+o(\delta x(t_i)). \qquad (7)$$

Легко видеть, что в данном случае применима теорема 4. 2 [4, с. 71]. Рассмотрим в качестве множества M_1 множество допустимых управлений U, в качестве M_2 — соответственно V. Тогда в силу выпуклости множеств U, V в качестве конусов K_{M_1} и K_{M_2} можно рассматривать $K_{M_1}=\{g_1(t):g_1(t)=l_1(u(t)-u_0(t)),\ l_1\geqslant 0,\ u(t)$ — допустимое управление$\}$, $K_{M_2}=\{g_2(t):g_2(t)=l_2(v(t)-v_0(t)),\ l_2\geqslant 0,\ v(t)$ — допустимое управление$\}$, где $u_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, и $v_0(t)$, $-\Delta_s\leqslant t\leqslant 0$, — оптимальные для данной задачи управления. Определим конус K_M в виде

$$K_M=\{(g_2(t),\ g_1(t)):g_2(t)\in K_{M_2},\ g_1(t)\in K_{M_1}\}.$$

Применяя теорему 4.2 из [4] можем утверждать: для того чтобы допустимые управления $u_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, и $v_0(t)$, $-\Delta_s\leqslant t\leqslant 0$, и соответствующая им траектория $x_0(t)$ были оптимальными, необходимо, чтобы нашлись такие числа $\lambda_0\geqslant 0$, $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,m$ (причем λ_0, λ_i, $i=1,\ldots,m$, не все равны нулю), что

$$\lambda_0\int_0^T y^*(t)\,\delta x(t)\,dt+\sum_{i=1}^m\lambda_i\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\delta x(t_i)+$$
$$+\sum_{i=1}^m\lambda_i\left\{\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial t}+\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\dot{x}_0(t_i)\right\}\delta t_i+$$
$$+o(\delta(t_i))+o(\delta x(t_i))\geqslant 0 \qquad (8)$$

для всех $\delta x(t)$, $\delta x(t_i)$, $\delta t_i\in[0,T]$, $i=1,\ldots,m$, или, что эквивалентно, для всех $\delta x(t)=x(t)-x_0(t)$, $\delta x(t_i)=x(t_i)-x_0(t_i)$, δt_i, $i=1,\ldots,m$, где $x(t)$ — траектория, соответствующая допустимым управлениям $u(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $v(t)$, $-\Delta_s\leqslant t\leqslant 0$, из конуса K_M.

Поскольку вариации траектории и времени можно считать независимыми, то (8) переписывается в виде двух неравенств

$$\lambda_0\int_0^T y^*(t)\,\delta x(t)\,dt+\sum_{i=1}^m\lambda_i\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\delta x(t_i)\geqslant 0, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i\left(\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial t}+\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\dot{x}_0(t_i)\right)\delta t_i\geqslant 0. \qquad (10)$$

Поскольку $\lambda_i\geqslant 0$, а вариации по времени могут принимать разные знаки, то из неравенства (10) следует, что моменты времени t_i, $i=1,\ldots,m$, удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial t}+\frac{\partial W_i(x_0(t_i),\ t_i)}{\partial x}\dot{x}_0(t_i)=0,\ i=1,\ldots,m. \qquad (11)$$

Этим доказано условие (3) теоремы.

Рассмотрим функции $e(t,\tau)=\begin{cases}1, & \tau\leqslant t,\\ 0, & \tau\geqslant t,\end{cases}$ и $z^*(t)=\int_0^t y^*(\tau)\,d\tau$; тогда (9) будет иметь вид

$$\lambda_0 \int_0^T y^*(t)\,\delta x(t)\,dt + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x}\,\delta x(t_i) =$$

$$= \lambda_0 \int_0^T dz^*(t)\,\delta x(t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x} \int_0^T \delta x(t)\,\delta(t - t_i)\,dt =$$

$$= \int_0^T d\nu^*(t)\,\delta x(t),$$

где

$$\nu^*(t) = \lambda_0 z^*(t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x}\, e(t, t_i), \tag{12}$$

$$\int_0^T \delta x(t)\,\delta(t - t_i)\,dt = \delta x(t_i). \tag{13}$$

Таким образом, (9) эквивалентно неравенству

$$\int_0^T d\nu^*(t)\,\delta x(t) \geqslant 0, \tag{14}$$

где $\nu^*(t)$ определено формулой (12).

Учитывая формулу (5), имеем

$$\delta x(t) = K(t, 0) \int_{-\Delta_s}^{0} \exp(-C\tau)\, D(v(\tau) - v_0(\tau))\,d\tau + \int_0^{\tau} K(t, \tau)(u(\tau) -$$

$$- u_0(\tau))\,d\tau + \sum_{l=1}^{s} \int_{-\Delta_l}^{0} K(t, \tau + \Delta_l)\, A_l \int_{-\Delta_s}^{\tau} \exp(C(\tau - \tau_1))\, D(v(\tau_1) -$$

$$- v_0(\tau_1))\,d\tau_1 d\tau. \tag{15}$$

Подставив выражение для $\delta x(t)$, определяемое (15), в (14) и поменяв порядок интегрирования согласно теореме Фубини [5, с. 208], приведем (14) к виду

$$\Big[\sum_{l=1}^{s-1} \int_{-\Delta_l}^{0} \Phi_{1l}^*(\tau) + \int_{-\Delta_s}^{0} \Phi_{1s}^*(\tau)\Big] D(v(\tau) - v_0(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \int_0^T \Phi_2^*(\tau)(u(\tau) - u_0(\tau))\,d\tau \geqslant 0, \tag{16}$$

где вектор-функции $\Phi_{1l}^*(\tau)$, $l = 1, \ldots, s-1$, $\Phi_{1s}^*(\tau)$, $\Phi_2^*(\tau)$ имеют вид

$$\Phi_{1l}^*(\tau) = \int_0^T d\nu^*(t) \exp(-C\tau) \int_{\tau}^{0} K(t, \tau_1 + \Delta_l)\, A_l \exp(C\tau_1)\,d\tau_1, \quad l = 1, \ldots, s-1, \tag{17}$$

$$\Phi_{1s}^*(\tau) = \int_0^T d\nu^*(t) \exp(-C\tau) \int_{\tau}^{0} K(t, \tau_1 + \Delta_s)\, A_s \exp(C\tau_1)\,d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^T d\nu^*(t)\, K(t, 0) \exp(-C\tau), \tag{18}$$

$$\Phi_2^*(\tau) = \int_0^T d\nu^*(t)\, K(t, \tau). \tag{19}$$

Из (16) следует, что оптимальные управления $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и $v_0(t)$, $-\Delta_s \leqslant t \leqslant 0$, должны удовлетворять следующим условиям:

$$\int_0^T \Phi_2^*(\tau) u_0(\tau) d\tau = \min_{u(\tau)\in U} \int_0^T \Phi_2^*(\tau) u(\tau) d\tau,$$

$$\left[\sum_{l=1}^{s-1} \int_{-\Delta_l}^{0} \Phi_{1l}^*(\tau) + \int_{-\Delta_s}^{0} \Phi_{1s}^*(\tau)\right] D v_0(\tau) d\tau =$$

$$= \min_{v(\tau)\in V} \left[\sum_{l=1}^{s-1} \int_{-\Delta_l}^{0} \Phi_{1l}^*(\tau) + \int_{-\Delta_s}^{0} \Phi_{1s}^*(\tau)\right] D v(\tau) d\tau. \qquad (20)$$

Таким образом, доказаны условия 1 теоремы.

Рассмотрим свойства полученных в явном виде функций $\Phi_{1l}^*(\tau)$, $l = 1, \ldots, s$, $\Phi_2^*(\tau)$. В точках, где эти функции дифференцируемы, вычислим производную: для функций $\Phi_{1l}^*(\tau)$, $l = 1, \ldots, s$, она имеет вид

$$\frac{d\Phi_{1l}^*(\tau)}{d\tau} = -C^*\Phi_{1l}(\tau) - A_l^*\Phi_2(\tau + \Delta_l), \; -\Delta_l \leqslant \tau \leqslant 0, \; l = 1, \ldots, s, \qquad (21)$$

Из (17), (18), (19) следует, что в точке 0 выполняется равенство $\Phi_{1l}(0) = \Phi_2(0)$, $l = 1, \ldots, s$.

Рассмотрим теперь производную для вектор-функции $\Phi_2^*(\tau)$. Из формулы (19) следует, что надо дифференцировать матрицу Коши $K(t, \tau)$ по второму аргументу. Известно [2, с. 341], что $K(t, \tau)$ при $t = \mathrm{const}$ как функция τ удовлетворяет сопряженному уравнению. Систему сопряженных уравнений для (1) можно записать в следующем виде:

$$-K_\tau'(t, \tau) = K(t, \tau) A_0 + \sum_{l=1}^{s} K(t, \tau + \Delta_l) A_l + \delta(\tau - t), \; 0 \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_s, \qquad (22)$$

$$-K_\tau'(t, \tau) = \sum_{l=0}^{j} K(t, \tau + \Delta_l) A_l + \delta(\tau - t), \; T - \Delta_{j+1} \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_j,$$

$$j = 0, \ldots, s - 1. \qquad (23)$$

Пусть $0 \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_s$, тогда

$$d\Phi_2^*(\tau) = \int_0^{T-\Delta_s} d\nu^*(t) K_\tau'(t, \tau) = \int_0^{T-\Delta_s} d\nu^*(t) \Big(-K(t, \tau) A_0 -$$

$$- \sum_{l=1}^{s} K(t, \tau + \Delta_l) A_l - \delta(\tau - t) \Big) = -\lambda_0 y^*(\tau) - \Phi_2^*(\tau) A_0 -$$

$$- \sum_{l=1}^{s} \Phi_2^*(\tau + \Delta_l) A_l.$$

После транспонирования получим

$$\frac{d\Phi_2(\tau)}{d\tau} = -\lambda_0 y(\tau) - \sum_{l=0}^{s} A_l^* \Phi_2(\tau + \Delta_l). \qquad (24)$$

В точках разрыва единичных функций для $0 \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_s$ функция $\Phi_2(\tau)$ терпит разрыв, причем в силу определения их справедлива формула

$$\Phi_2(t_i + 0) - \Phi_2(t_i - 0) = \lambda_i \frac{\partial W_i(x_0(t_i), t_i)}{\partial x}. \qquad (25)$$

Аналогично, из вида сопряженного уравнения (23) следует, что при $T - \Delta_{j+1} \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_j$, $j = 0, \ldots, s-1$, производная для вектор-функции $\Phi_2(\tau)$ записывается следующим образом:

$$\frac{d\Phi_2(\tau)}{d\tau} = -\lambda_0 y(\tau) - \sum_{l=0}^{j} A_l^* \Phi_2(\tau + \Delta_l), \; T - \Delta_{j+1} \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_j,$$

$$j = 0, \ldots, s-1. \qquad (26)$$

В точках t_i, принадлежащих интервалу изменения τ, $T - \Delta_{j+1} \leqslant \tau \leqslant \leqslant T - \Delta_j$, $j = 0, \ldots, s-1$, скачки определяются формулой (25).

В точке $\tau = T$ $\Phi_2(T) = 0$, поскольку $K(t, T) = 0$ при $t < T$.

Таким образом, вектор-функции $\Phi_{1l}^*(\tau)$, $l = 1, \ldots, s$, $\Phi_2^*(\tau)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\Phi_{1l}(\tau)}{d\tau} = -C^*\Phi_{1l}(\tau) - A_l^*\Phi_2(\tau + \Delta_l), \; -\Delta_l \leqslant \tau \leqslant 0, \; l = 1, \ldots, s,$$

$$\frac{d\Phi_2(\tau)}{d\tau} = -\lambda_0 y(\tau) = \sum_{l=0}^{s} A_l^*\Phi_2(\tau + \Delta_l), \; 0 \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_s,$$

$$\frac{d\Phi_2(\tau)}{d\tau} = -\lambda_0 y(\tau) - \sum_{l=0}^{j} A_l^*\Phi_2(\tau + \Delta_l), \; T - \Delta_{j+1} \leqslant \tau \leqslant T - \Delta_j,$$

$$j = 0, \ldots, s-1,$$

причем $\Phi_2(T) = 0$. Теорема доказана.

1. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М. : Наука, 1969. — 287 с.
2. *Зверкин А. М.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Пятая летняя математическая школа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1968.— С. 307—399.
3. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 387 с.
4. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 141 с.
5. *Данфорд Н., Щварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.

Получено 02.04.90