УДК 517.5

А. В. ШАПОВАЛОВСКИЙ, преп. (Дрогобыч. пед. ин-т)

# О поведении на лучах рядов Дирихле медленного роста

Изучается поведение на лучах $\arg z = \varphi$, $|\varphi| < \pi/2$, целой функции $F$, представленной абсолютно сходящимся во всей плоскости рядом Дирихле с показателями $\lambda_n > 0$ такими, что $n = o(\lambda_n^{q(\lambda_n)})$, $n \to +\infty$, где $q(r)$ — уточненный порядок, причем $\lim\limits_{r\to+\infty} q(r) = q > 1$.

Вивчається поведінка на променях $\arg z = \varphi$, $|\varphi| < \pi/2$, цілої функції $F$, яка зображається абсолютно збіжним у всій площині рядом Діріхле з показниками $\lambda_n > 0$ такими, що $n = o(\lambda_n^{q(\lambda_n)})$, $n \to +\infty$, де $q(r)$ — уточнений порядок, причому $\lim\limits_{r\to+\infty} q(r) = q > 1$.

Пусть ряд Дирихле

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z), \quad 0<\lambda_k \uparrow +\infty, \tag{1}$$

абсолютно сходится в C и $\gamma(x)$ — положительная неубывающая непрерывная на $(-\infty; +\infty)$ функция. Изучению связи между свойствами последовательности $\{\lambda_n\}$ и поведением функции $F$ на действительной оси посвящен ряд работ [1—11]. В частности, из [2, с. 317] следует, что если

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty, \tag{2}$$

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant h > 0 \tag{3}$$

и $|F(x)| \leqslant \gamma(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, то $\mathfrak{M}_F(x) \leqslant \gamma((1+o(1))x)$, $x \to +\infty$, где $\mathfrak{M}_F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \exp(\lambda_k x)$. С другой стороны [3, 4], если выполняется (3), но (2) не выполняется, то существует не тождественно равная нулю функция вида (1), ограниченная на действительной оси. Поэтому в приведенном выше утверждении условие (2) улучшить нельзя. Однако, если на $\mathfrak{M}_F(x)$ наложить некоторые ограничения, то условие (2) можно ослабить. Для формулировки соответствующего результата введем необходимые обозначения. Пусть $p(t)$ — уточненный порядок, т. е. такая дифференцируемая на $[0; +\infty)$ функция, для которой

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to+\infty} tp'(t)\ln t = 0. \tag{5}$$

Далее предполагаем, что $p>1$. Тогда функция $\eta(t)=t^{p(t)-1}$ возрастает при $t \geqslant t_0$. Пусть $q(t)=1+(\ln \eta^{-1}(t))/\ln t$. Легко проверить, что $q(t)$ — уточненный порядок, причем $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t)=q$ и $1/p+1/q=1$. Обозначим через $\Delta_0$ целое число больше $q$ и положим $L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-(z/\lambda_n)^{\Delta_0})$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lim_{n\to+\infty} (n/\lambda_n^{q(\lambda_n)})=0, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n^{q(\lambda_n)}} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|}=0, \tag{7}$$

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \mathfrak{M}_F(x)}{x^{p(x)}} < \infty. \tag{8}$$

*Тогда если при некотором* $\varphi$, $|\varphi|<\pi/2$, *при* $r \geqslant r_0$ *выполняется* $|F(re^{i\varphi})| \leqslant \gamma(r)$, *то*

$$\mathfrak{M}_F(r) \leqslant \gamma((1+o(1))\,r/\cos\varphi), \quad r \to +\infty. \tag{9}$$

Для доказательства теоремы 1 нам будут необходимы некоторые леммы. В дальнейшем через $K_j$ будем обозначать положительные постоянные.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие* (6). *Тогда*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)}{\ln|1/d_n|}=(\beta p)^{q-1} q. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $\beta < +\infty$. Из (8) следует, что $\forall \varepsilon>0$ при достаточно больших $x$

$$\ln \mathfrak{M}_F(x) \leqslant \beta^* x^{p(x)},$$

где $\beta^* = \beta + \varepsilon$. Известно [5, с. 176], что справедливо неравенство $|d_n| \leqslant \mathfrak{M}_F(x)\exp(-\lambda_n x)$, $x > -\infty$, $n \geqslant 1$. Тогда, учитывая эти неравенства, получаем

$$\ln|d_n| \leqslant \beta^* x^{p(x)} - \lambda_n x, \quad x \geqslant x_0$$

Полагая $x = \eta^{-1}(\lambda_n/(\beta^*(p + o(1))))$, при $n \to +\infty$ имеем

$$\ln|d_n| \leqslant \lambda_n \eta^{-1}\left(\frac{\lambda_n}{\beta^*(p + o(1))}\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$

Поскольку $\eta^{-1}(Kx) = K^{1/(p-1)}(1 + o(1))\eta^{-1}(x)$, $x \to +\infty$, то из последнего неравенства получаем

$$\frac{\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)}{-\ln|d_n|} \leqslant \frac{(\beta^*(p + o(1)))^{1/(p-1)}}{1 - 1/p}, \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)}{\ln|1/d_n|} \leqslant (\beta p)^{q-1} q,$$

так что, определив число $\beta_1$ равенством

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)}{\ln|1/d_n|} = (\beta_1 p)^{q-1} q,$$

имеем $\beta_1 \leqslant \beta$, а при $\beta = +\infty$ это неравенство очевидно.

Пусть $\beta_1 < +\infty$. Покажем, что $\beta \leqslant \beta_1$. При $n \geqslant n_0$, $\varepsilon > 0$ получаем $|d_n| \leqslant \exp(-\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)(\beta_1^* p)^{1-q} q^{-1})$, где $\beta_1^* = \beta_1 + \varepsilon$. Значит, при больших $x$ выполняется

$$\mu_F(x) = \max_{n\geqslant 1}\{|d_n|\exp(\lambda_n x)\} \leqslant \max_{n\geqslant 1}\{\exp(\lambda_n x - \lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)(\beta_1^* p)^{1-q} q^{-1})\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\geqslant 0}\{\exp(tx - t\eta^{-1}(t)(\beta_1^* p)^{1-q} q^{-1})\}.$$

Максимум в правой части последнего неравенства достигается при $t = \eta\left(\frac{x(1 + o(1))}{(\beta_1^* p)^{1-q}}\right)$ и, значит, при $x \to +\infty$ имеем

$$\ln \mu_F(x) \leqslant x^{p(x)} \beta_1^* (1 + o(1)). \tag{11}$$

Известно [5, с. 184], что для $\mathrm{A}\varepsilon > 0$ при $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{M}_F(x) \leqslant \mu_F(x + H + \varepsilon), \quad H = \varlimsup_{n\to+\infty}((\ln n)/\lambda_n).$$

Поскольку выполняется условие (6), то $H = 0$ и $\mathfrak{M}_F(x) \leqslant \mu_F(x + \varepsilon)$, $x \geqslant x_0$. Поэтому из (11) получаем $\beta \leqslant \beta_1$, что завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\operatorname{Re} w_k > 0$,

$$P_N(u) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(w_k u).$$

*Тогда*

$$|d_m| \leqslant (2\operatorname{Re} w_m)^{1/2} \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{N} \left|\frac{1 + w_m/\overline{w}_k}{1 - w_m/w_k}\right| \left(\int_{-\infty}^{0} |P_N(u)|^2 du\right)^{1/2}.$$

Лемма 2 является следствием леммы 2 из [3] (см. также [1]). Применив эту лемму к квазиполиному $Q_N(u, r) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(w_k r)\exp(w_k u)$

получаем

$$|d_m e^{w_m r}| \leqslant (2\operatorname{Re} w_m)^{1/2} \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{N} \left|\frac{1+w_m/\overline{w}_k}{1-w_m/w_k}\right| \left(\int_{-\infty}^{r} |P_N^{*}(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Наконец, положив $w_m = \lambda_m \exp(i\varphi)$, $|\varphi| < \pi/2$, получаем

$$|d_m| e^{\lambda_m r\cos\varphi} \leqslant (2\lambda_m \cos\varphi)^{1/2} \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{N} \left|\frac{1+\lambda_m/\lambda_k}{1-\lambda_m/\lambda_k}\right| \left(\int_{-\infty}^{r} |S(te^{i\varphi})|^2 dt\right)^{1/2}, \qquad (12)$$

где $S(z) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\lambda_k z)$.

Пусть $\tau$ — положительная непрерывная возрастающая на $[0; +\infty)$ функция такая, что $\tau(n) = \lambda_n$, а $N = N(x) = [\tau^{-1}(\eta((1+x)(p\beta^*)^{q-1}q))]$, где $[a]$ — целая часть числа $a$, $\beta^* = \beta + \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Положим $\sigma(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |d_n| \exp(\lambda_n x)$.

Лемма 3. *Пусть выполняется условие* (6) *и* $\beta < +\infty$. *Тогда для всех* $x > 0$ *выполняется* $\sigma(x) \leqslant K$.

Доказательство. Из (10) для $\forall\varepsilon > 0$ при $n \geqslant 1$ имеем

$$|d_n| \leqslant K_1(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)}{(\beta^* p)^{q-1} q}\right), \quad \beta^* = \beta + \varepsilon.$$

Поэтому

$$\sigma(x) \leqslant K_1(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_n \eta^{-1}(\lambda_n)}{(\beta^* p)^{q-1} q} + \lambda_n x\right) \leqslant K_1(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp\Bigg(-\lambda_n \times$$

$$\times \left(\frac{\eta^{-1}(\tau(N+1))}{(\beta^* p)^{q-1} q} - x\right)\Bigg) \leqslant K_1(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-\lambda_n) \leqslant$$

$$\leqslant K_1(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n) = K < \infty.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $x = r\cos\varphi$. Поскольку

$$L'(w) = -L_m(w)\frac{\Delta_0}{\lambda_m}, \quad L_m(w) = \prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{\infty} (1 - (w/\lambda_i)^{\Delta_0}) \qquad (13)$$

и $0 < 1 - \lambda_m/\lambda_i < 1$ при $i > N$ и $1 \leqslant m \leqslant N$, то для таких $m$ имеем

$$|H_N(\lambda_m)| \overset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{N} \left|\frac{1+\lambda_m/\lambda_i}{1-\lambda_m/\lambda_i}\right| =$$

$$= \frac{\prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{N} ((1+\lambda_m/\lambda_i)(1+(\lambda_m/\lambda_i)+\ldots+(\lambda_m/\lambda_i)^{\Delta_0-1}))}{\left|\prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{N} (1-(\lambda_m/\lambda_i)^{\Delta_0})\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\prod_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{N} ((1+\lambda_m/\lambda_i)(1+(\lambda_m/\lambda_i)+\ldots+(\lambda_m/\lambda_i)^{\Delta_0-1}))}{|L_m(\lambda_m)|}.$$

Обозначим произведение, стоящее в числителе последней строки, через $P(\lambda_m)$. Тогда, положив $n(t)=\sum_{\lambda_n\leqslant t} 1$, из (6) имеем $n(t)\leqslant \varepsilon t^{q(t)}$, $t\geqslant t_0$. Кроме того, $N/\lambda_N=\lambda_N^{q(\lambda_N)-1}N/\lambda_N^{q(\lambda_N)}$, $\eta^{-1}(t)=t^{q(t)-1}$ и, учитывая определение $N$, получаем $N/\lambda_N\leqslant \varepsilon_1 x$, $x\geqslant x_0$, где $\varepsilon_1=2\varepsilon q(p\beta^*)^{q-1}$. Значит,

$$\ln P(\lambda_m)\leqslant \int\limits_0^{\lambda_N} (\ln(1+\lambda_m/t)+\ln(1+(\lambda_m/t)+\ldots+(\lambda_m/t)^{\Delta_0-1}))\,dn(t)\leqslant$$

$$\leqslant N\frac{\lambda_m}{\lambda_N}+N\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_N}\right)^2+\ldots+N\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_N}\right)^{\Delta_0-1}+\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}\frac{\lambda_m n(t)}{(1+\lambda_m/t)t^2}\,dt+$$

$$+\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}\frac{n(t)((\lambda_m/t^2)+2(\lambda_m^2/t^3)+\ldots+(\Delta_0-1)\lambda_m^{\Delta_0-1}/t^{\Delta_0})}{1+(\lambda_m/t)+\ldots+(\lambda_m/t)^{\Delta_0-1}}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1(\Delta_0-1)x\lambda_m+\varepsilon\lambda_m\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}t^{q(t)-2}dt+\varepsilon\Big(\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}t^{q(t)-2}\lambda_m dt+2\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}t^{q(t)-2}\lambda_m dt+\ldots$$

$$\ldots+(\Delta_0-1)\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}t^{q(t)-2t}\lambda_m dt\Big)+O(1)=\varepsilon_1(\Delta_0-1)x\lambda_m+\frac{\Delta_0(\Delta_0-1)+2}{2}\times$$

$$\times\varepsilon\lambda_m\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_N}t^{q(t)-2}dt+O(1)=\varepsilon_1(\Delta_0-1)x\lambda_m+\frac{\Delta_0(\Delta_0-1)+2}{2}\varepsilon\lambda_m\times$$

$$\times\frac{1}{q-1}(\lambda_N^{q(\lambda_N)-1}+o(\lambda_N^{q(\lambda_N)-1}))+O(1)\leqslant K_2\varepsilon x\lambda_m+O(1),$$

$$x\in[0;+\infty),\quad 1\leqslant m\leqslant N.$$

Таким образом, для любых $\varepsilon>0$ $x=r\cos\varphi\geqslant 1$ и $m$, $1\leqslant m\leqslant N$, выполняется $|P(\lambda_m)|\leqslant K(\varepsilon)\exp(\varepsilon x\lambda_m)$. Используя (13) и последнее неравенство, получаем

$$|H_N(\lambda_m)|\leqslant K(\varepsilon)\exp(\varepsilon x\lambda_m)/|(\lambda_m/\Delta_0)L'(\lambda_m)|,\quad x\geqslant 1,\quad 1\leqslant m\leqslant N. \quad (14)$$

Из (12) для $x=r\cos\varphi\geqslant 1$, учитывая (14), имеем

$$|d_m|e^{x\lambda_m}\leqslant K_3\frac{\exp(\varepsilon x\lambda_m)}{|L'(\lambda_m)|}\Big(\int\limits_{-\infty}^{r}|S(te^{i\varphi})|^2dt\Big)^{1/2},\quad 1\leqslant m\leqslant N.$$

Из выполнения условия (7) следует

$$\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}\leqslant K_4\exp(\varepsilon\lambda_n^{q(\lambda_n)})<K_4\exp(\varepsilon\lambda_n\lambda_N^{q(\lambda_N)-1})<K_5\exp(\varepsilon x\lambda_n),$$

откуда

$$|d_m|e^{x\lambda_m}\leqslant K_6\exp(2\varepsilon x\lambda_m)\Big(\int\limits_{-\infty}^{r}|S(te^{i\varphi})|^2dt\Big)^{1/2},\quad 1\leqslant m\leqslant N.$$

Тогда с учетом леммы 3 будем иметь

$$\mathfrak{M}_F((1-3\varepsilon)r\cos\varphi)\leqslant\sum_{k=1}^{N}|d_k|e^{\lambda_k r\cos\varphi}e^{-3\varepsilon\lambda_k r\cos\varphi}+\sum_{k=N+1}^{\infty}|d_k|e^{\lambda_k r\cos\varphi}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} K_6 e^{-\varepsilon\lambda_k r \cos\varphi} \Big(\int_{-\infty}^{r} |S(te^{i\varphi})|^2 dt\Big)^{1/2} + K \leqslant K_6 \Big(\int_{-\infty}^{r} \Big(\Big|\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k t e^{i\varphi}}\Big| +$$

$$+ \Big|\sum_{k=N+1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k t e^{i\varphi}}\Big|\Big)^2 dt\Big)^{1/2} \sum_{k=1}^{N} e^{-\varepsilon\lambda_k r \cos\varphi} + K.$$

Отсюда, учитывая лемму 3 и неравенство $|F(re^{i\varphi})| \leqslant \gamma(r)$, получаем

$$\Big(\int_{-\infty}^{r_0} (\mathfrak{W}_F(r\cos\varphi))^2 dr\Big)^{1/2} \leqslant K_7, \quad -\infty < r_0 < +\infty,$$

$$\Big(\int_{r_0}^{r} \Big(\gamma(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} |d_k| e^{\lambda_k r \cos\varphi}\Big)^2 dt\Big)^{1/2} \leqslant K_8 (r - r_0)^{1/2} \gamma(r),$$

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-\varepsilon\lambda_k r \cos\varphi} \leqslant \frac{1 + o(1)}{e^{\varepsilon r \cos\varphi \lambda_1}}, \quad x = r\cos\varphi \to +\infty,$$

и $\mathfrak{M}_F((1 - 3\varepsilon) r\cos\varphi) \leqslant \gamma(r)$ при $r \geqslant r_0$, откуда вытекает утверждение теоремы 1.

Следствиями теоремы 1 являются следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (6)—(8). *Тогда*

$$(\forall\varphi, |\varphi| < \pi/2)(\exists r_k \to +\infty): |F(r_k e^{i\varphi})| = \mathfrak{W}_F((1 + o(1)) r_k \cos\varphi), \ k \to +\infty.$$

Действительно,

$$|F(re^{i\varphi})| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n r e^{i\varphi}}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |d_n| e^{\lambda_n r \cos\varphi} = \mathfrak{M}_F(r\cos\varphi).$$

Предположим, что при некотором $\varphi$, $|\varphi| < \pi/2$, утверждение теоремы 2 не выполняется. Тогда

$$(\exists\alpha < 1)(\exists r_0)(\forall r \geqslant r_0): |F(re^{i\varphi})| \leqslant \mathfrak{M}_F(\alpha r\cos\varphi).$$

Поэтому, применив теорему 1, получаем

$$\mathfrak{M}_F(r) \leqslant \mathfrak{M}_F((1 + o(1))\alpha r), \quad r \to +\infty,$$

что невозможно.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (6)—(8). *Тогда для любого уточненного порядка* $\rho(r)$, $\lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho$, $0 < \rho < +\infty$, *и для* $\forall\varphi$, $|\varphi| < \pi/2$, *имеет место равенство*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = \cos^{\rho}\varphi \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mathfrak{M}_F(r)}{r^{\rho(r)}}.$$

Действительно, $|F(re^{i\varphi})| \leqslant \mathfrak{M}_F(r\cos\varphi)$. Поэтому

$$\beta_2 \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} \leqslant \cos^{\rho}\varphi \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mathfrak{M}_F(r)}{r^{\rho(r)}} = \beta\cos^{\rho}\varphi. \tag{15}$$

Предположим, что $\beta_2 < \beta\cos^{\rho}\varphi$. Тогда $\ln|F(re^{i\varphi})| < (\beta_2 + \varepsilon) r^{\rho(r)}$ для произвольного $\varepsilon \in (0, \beta\cos^{\rho}\varphi - \beta_2)$ и всех $r \geqslant r_0(\varepsilon)$. Из теоремы 1 получаем

$$\ln \mathfrak{M}_F(r) \leqslant (\beta_2 + \varepsilon)\Big(\frac{r(1 + o(1))}{\cos\varphi}\Big)^{\rho\left(\frac{r(1+o(1))}{\cos\varphi}\right)} \leqslant (\beta_2 + 2\varepsilon)\frac{r^{\rho(r)}}{\cos^{\rho}\varphi}$$

для всех достаточно больших $r$. Отсюда следует, что $\beta \leqslant \beta_2 \cos^{\rho}\varphi$, а это невозможно. Следовательно, $\beta_2 = \beta\cos^{\rho}\varphi$ и теорема 3 доказана.

В случае $\rho(r) \equiv \rho = p$ теорема 3 доказана А. Ф. Леонтьевым [6]. Близкие результаты получили также А. А. Гольдберг и И. В. Островский [7].

Следующие теоремы указывают на точность условий (6) и (7) в теоремах 1—3. Идея их доказательства близка к [6, с. 162] и [5, с. 189].

Теорема 4. *Пусть все* $\lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1} - \lambda_k > d\lambda_k^{1-q(\lambda))}$ *и существует*

$$\lim_{n\to+\infty} (n/\lambda_n^{q(\lambda_n)}) = \Delta \neq 0, \ \infty.$$

*Тогда существует функция вида* (1), *удовлетворяющая условию* (8), *для которой*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|F(x)|}{x^{p(x)}} < \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln \mathfrak{M}_F(x)}{x^{p(x)}}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\Delta_0$ — целое число, $\Delta_0 > 2q$, и

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (\lambda/\lambda_k)^{\Delta_0}).$$

Имеем [5, с. 47]

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r^{q(r)}} = h_L(\varphi) = \frac{\pi\Delta}{\sin\dfrac{\pi q}{\Delta_0}} \cos q(\varphi - \pi/\Delta_0) \quad 0 < \varphi < 2\pi/\Delta_0;$$

вне кружков

$$|\lambda - \lambda_k e^{\frac{2\pi i}{\Delta_0}s}| \leqslant d|\lambda_k|^{1-q(\lambda_k)}, \quad s = 0, 1, \ldots, \Delta_0 - 1; \qquad k > k_0; \qquad d > 0,$$

справедлива оценка

$$\ln|L(re^{i\varphi})| > [h_L(\varphi) - \varepsilon]\, r^{q(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{17}$$

Кроме того, при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$\exp((c_0 - \varepsilon)\lambda_k^{q(\lambda_k)}) < |L'(\lambda_k)| < \exp((c_0 + \varepsilon)\lambda_k^{q(\lambda_k)}), \quad c_0 = h_L(0). \tag{18}$$

Искомая функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\varphi(\lambda_k) L'(\lambda_k)}, \quad \varphi(z) = (1 + z^2)\Psi(z), \tag{19}$$

где $\Psi(z)$ — функция вполне регулярного роста без нулей в некотором угле $|\arg z| \leqslant \delta$, $\delta > 0$, с индикатором $h_\Psi(\theta) = \gamma_0 \cos q\theta$, $|\theta| \leqslant \delta$, $\gamma_0 > 0$, при уточненном порядке $q(r)$. Исходя из известных оценок для бесконечных произведений, можно, например, для целых $q$ положить [8, с. 246]

$$\Psi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (z/\mu_n)^{\Delta_1}),$$

где $\Delta_1$ — целое число больше $q$, и для нецелых $q$

$$\Psi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (E(-z/\mu_n;\ q)),$$

где $E(w; a)$ — первичный множитель Вейерштрасса [5, с. 46], а $\mu_n$ — последовательность положительных чисел таких, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mu_n^{q(\mu_n)}} = \eta_0 \neq 0, \infty.$$

Так как $\Psi(z)$ — функция вполне регулярного роста, то [9, с. 151]

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln|\Psi(re^{i\theta})|}{r^{q(r)}}=h_\Psi(\theta)=\gamma_0\cos q\theta. \qquad (20)$$

Исходя из (10), (18) и (20) получаем, что для ряда (19)

$$\beta=\frac{1}{p}\frac{1}{(q(\gamma_0+c_0))^{1/(q-1)}}. \qquad (21)$$

Убедимся, что

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|F(x)|}{x^{p(x)}}<\beta.$$

В силу (17)

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda z}}{\varphi(\lambda)L(\lambda)}\,d\lambda,$$

где $\Gamma$ — граница угла $|\arg\lambda|<\varphi<\min\{\delta;\ \pi/\Delta_0\}$. Из этого представления видно, что

$$|F(x)|<A\max_{\lambda\in\Gamma}\left|\frac{e^{\lambda x}}{\Psi(\lambda)L(\lambda)}\right|,$$

откуда $|F(x)|<B(\varepsilon)\max\limits_{r>0}\exp(rx\cos\varphi-\alpha_1 r^{q(r)})$, $\forall\varepsilon>0$, где $\alpha_1=h_L(\varphi)+ +\gamma_0\cos q\varphi-\varepsilon$. Указанный максимум равен $\exp((1+o(1))\alpha t^{p(t)})$, $t\to+\infty$, где $t=x\cos\varphi$ и $(\alpha p)^{1/p}(\alpha_1 q)^{1/q}=1$. Тогда

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|F(x)|}{x^{p(x)}}\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\alpha\frac{(x\cos\varphi)^{p(x\cos\varphi)}}{x^{p(x)}}.$$

Воспользовавшись равенством $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{s(\alpha t)}{s(t)}=\alpha^p$, где $s(t)=t^{p(t)}$, получаем

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|F(x)|}{x^{p(x)}}\leqslant\alpha\cos^p\varphi.$$

Так как $\varepsilon$ — произвольное положительное число, то выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|F(x)|}{x^{p(x)}}\leqslant\alpha_0\cos^p\varphi,$$

где $(\alpha_0 p)^{1/p}(\alpha_1' q)^{1/q}=1$ и $\alpha_1'=h_L(\varphi)+\gamma_0\cos q\varphi$. Покажем, что $\varphi$ можно подобрать так, чтобы $\alpha_0\cos^p\varphi<\beta$. В силу (21) нужно показать, что

$$(c_0+\gamma_0)\cos^q\varphi<h_L(\varphi)+\gamma_0\cos q\varphi,$$

или

$$\left(\pi\Delta\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{\Delta_0}+\gamma_0\right)\cos^q\varphi<\frac{\pi\Delta}{\sin\dfrac{\pi q}{\Delta_0}}\cos q(\varphi-\pi/\Delta_0)+\gamma_0\cos q\varphi$$

для некоторых $\varphi$. Положим $\pi\Delta\operatorname{ctg}\dfrac{\pi q}{\Delta_0}+\gamma_0=\sigma_0$. Левая часть при малых $\varphi$ равна

$$\sigma_0-\frac{\sigma_0 q}{2}\varphi^2+\ldots,$$

правая часть при малых $\varphi$ равна $\sigma_0+\pi\Delta q\varphi+\ldots$. Исходя из этого, получаем

$$-\frac{\sigma_0 q}{2}\varphi^2+\ldots<\pi\Delta q\varphi+\ldots.$$

Следовательно, можно выбрать $\varphi$ столь малым, что последнее неравенство будет выполняться. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняется* (6) *и*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n^{q(\lambda_n)}} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} = \delta_0, \quad 0 < \delta_0 < +\infty.$$

*Тогда существует функция вида* (1) *такая, что для нее выполняется неравенство* (16).

Доказательство. Из (6) следует, что $L(z)$ — целая функция вполне регулярного роста с индикатором $h_L(\varphi) \equiv 0$. Поэтому [10, с. 70].

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ z\notin C^0}} \frac{\ln|L(z)|}{r^{q(r)}} = 0.$$

Следовательно [5, с. 41], существует последовательность $p_n$ такая, что $0 < p_n \uparrow +\infty$, $p_n/p_{n+1} \to 1$, и при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$\ln|L(p_n e^{i\varphi})| \geqslant -\varepsilon p_n^{q(p_n)}, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{22}$$

Рассмотрим контур $\Gamma_n$, ограниченный дугами $|z| = p_{n-1}$ и $|z| = p_n$ и отрезками лучей $|\arg z| = \pi/2\Delta_0$. Пусть $\Gamma_{p_1}, \Gamma_{p_2}, \ldots, \Gamma_{p_n}$ — те контуры, внутри каждого из которых лежит хотя бы одна точка из последовательности $\{\lambda_m\}$, и

$$\lambda_{m_{n-1}+1}, \quad \lambda_{m_{n-1}+2}, \ldots, \lambda_{m_n} \tag{23}$$

— точки из $\{\lambda_m\}$, лежащие внутри $\Gamma_{p_n}$, т. е. на интервале $(p_{n-1}, p_n)$. Положим

$$\alpha_{m_{n-1}+1} = \ldots = \alpha_{m_n} = \exp\left(-\left(\frac{1}{(\beta q)^{q-1} q} + \delta_0\right) \lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}\right), \quad 0 < \beta < +\infty,$$

и рассмотрим ряд

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k z}. \tag{24}$$

Заметим, что если $m_{n-1} < k \leqslant m_n$, то

$$-\left(\frac{1}{(\beta p)^{q-1} q} + \delta_0\right) = \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}} \leqslant \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_k^{q(\lambda_k)}} \leqslant \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_{m_{n-1}+1}^{q(\lambda_{m_n})}} =$$

$$= -\left(\frac{1}{(\beta p)^{q-1} q} + \delta_0\right)\left(\frac{\lambda_{m_n}}{\lambda_{m_{n-1}+1}}\right)^{q(\lambda_{m_n})},$$

откуда следует, что существует предел

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_k^{q(\lambda_k)}} = -\left(\frac{1}{(\beta p)^{q-1} q} + \delta_0\right),$$

ибо $1 < \lambda_{m_n}/\lambda_{m_{n-1}+1} < p_n/p_{n-1} \to 1$, $n \to +\infty$. Поэтому

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k^{q(\lambda_k)}}{\ln\left|\dfrac{L'(\lambda_k)}{\alpha_k}\right|} = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{-\dfrac{\ln\alpha_k}{\lambda_k^{q(\lambda_k)}} - \dfrac{1}{\lambda_k^{q(\lambda_k)}} \ln \dfrac{1}{|L'(\lambda_k)|}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{(\beta p)^{q-1} q} + \delta_0 - \delta_0} = (\beta p)^{q-1} q.$$

Следовательно, из леммы 1 вытекает, что условие (8) выполняется. Пусть $\omega = \frac{1}{(\beta p)^{q-1} q} + \delta_0$. Ряд (24) на действительной оси можно представить в виде

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \frac{e^{-\omega\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}}}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\omega\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}} \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} \frac{e^{\lambda_k x}}{L'(\lambda_k)} \right).$$

Представим сумму членов ряда (24), соответствующих показателям $\lambda_{m_n}$ из группы (23), в виде

$$A_n(x) = e^{-\omega\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{p_n}} \frac{e^{x\xi}}{L(\xi)} d\xi.$$

Тогда, учитывая (22),

$$|A_n(x)| \leqslant K_9 e^{-\omega\lambda_{m_n}^{(\lambda_{m_n})}} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi/2\Delta_0}^{\pi/2\Delta_0} \frac{e^{xp_n \cos\varphi} p_n d\varphi}{e^{-\varepsilon p_n^{q(p_n)}}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\pi/2\Delta_0}^{\pi/2\Delta_0} \frac{e^{xp_{n-1}\cos\varphi} p_{n-1} d\varphi}{e^{-\varepsilon p_{n-1}^{q(p_{n-1})}}} + 2 \int_{p_{n-1}}^{p_n} e^{xt\cos\frac{\pi}{2\Delta_0}} dt \right) \leqslant K_{10} e^{-\omega\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \left( e^{\varepsilon p_n^{q(p_n)}} p_n e^{xp_n} \frac{2\pi}{\Delta_0} + 2 \frac{e^{xp_n}}{x \cos\frac{\pi}{2\Delta_0}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant K_{11} e^{-\omega\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}} \frac{2}{\Delta_0} p_n e^{\varepsilon p_n^{q(p_n)}} e^{xp_n} = \varkappa_n e^{xp_n},$$

где $\varkappa_n = K_{11} e^{-\omega\lambda_{m_n}^{q(\lambda_{m_n})}} \frac{2}{\Delta_0} p_n e^{\varepsilon p_n^{q(p_n)}}$. Имеем

$$|A_n(x)| \leqslant \varkappa_n e^{xp_n}. \tag{25}$$

Рассмотрим вспомогательный ряд $\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n e^{p_n z}$. Справедливо равенство

$$(\beta_0^* p)^{q-1} q \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{p_k^{q(p_k)}}{\ln|1/\varkappa_k|} = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{p_k^{q(p_k)}}{\omega\lambda_{m_k}^{q(\lambda_{m_k})} - \ln\frac{2p_k}{\Delta_0} - \varepsilon p_k^{q(p_k)}}.$$

Отсюда, поскольку $p_k/p_{k-1} \to 1$ при $k \to +\infty$,

$$\beta_0^* = \frac{\beta}{(1 + \delta_0 q (\beta p)^{q-1})^{1/(q-1)}} < \beta.$$

В силу (25) и леммы 1 получаем оценку

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|F(x)|}{x^{p(x)}} \leqslant \beta_0^* < \beta.$$

Теорема 5 доказана.

1. *Anderson J. M., Binmore K. C.* Coefficient estimates for lacunary power series and Dirichlet series. I // Proc. London Math. Soc.— 1968.— **18**, N 3.— P. 36—48.
2. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле с комплексными показателями // Укр. мат. журн. — 1990.— **42**, №·7.— С. 882—888.
4. *Шеремета М. Н.* Теоремы единственности для целых рядов Дирихле // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 7.— С. 64—72.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М. : Наука, 1976.— 536 с.
6. *Леонтьев А. Ф.* Применение разложений целых функций в ряды экспонент // Мат. сб.— 1985.— **26**, № 2.— С. 147—171.
7. *Гольберг А. А., Островский И. В.* Индикаторы целых функций конечного порядка, представимых рядом Дирихле // Алгебра и анализ.— 1990.— **2**, № 3.— С. 144—170.
8. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент.— М. : Наука, 1981.— 320 с.
9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 632 с.
10. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.— М. : Наука, 1983.— 176 с.
11. *Сорокивский В. М.* О поведении на действительной оси целой функции медленного роста, представленной рядом Дирихле // Изв. вузов. Математика. — 1985. — № 6.— С. 40—45.

Получено 29.10.90