УДК 519.21

М. В. ЭНДЖИРГЛИ, асп. (Киев. ун-т)

Об оценках распределения супремума одного класса стационарных случайных процессов

При условиях, обеспечивающих равномерную сходимость по вероятности спектральных представлений, получены оценки для распределения супремума вещественных стационарных процессов таких, что соответствующие им спектральные процессы принадлежат пространству $\overline{\mathrm{Sub}}_{\Phi}(\Omega)$.

В умовах, що забезпечують рівномірну збіжність за ймовірністю спектральних зображень, одержано оцінки для розподілу супремуму дійсних стаціонарних процесів таких, що відповідні спектральні процеси належать простору $\overline{\mathrm{Sub}}_{\Phi}(\Omega)$.

Настоящая работа является обобщением работы [1].

Пусть $\xi(t)$ — стационарный процесс такой, что $M\xi(t) = 0$,

$$M\xi(t+\tau)\,\xi(t) = R(\tau) = \int_0^\infty \cos\lambda\tau dF(\lambda),$$

$F(\lambda)$ — спектральная функция процесса $\xi(t)$. Предполагается, что $F(\lambda)$ непрерывна, $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$, $1 - F(\lambda) > 0$, $\lambda < \infty$. Процесс $\xi(t)$

© М В ЭНДЖИРГЛИ, 1991

представим в виде стохастического интеграла в среднем квадратическом

$$\xi(t) = (\text{с. к.}) \int_0^\infty \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + (\text{с. к.}) \int_0^\infty \sin \lambda t d\eta_2(\lambda), \tag{1}$$

где $\eta_i(\lambda)$ — ортогональные процессы с ортогональными приращениями,

$$M\eta_i(\lambda) = 0, \quad M|d\eta_i(\lambda)|^2 = dF(\lambda), \quad i = 1, 2.$$

Предполагается, что $\eta_i(\lambda)$ принадлежат пространству $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, т. е. по определению $M\eta_i(\lambda) = 0$ и для всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, u_1, \ldots, u_n$

$$M \exp\left\{\sum_{j=1}^n \eta_i(\lambda_j) u_j\right\} \leqslant \exp\left\{\varphi\left(\left(\sum_{j,k=1}^n u_j u_k M\eta_i(\lambda_j)\eta_i(\lambda_k)\right)^{1/2}\right)\right\}, \quad i = 1, 2,$$

где $\varphi(\cdot)$ — N-функция Орлича [2, с. 16] такая, что $\varphi(x) = x^2/2$, $|x| \leqslant x_0$. Пространства $\overline{\mathrm{Sub}}_\varphi(\Omega)$ рассмотрены в [3], в субгауссовском случае — в [4].

Случайные процессы $\eta_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, можно считать измеримыми, поэтому рассмотрим интегралы вида $\oint_a^b B(\lambda)\, d\eta_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, где $B(\lambda)$—функция ограниченной вариации, которые согласно [5] понимаются следующим образом:

$$\oint_a^b B(\lambda)\, d\eta_i(\lambda) = \eta_i(\lambda) B(\lambda)\Big|_a^b - \int_a^b \eta_i(\lambda)\, dB(\lambda),$$

где $\int_a^b \eta_i(\lambda)\, dB(\lambda)$, $i = 1, 2,$ — интегралы Лебега — Стилтьеса по обобщенной мере, порожденной функцией $B(\lambda)$.

Обозначим

$$S_a^b(t) = \oint_a^b \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \oint_a^b \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

$$R_a^b(t) = \oint_a^b f(\lambda) \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_a^b f(\lambda) \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

где $f(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$ — непрерывная, монотонно неубывающая функция.

В рассматриваемом случае интегралы $S_a^b(t)$ и $R_a^b(t)$ совпадают с вероятностью единица с соответствующими интегралами в среднем квадратическом (см. лемму 2 [5]). Ниже получены условия, обеспечивающие равномерную сходимость по вероятности с весом $c(t) = \left(\frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t}\right)^2$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, интегралов $S_0^b(t)$ при $b \to \infty$ к $\xi(t)$. Определим норму непрерывной, ограниченной на $\mathbb{R}$ функции обычным образом: $\|g(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(t)|$.

Лемма 1. *Для всех* $v < 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ *и любой непрерывной, монотонно неубывающей функции* $f(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, *справедливо неравенство*

$$M \exp\left\{v \left\| c(t) R_a^b(t) \right\|\right\} \leqslant \frac{\pi(b+1)}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta}\left(\int_a^b f^2 dF\right)^{1/2}\right)\right\}. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что $c(t) R_a^b(t)$ — функция экспоненциального типа $b + 2\varepsilon$, ограниченная на вещественной оси. Используя неравенство Бернштейна [6, с. 183], можно показать (см. лемму 2 [1]), что для любого $0 < \theta < 1$

$$\frac{2\theta}{b+2\varepsilon}\left(\exp\{v\|c(t) R_a^b(t)\|\} - 1\right) \leqslant \int_{-\infty}^\infty |c(t)| \left(\exp\left\{\frac{v}{1-\theta}|R_a^b(t)|\right\} - 1\right) dt. \tag{3}$$

Нетрудно доказать, что $R_a^b(t)$ принадлежит пространству $\overline{\mathrm{Sub}_\varphi}(\Omega)$. Поэтому в силу того, что для произвольной случайной величины ξ

$$M\exp\{v\,|\,\xi\,|\}\leqslant M\exp\{-v\xi\}+M\exp\{v\xi\}$$

и функция $\varphi(\cdot)$ четна [2, с. 17], из (3) следует

$$M\exp\{v\,\|\,c(t)\,R_a^b(t)\,\|\}-1\leqslant\frac{b+2\varepsilon}{2\theta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\,c(t)\,|\left(M\exp\left\{\frac{v}{1-\theta}\,|\,R_a^b(t)\,|\right\}-1\right)\times$$

$$\times\,dt\leqslant\frac{b+1}{\theta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\,c(t)\,|\left(\exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta}\,(M\,(R_a^b(t))^2)^{1/2}\right)\right\}-1\right)dt.$$

Заметим, что $M\,(R_a^b(t))^2=\int\limits_a^b f^2dF$, а следовательно,

$$M\exp\{v\,\|\,c(t)\,R_a^b(t)\,\|\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{b+1}{\theta}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\,c(t)\,|\,dt\cdot\left(\exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta}\Big(\int\limits_a^b f^2dF\Big)^{1/2}\right)\right\}-1\right)+1.$$

Отсюда следует (2), так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\,c(t)\,|\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}\right)^2dt=\frac{\pi}{\varepsilon}\,.$$

Лемма 2. *Для любой непрерывной, монотонно неубывающей функции $f(\lambda)>0$, $\lambda>0$, и любых $v>0$, $0<\theta<1$, $0<\varepsilon\leqslant 1/2$ справедливо неравенство*

$$M\exp\{v\,\|\,c(t)\,S_a^b(t)\,\|\}\leqslant\frac{\pi}{\theta\varepsilon}\exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta}\,(D_1(a,b)+D_2(a,b))\right)+\right.$$

$$\left.+\,2\,\frac{v}{1-\theta}\,(D_3(a,b)+D_4(a,b))\right\},\qquad(4)$$

$$D_1(a,b)=\int\limits_a^b\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}d\,(-f^{-1}(u)),\quad D_2(a,b)=\Big(\int\limits_a^b f^2dF\Big)^{1/2}f^{-1}(b),$$

$$D_3(a,b)=\int\limits_a^b\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}\frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\,d\,(-f^{-1}(u)),$$

$$D_4(a,b)=\Big(\int\limits_a^b f^2dF\Big)^{1/2}\frac{\ln(b+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(b+1))}\,f^{-1}(b),$$

где $\varphi^{(-1)}(\cdot)$ — функция, обратная к $\varphi(\cdot)$.

Доказательство. Так как

$$S_a^b(t)=\int\limits_a^b R_a^u(t)\,d\,(-f^{-1}(u))+R_a^b(t)\,f^{-1}(b),$$

то в силу неравенства Гельдера для $\alpha_1>1$, $\alpha_2>1$, $1/\alpha_1+1/\alpha_2=1$, справедливо неравенство

$$M\exp\{v\,\|\,c(t)\,S_a^b(t)\,\|\}\leqslant I_1^{1/\alpha_1}\cdot I_2^{1/\alpha_2},\qquad(5)$$

где

$$I_1=M\exp\left\{\alpha_1 v\int\limits_a^b\|\,c(t)\,R_a^u(t)\,\|\,d\,(-f^{-1}(u))\right\},$$

$$I_2=M\exp\{\alpha_2 v\,\|\,c(t)\,R_a^b(t)\,\|\,f^{-1}(b)\}.$$

Рассмотрим функцию $p(u) > 0$ такую, что $\int\limits_a^b p(u)\, d(-f^{-1}(u)) \leqslant 1$. Тогда в силу леммы 1 из [1] и неравенства (2) имеем

$$I_1 \leqslant \exp\left\{\int\limits_a^b \ln(M \exp(\alpha_1 v \| c(t) R_a^u(t) \| p^{-1}(u)))\, p(u)\, d(-f^{-1}(u))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\int\limits_a^b \ln\left(\frac{\pi(u+1)}{\theta\varepsilon} \exp\left(\varphi\left(\frac{\alpha_1 v}{1-\theta}\left(\int\limits_0^u f^2 dF\right)^{1/2} p^{-1}(u)\right)\right)\right) p(u)\, d(-f^{-1}(u))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\left(\ln(u+1) + \varphi\left(\frac{\alpha_1 v}{1-\theta}\left(\int\limits_0^u f^2 dF\right)^{1/2} p^{-1}(u)\right)\right) p(u)\, d(-f^{-1}(u))\right\}. \quad (6)$$

Обозначим

$$V(u) = \frac{\alpha_1 v}{1-\theta}\left(\int\limits_0^u f^2 dF\right)^{1/2}, \quad \nu = \varphi\left(\int\limits_a^b V(u)\, d(-f^{-1}(u))\right).$$

Положим

$$p(u) = \frac{V(u)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1) + \nu)}. \quad (7)$$

При таком выборе $p(u)$ всегда $\int\limits_a^b p(u)\, d(-f^{-1}(u)) \leqslant 1$. Из (6) с учетом (7) и приведенных выше обозначений легко получить, что

$$I_1 \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\nu \cdot \int\limits_a^b \frac{V(u)}{\varphi^{(-1)}(\nu + \ln(u+1))}\, d(-f^{-1}(u)) + \right.$$

$$+ 2\int\limits_a^b \frac{V(u)\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\, d(-f^{-1}(u)) \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\nu + 2\int\limits_a^b V(u) \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\, d(-f^{-1}(u))\right\} = \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\varphi\left(\int\limits_a^b V(u)\, d(-f^{-1}(u))\right) + \right.$$

$$\left.+ 2\int\limits_a^b V(u) \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\, d(-f^{-1}(u))\right\} = \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\varphi\left(\frac{\alpha_1 v}{1-\theta} D_1(a,b)\right) + \right.$$

$$\left.+ 2\frac{\alpha_1 v}{1-\theta} D_3(a,b)\right\}. \quad (8)$$

Из 2 следует

$$I_2 \leqslant \frac{\pi(b+1)}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\varphi\left(\frac{\alpha_2 v}{1-\theta} f^{-1}(b) \left(\int\limits_0^u f^2 dF\right)^{1/2}\right)\right\}. \quad (9)$$

В силу (5), (8) и (9) получаем

$$M \exp\{v \| c(t) S_a^b(t) \|\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\frac{1}{\alpha_1}\varphi\left(\frac{\alpha_1 v}{1-\theta} D_1(a,b)\right) + 2\frac{v}{1-\theta} D_3(a,b) + \right.$$

$$\left.+ \frac{1}{\alpha_2}\varphi\left(\frac{\alpha_2 v}{1-\theta} f^{-1}(b)\left(\int\limits_0^u f^2 dF\right)^{1/2}\right) + \frac{1}{\alpha_2}\ln(b+1)\right. . \quad (10)$$

Утверждение леммы следует из (10), если положить $\alpha_1 = B_1^{-1}\varphi^{(-1)}(\gamma)$, $\alpha_2 = B_2^{-1}\varphi^{(-1)}(\gamma + c_1)$, где

$$B_1 = \frac{v}{1-\theta} D_1(a,b), \quad B_2 = \frac{v}{1-\theta} D_2(a,b), \quad c_1 = \ln(b+1),$$

а $\gamma > 0$ такое, что $B_1 (\varphi^{(-1)}(\gamma))^{-1} + B_2 (\varphi^{(-1)}(\gamma + c_1))^{-1} = 1$, и учесть, что $\gamma \leqslant \varphi (B_1 + B_2)$.

Теорема 1. *Для того чтобы при $b \to \infty$ выполнялось*

$$\| c(t) (\xi(t) - S_0^b(t)) \| \to 0$$

по вероятности, достаточно, чтобы существовала такая непрерывная функция $f(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, $f(\lambda) \uparrow \infty$, $\lambda \to \infty$, для которой

$$\int_0^\infty \left(\int_0^u f^2 dF \right)^{1/2} \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} d(-f^{-1}(u)) < \infty. \tag{11}$$

При этом для всех $v > 0$, $a \geqslant 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ справедливо неравенство

$$M \exp \{ v \| c(t) S_a^\infty(t) \| \} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp \left\{ \varphi \left(\frac{v}{1-\theta} D_1(a, \infty) \right) + 2 \frac{v}{1-\theta} D_2(a, \infty) \right\}, \tag{12}$$

где

$$D_1(a, \infty) = \int_a^\infty \left(\int_0^u f^2 dF \right)^{1/2} d(-f^{-1}(u)),$$

$$D_2(a, \infty) = \int_a^\infty \left(\int_0^u f^2 dF \right)^{1/2} \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} d(-f^{-1}(u)).$$

Доказательство. Из того, что для N-функций $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$ [2, с. 18], следует

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} = \infty.$$

Поэтому при достаточно большом a справедливы неравенства

$$D_1(a, b) \leqslant D_3(a, b), \quad D_2(a, b) \leqslant D_4(a, b) \leqslant \int_b^\infty \left(\int_0^u f^2 dF \right)^{1/2} \times \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} d(-f^{-1}(u)),$$

где $D_i(a, b)$, $i = \overline{1, 4}$, определены в лемме 2.

Если выполняется условие (11), то из (4) и приведенных неравенств следует, что для любого $v > 0$

$$\limsup_{a, b \to \infty} M \exp \{ v \| c(t) S_a^b(t) \| \} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon},$$

откуда следует, что $\| c(t) S_a^b(t) \| \to 0$ по вероятности при $a, b \to \infty$. Неравенство (12) получаем из (4), устремляя в последнем b к бесконечности. Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть спектральная функция процесса $\xi(t)$ удовлетворяет условию*

$$\left| \int_0^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))} d((1 - F(u))^\beta) \right| < \infty, \quad 0 < \beta \leqslant 1/2. \tag{13}$$

Тогда для процесса $\xi(t)$ выполняется предположение теоремы 1 при

$$f(\lambda) = 1 + f_{h(v)}(\lambda), \quad f_{h(v)}(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{h(v)(1 - F(\lambda))}, \quad h(v) > 0, \quad v > 0,$$

$$h(v) \uparrow \infty, \quad v \to \infty.$$

Кроме того, при $a \geqslant 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, $h(v) = (p(v))^{\frac{2}{2\beta+1}}$, $v \geqslant q(1)$, *где* $p(v) > 0$, $v > 0$, *— правая производная* N*-функции,* $\varphi(v)$ [2, с. 16] *— непрерывная справа функция,* $p(0) = 0$, $p(v) \uparrow \infty$, $v \to \infty$, $q(t) = \sup\limits_{p(v) \leqslant t} v$ *— правая обратная к* $p(v)$ *функция* [2, с. 18], *справедлива оценка*

$$M \exp\{v \| c(t) S_a^\infty(t) \|\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{K\left(\frac{v}{1-\theta}\right)\right\}, \tag{14}$$

где

$$K\left(\frac{v}{1-\theta}\right) = \varphi\left(\frac{v}{1-\theta} + \frac{\pi}{2}\frac{v}{1-\theta}\left(p\left(\frac{v}{1-\theta}\right)\right)^{-\frac{1}{2\beta+1}}\right) + 2C_a^\beta \times$$

$$\times \frac{v}{1-\theta}\left(\left(p\left(\frac{v}{1-\theta}\right)\right)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} + \left(p\left(\frac{v}{1-\theta}\right)\right)^{-\frac{1-2\beta}{2\beta+1}}\right),$$

$$C_a^\beta = -\frac{1}{\beta}\int_a^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\, d\left((1-F(u))^\beta\right).$$

Доказательство. Чтобы показать, что выполняется (11), достаточно доказать, что $D_2(a, \infty)$ в (12) конечно. Выбирая в качестве $f(\lambda)$ функцию $f(\lambda) = 1 + F(\lambda)(h(v)(1 - F(\lambda)))^{-1}$, аналогично доказательству леммы 4 [1] можно показать, что, так как

$$\int_0^u f_{h(v)}^2(\lambda)\, dF(\lambda) \leqslant h^{-2}(v)\frac{F(\lambda)}{1-F(\lambda)},$$

то при $0 < \beta \leqslant 1/2$ и v таком, что $h(v) \geqslant 1$, справедливы оценки

$$D_1(a, \infty) = \int_0^\infty \left(\int_0^u f^2 dF\right)^{1/2} d\left(-f^{-1}(u)\right) \leqslant 1 + \frac{\pi}{2} h^{-1/2}(v), \tag{15}$$

$$D_2(a, \infty) = \int_a^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\left(\int_0^u f^2 dF\right)^{1/2} d\left(-f^{-1}(u)\right) \leqslant \left(h^\beta(v) + h^{\beta-1/2}(v)\right) \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{\beta}\right)\int_a^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\, d\left((1-F(u))^\beta\right). \tag{16}$$

Таким образом, из (12), (15) и (16) следует

$$M\exp\{v\|c(t) S_a^\infty(t)\|\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon}\exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta} + \frac{\pi}{2}\frac{v}{1-\theta}h^{-1/2}(v)\right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{v}{1-\theta}\left(h^\beta(v) + h^{\beta-1/2}(v)\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\int_a^\infty \frac{\ln(u+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(u+1))}\, d\left((1-F(u))^\beta\right).\right. \tag{17}$$

Из соображений оптимальности соотношения скоростей роста первого и второго слагаемых выражения в скобках в правой части (17) полагаем

$$h(v) = (p(v))^{\frac{2}{2\beta+1}} \tag{18}$$

при $v \geqslant q(1)$, что обеспечивает выполнение условия $h(v) \geqslant 1$. Из (17) и (18) следует утверждение леммы.

Теорема 2. *Пусть спектральная функция процесса* $\xi(t)$ *удовлетворяет условию* (13). *Тогда по вероятности* $\| c(t)(\xi(t) - S_0^b(t))\| \to 0$ *при* $b \to$

$\to \infty$, *и при* $a \geqslant 0$, $x > 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ *справедлива оценка*

$$P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \| > x\} \leqslant \frac{\pi}{\varepsilon} x \exp\{-K^*(x-1)\}, \qquad (19)$$

где $K^*(x-1) = \sup\limits_{y \geqslant q(1)} ((x-1)y - K(y))$ — *преобразование Юнга — Фенхеля функции* $K(\cdot)$, *определенной в лемме* 3.

Доказательство. В силу неравенства Чебышева из (14) следует, что при $v \geqslant q(1)$

$$P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \| > x\} \leqslant M \exp\{v \| c(t) S_a^\infty(t) \|\} \exp\{-vx\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{K\left(\frac{v}{1-\theta}\right) - vx\right\}. \qquad (20)$$

Функция $K\left(\frac{v}{1-\theta}\right)$ непрерывна справа, $K\left(\frac{v}{1-\theta}\right) \to \infty$, $v \to \infty$. Учитывая преобразование Юнга — Фенхеля $K\left(\frac{v}{1-\theta}\right)$: $K^*((1-\theta)x) = \sup\limits_{v \geqslant q(1)} \left((1-\theta)x \cdot \frac{v}{1-\theta} - K\left(\frac{v}{1-\theta}\right)\right)$, из (20) получаем

$$P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \| > x\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\{-K^*((1-\theta)x)\}.$$

Полагая $\theta = 1/x$, $x > 1$, в последнем неравенстве, получаем (19).

Теорема 3. *При выполнении предположений теоремы 2 для всех* $T > 0$, $\sup\limits_{|t| \leqslant T} |\xi(t) - S_0^b(t)| \to 0$ *по вероятности при* $b \to \infty$ *и при* $a \geqslant 0$, $x > 2$, $T > \pi$ *справедлива оценка*

$$P\{\sup_{|t| \leqslant T} | S_a^\infty(t) | > x\} \leqslant \frac{\pi T}{\sqrt{3}} x^{3/2} \exp\{-K^*(x-2)\}.$$

Доказательство. Из неравенства (19) при $\varepsilon = \gamma/T$, $0 < \gamma < \pi/2$, $x\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)^2 > 1$ следует неравенство

$$P\{\sup_{|t| \leqslant T} | S_a^\infty(t) | > x\} \leqslant P\left\{\left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \sup_{|t| \leqslant T} | c(t) S_a^\infty(t) | > x\right\} = P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \| >$$
$$> x\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)^2\right\} \leqslant \frac{\pi T}{\gamma} x \exp\left\{-K^*\left(x\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)^2 - 1\right)\right\}.$$

Утверждение теоремы следует из последнего неравенства, если γ выбрать так, чтобы $(\sin\gamma/\gamma)^2 = 1 - 1/x$, при этом $x > 2$, так как $x(\sin\gamma/\gamma)^2 > 1$. Кроме того, $1/\gamma \leqslant (x/3)^{1/2}$, так как $\left(\frac{\gamma - \gamma^3/6}{\gamma}\right)^2 \leqslant 1 - 1/x$. Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условия (13) выборочные функции процесса $\xi(t)$ непрерывны с вероятностью 1.

Теорема 4. *Пусть* $r(u) > 0$, $u > 0$ — *монотонно неубывающая функция такая, что* $r(e^{\tilde{x}})$ *выпукла. Если существует непрерывная функция* $f(\lambda) > 0$, $\lambda > 0$, $f(\lambda) \uparrow \infty$, $\lambda \to \infty$ *такая, что*

$$\int_0^\infty r(u+1)\left(\int_0^u f^2 dF\right)^{1/2} d(-f^{-1}(u)) < \infty,$$

то по вероятности $\| c(t)(\xi(t) - S_0^b(t)) \| \to 0$, $b \to \infty$. *При этом для всех* $v > 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ *справедливо неравенство*

$$M\exp\{v\,\|c(t)\,S_a^{\infty}(t)\|\}\leqslant\frac{\pi}{\theta\varepsilon}\,r^{(-1)}\left\{\frac{\int\limits_a^{\infty} r(u+1)\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}d(-f^{-1}(u))}{\int\limits_a^{\infty}\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}d(-f^{-1}(u))}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta}\cdot\int\limits_a^{\infty}\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}d(-f^{-1}(u))\right)\right\}. \qquad (21)$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2, можно получить неравенство

$$M\exp\{v\,\|c(t)\,S_a^b(t)\|\}\leqslant\frac{\pi}{\theta\varepsilon}\Big(\prod_{i=1}^{3}\overline{D}_i(a,b)\Big)\overline{D}_4(b), \qquad (22)$$

где

$$\overline{D}_1(a,b)=\exp\left\{\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_a^b\ln(u+1)\,p(u)\,d(-f^{-1}(u))\right\},$$

$$\overline{D}_2(a,b)=\exp\left\{\frac{1}{\alpha_1}\int\limits_a^b\varphi\left(\frac{\alpha_1 v}{1-\theta}\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}p^{-1}(u)\right)p(u)\,d(-f^{-1}(u))\right\},$$

$$\overline{D}_3(a,b)=\exp\left\{\frac{1}{\alpha_2}\,\varphi\left(\frac{\alpha_2 v}{1-\theta}\,f^{-1}(b)\Big(\int\limits_a^b f^2dF\Big)^{1/2}\right)\right\},$$

$$\overline{D}_4(b)=\exp\left\{\frac{1}{\alpha_2}\ln(b+1)\right\}.$$

Из неравенства Иенссена следует

$$\overline{D}_1(a,b)\leqslant r^{(-1)}\Big(\int\limits_a^b r(u+1)\,p(u)\,d(-f^{-1}(u))\Big)=c_0.$$

Далее, выберем $\alpha_1=B_1^{-1}\varphi^{(-1)}(\gamma)$, $\alpha_2=B_2^{-1}\varphi^{(-1)}(\gamma+c_1)$, где

$$B_1=\frac{v}{1-\theta}\int\limits_a^b\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}d(-f^{-1}(u)),\qquad B_2=\frac{v}{1-\theta}\,f^{-1}(b)\Big(\int\limits_a^b f^2dF\Big)^{1/2},$$

$$c_1=\ln(b+1),$$

и $\gamma>0$ — такое, что $B_1(\varphi^{(-1)}(\gamma))^{-1}+B_2(\varphi^{(-1)}(\gamma+c_1))^{-1}=1$, и положим

$$p(u)=\frac{\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}}{\int\limits_a^b\Big(\int\limits_0^u f^2dF\Big)^{1/2}d(-f^{-1}(u))}.$$

Используя (22), получаем

$$M\exp\{v\,\|c(t)\,S_a^b(t)\|\}\leqslant\frac{\pi}{\theta\varepsilon}\,c_0\exp\left\{\varphi(B_1+B_2)+2B_2\frac{c_1}{\varphi^{(-1)}(c_1)}\right\}.$$

В дальнейшем доказательство повторяет доказательство леммы 2 и теоремы 1, если учесть, что при достаточно больших x $r(e^x)\geqslant Cx$, $C>0$, а следовательно,

$$r(b+1)=r(\exp\{\ln(b+1)\})\geqslant C\ln(b+1)\geqslant C\frac{\ln(b+1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(b+1))}.$$

Теорема 5. *Пусть спектральная функция процесса $\xi(t)$ удовлетворяет условию*

$$\left|\int_0^\infty r(u+1)\,d\left((1-F(u))^\beta\right)\right| < \infty, \quad 0 < \beta \leqslant 1/2.$$

Тогда при $b \to \infty$

$$\| c(t)(\xi(t) - S_0^b(t)) \| \to 0,$$

$$\sup_{|t|\leqslant T} |\xi(t) - S_0^b(t)| \to 0, \quad T > 0,$$

по вероятности, и для всех $a \geqslant 0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, $T > \pi$, $x \geqslant \max\left\{2, p\left(2v_0 + \frac{\pi}{2}p^{-1}(v_0)\right)\right\} + 2$, где v_0 — такое, что $v_0 p(v_0) \geqslant 1$, справедливы оценки

$$P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \| > x\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} x \exp\left\{-\varphi^S(x-1) + \frac{\pi}{2}(x-1)\right\} \times$$

$$\times r^{(-1)}\left(\hat{C}_a^\beta\left(1 + ((x-1)q(x-1))^{2\beta}\right)\right), \tag{23}$$

$$P\{\sup_{|t|\leqslant T} |S_a^\infty(t)| > x\} \leqslant \frac{\pi T}{\sqrt{3}} x^{3/2} \exp\left\{-\varphi^S(x-2) + \frac{\pi}{2}(x-2)\right\} \times$$

$$\times r^{(-1)}\left(\hat{C}_a^b\left(1 + ((x-2)q(x-2))^{2\beta}\right)\right),$$

где $\varphi^S(\cdot)$ — N-функция, дополнительная к N-функции $\varphi(\cdot)$ [2, с. 24], $r^{-1}(u)$ — функция, обратная к функции $r(u)$,

$$\hat{C}_a^\beta = -\frac{1}{\beta}\int_a^\infty r(u+1)\,d\left((1-F(u))^\beta\right).$$

Доказательство. Положим в (21) $f(\lambda) = \dfrac{F(\lambda)}{\left(\frac{v}{1-\theta}p(v)\right)^2(1-F(\lambda))}$.

Кроме того, положим $F(a) = 0$ (по предположению $F(\infty) = 1$), что не ограничивает общности, и заметим, что

$$\int_a^\infty \left(\int_0^u f^2 dF\right)^{1/2} d\left(-f^{-1}(u)\right) \geqslant 1.$$

Аналогично доказательству леммы 3 можно показать, что тогда при всех $v \geqslant v_0$ таких, что $v_0 p(v_0) = 1$, из (21) следует неравенство

$$M \exp\{v \| c(t) S_a^\infty(t) \|\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta} + \frac{\pi}{2}p^{-1}(v)\right)\right\} \times$$

$$\times r^{(-1)}\left(\hat{C}_a^\beta\left(\left(\frac{v}{1-\theta}p(v)\right)^{2\beta} + \left(\frac{v}{1-\theta}p(v)\right)^{2\beta-1}\right)\right) \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \times$$

$$\times \exp\left\{\varphi\left(\frac{v}{1-\theta} + \frac{\pi}{2}p^{-1}(v)\right)\right\} r^{(-1)}\left(\hat{C}_a^\beta\left(\left(\frac{v}{1-\theta}p(v)\right)^{2\beta} + 1\right)\right).$$

По неравенству Чебышева отсюда имеем, что при всех $v \geqslant v_0$

$$P\{\| c(t) S_a^\infty(t) \| > x\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon} \exp\left\{-\left((1-\theta)x\left(\frac{v}{1-\theta} + \frac{\pi}{2}p^{-1}(v)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \varphi\left(\frac{v}{1-\theta} + \frac{\pi}{2}p^{-1}(v)\right)\right) + \frac{\pi}{2}(1-\theta)x\right\} r^{(-1)}\left(\hat{C}_a^\beta\left(1 + \left(\frac{v}{1-\theta}p(v)\right)^{2\beta}\right)\right),$$

откуда при x таком, что $v^* \geqslant v_0$,

$$P\{\|c(t)S_a^\infty(t)\| > x\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon}\exp\left\{-\varphi^S((1-\theta)x) + \frac{\pi}{2}(1-\theta)x\right\} \times$$
$$\times r^{(-1)}\left(\widehat{C}_a^\beta\left(1+\left(\frac{v}{1-\theta}p(v^*)\right)^{2\beta}\right)\right), \tag{24}$$

где v^* — значение, доставляющее супремум выражению $(1-\theta)x \times \times\left(\frac{v}{1-\theta}+\frac{\pi}{2}p^{-1}(v)\right)-\varphi\left(\frac{v}{1-\theta}-\frac{\pi}{2}p^{-1}(v)\right)$, определяется из уравнения $\frac{v^*}{1-\theta}+\frac{\pi}{2}p^{-1}(v^*)=q((1-\theta)x)$ [2, с. 24]. Отсюда следует

$$q((1-\theta)x)-\frac{\pi}{2}p^{-1}(v_0) \leqslant \frac{v^*}{1-\theta} \leqslant q((1-\theta)x). \tag{25}$$

В силу монотонности функции $r^{(-1)}\left(\widehat{C}_a^\beta\left(1+\left(\frac{v}{1-\theta}p(v)\right)^{2\beta}\right)\right)$ из (24) и правой части (25) вытекает

$$P\{\|c(t)S_a^\infty(t)\| > x\} \leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon}\exp\left\{-\varphi^S((1-\theta)x) + \frac{\pi}{2}(1-\theta)x\right\} \times$$
$$\times r^{(-1)}(\widehat{C}_a^\beta(1+(q((1-\theta)x)\,p((1-\theta)\,q((1-\theta)x))^{2\beta})) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi}{\theta\varepsilon}\exp\left\{-\varphi^S((1-\theta)x) + \frac{\pi}{2}(1-\theta)x\right\} r^{(-1)}(\widehat{C}_a^\beta(1+((1-\theta)x\times$$
$$\times q((1-\theta)x))^{2\beta})).$$

Полагая $\theta = 1/x$, $x \geqslant \max\left\{2, p\left(2v_0+\frac{\pi}{2}p^{-1}(v_0)\right)\right\}+1$, что обеспечивает выполнение условия $v^* \geqslant v_0$, из последнего неравенства получаем (23). Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Козаченко Ю. В., Пашко А. А.* Об оценках распределения супремума гауссовского стационарного процесса // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 3.— С. 314—323.
2. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М. : Физматгиз, 1958.— 272 с.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1985.— Вып. 32.— С. 42—53.
4. *Козаченко Ю. В., Булдыгин В. В.* Субгауссовские случайные векторы и процессы // Там же.— 1987.— Вып. 36.— С. 10—22.
5. *Козаченко Ю. В.* Сходимость стохастических интегралов в пространствах Орлича // Там же.— 1989.— Вып. 40.— С. 37—44.
6. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 407 с.

Получено 04.02.91