УДК 519.21

И. С. МОЛЧАНОВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ин-т пищ. пром-сти)

Случайные множества. Обзор некоторых результатов и приложений

Приведен обзор современных направлений теории случайных замкнутых множеств, в числе которых центральная предельная теорема, закон больших чисел для сумм по Минковскому и объединений случайных множеств, полумарковские случайные замкнутые множества, булевы модели и статистическое оценивание их параметров, задание распределений и сопутствующие вопросы теории емкости. Определена слабая сходимость случайных замкнутых множеств и описано ее применение к предельным теоремам для графиков и эпиграфиков случайных процессов и задачам стохастической оптимизации. Обсуждаются также другие связи с теорией случайных процессов (множества уровня, многозначные и управляемые случайные процессы).

Наведено огляд сучасних напрямків теорії випадкових замкнених множин, серед яких центральна гранична теорема, закон великих чисел для сум множин за Мінковським та об'єднань випадкових множин, півмарковські випадкові замкнені множини, бульові моделі та статистичне оцінювання їх параметрів, визначення розподілів випадкових множин. Визначена слабка збіжність випадкових замкнених множин та описано її застосування в граничних теоремах для графіків та епіграфіків випадкових процесів та задачах стохастичної оптимізації. Обговорюються також інші суміжні питання теорії випадкових процесів (множини рівня, багатозначні та керовані випадкові процеси).

Теория геометрических вероятностей — один из классических разделов теории вероятностей, издавна поставляющий интереснейшие примеры, задачи и проблемы. Начиная с задачи Бюффона об игле [1], общая их суть сводится к расчету вероятностей того или иного взаимного расположения геометрических объектов неслучайной формы. С развитием предмета в сферу геометрических вероятностей вошло рассмотрение случайных сечений тел, описание инвариантных мер на пространствах геометрических объектов, что обусловило общность идей и методов этой науки с методами интегральной геометрии [2—4].

Геометрическая сложность рассматриваемых в прикладных науках объектов заставляет пользоваться вероятностной интерпретацией. В первом приближении можно считать наблюдаемый объект неслучайным, а случайным лишь положение наблюдателя, имеющего в распоряжении проекцию объекта в некотором направлении или сечение его плоскостью. Такие постановки естественны в задачах математической томографии, где требуется восстановить трехмерное тело по его плоским сечениям. Однако встречается и более сложная схема, когда случайной является и сама геометрическая форма объекта. В этой постановке задачи мы имеем дело со случайными множествами Изображения рассматриваемых объектов (например, на фотопластинке) могут быть преобразованы в числовые данные заданием функции яркости изображения в каждой точке пространства. Дальнейшее преобразование может быть проведено введением порога яркости и превращением функции яркости в индикаторную, описывающую черно-белое изображение с двумя уровнями яркости 0 и 1. В ряде случаев рассмотрение случайных множеств удобнее и естественнее, чем использование индикаторных функций. Так, если рассматривается случайная прямая, то конечномерные распределения индикаторного поля соответствуют полю с почти наверное (п. н.), нулевыми значениями, т. е. пустому множеству.

Поскольку класс всех подмножеств базового пространства практически необозрим, целесообразно рассматривать лишь случайные множества с реализациями в некоторых подклассах, т. е. выпуклые, компактные, замкнутые или открытые случайные множества.

Строгое определение случайного замкнутого множества (СЗМ) введено в работах [5, 6]. Понятие СЗМ возникло из прикладных задач металлографии, микроскопии и теории пористых сред, где естественным предположением является стационарность, т. е. инвариантность распределения относительно пространственных сдвигов. Мы не будем в дальнейшем останавливаться на описании возможных применений, ограничиваясь ссылкой на работы [7—9], где наряду с примерами решений ряда практических задач имеется и обширная библиография, включающая прикладные исследования.

Сформулируем сначала точное определение СЗМ [6]. Ограничимся рассмотрением СЗМ в евклидовом пространстве $E = R^d$, отметив лишь что большинство приведенных ниже результатов переносятся для общего локально-компактного сепарабельного хаусдорфова пространства E. В некоторых случаях будут приведены ссылки на работы, посвященные СЗМ в банаховых пространствах.

Обозначим через $\mathcal{F}$ (соотв. $\mathcal{K}$) класс замкнутых (компактных) подмножеств E. Пусть σ_f — наименьшая σ-алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, содержащая классы $\mathcal{F}_K = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K \neq \varnothing\}$ для любого $K \in \mathcal{K}$. Случайным замкнутым множеством A называется $\mathcal{F}$-значный σ_f-измеримый случайный элемент. Последнее означает, что $\{A \cap K \neq \varnothing\}$ является случайным событием для любого компакта K. Очевидно, если A_1, A_2 — СЗМ, то $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \oplus A_2$ также СЗМ, где $A_1 \oplus A_2 = \{x + y : x \in A_1,\ y \in A_2\}$ — сумма по Минковскому. СЗМ A называется стационарным, если A совпадает по распределению с $A + x$ для любого $x \in E = R^d$.

С точки зрения аксиоматики в определении СЗМ нет ничего нового. Своеобразие теории придают стоящие перед ней задачи. Первый круг задач связан с разработкой аналитических средств, позволяющих описывать и исследовать распределения СЗМ, т. е. мер на σ_f. Второй круг вопросов состоит в изучении распределений геометрических характеристик СЗМ, т. е. функционалов на $\mathcal{F}$. Можно упомянуть также предельные теоремы для СЗМ относительно специфических для $\mathcal{F}$ операций (сумма по Минковскому, объединение), а также статистические задачи, в которых $\mathcal{F}$ — выборочное пространство.

Аппарат для описания распределений СЗМ предоставляется теорией емкости [10]. Определим для любого $K \in \mathcal{K}$ так называемый сопровождающий функционал СЗМ

$$T_A(K) = P\{A \cap K \neq \varnothing\},$$

опуская индекс A, если это не вызывает недоразумений. Функционал T является емкостью Шоке. Это означает, что:

I) T полунепрерывен сверху, т. е. $T(K_n) \downarrow T(K)$, если $K_n \downarrow K$, $n \to \infty$, $K, K_n \in \mathcal{K}$, $n \geqslant 1$;

II) для любых $n \geqslant 1$, $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ следующие функционалы неотрицательны: $S_1(K_0; K_1) = T(K_0 \cup K_1) - T(K_0), \ldots,$ $S_n(K_0; K_1, \ldots, K_n) = S_{n-1}(K_0; K_1, \ldots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K_0 \cup K_n; K_1, \ldots, K_{n-1})$.

Основной в теории распределений СЗМ является следующая теорема Шоке.

Теорема 1 [6, 8]. *Пусть T— функционал на $\mathcal{K}$. Тогда (необходимо единственная) вероятность P на σ_f, удовлетворяющая условию $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$, $K \in \mathcal{K}$, существует в том и только в том случае, если T — емкость Шоке, для которой $0 \leqslant T(K) \leqslant 1$, и $T(\varnothing) = 0$.*

Таким образом, функционал T играет в теории СЗМ роль функции распределения. В этой связи существенной проблемой является сужение класса компактов, на котором достаточно задавать T для полного описания распределения СЗМ. В [11] показано, что достаточно задавать T на классе компактов, являющихся конечными объединениями шаров в E. Другой путь заключается в использовании свойств реализаций СЗМ A. В [12] приведено обобщение теоремы Шоке для СЗМ, реализации которых принадлежат некоторому подклассу $\mathcal{F}$. Показано, что сужение класса реализаций вызывает также сужение класса, на котором необходимо задавать сопровождающий функционал. Теорему Шоке можно обобщить для пространства E без второй аксиомы счетности [13]. Однако аналог теоремы для СЗМ в бесконечномерных банаховых пространствах неизвестен.

Простейшим СЗМ является одноточечное множество $A = \{\xi\}$, где ξ — — E-значный случайный элемент. В этом и только в этом случае функционал T представляет собой меру, т. е. является счетно-аддитивным. Примеры емкостей, удовлетворяющих условиям I, II, рассмотрены в [10]. К их числу относятся ньютонова емкость и емкости Риса [14]. Однако они не удовлетворяют теореме Шоке, поскольку могут принимать большие 1 значения. В то же время теория СЗМ предоставляет и новые примеры емкостей. Например, $T(K) = 1 - \exp\{-C(K)\}$ удовлетворяет теореме Шоке, если $C(K)$ — ньютонова емкость. Опишем явно построение соответствующего СЗМ, следуя [6]. Пусть B — шар произвольно большого радиуса, μ_B = вероятность с носителем B, соответствующая почти всюду постоянному на B потенциалу относительно ньютоновского ядра, т. е. равновесное распределение на B [14], N — пуассоновское число с параметром $C(B)$. Тогда СЗМ $A \cap B$ эквивалентно объединению лежащих в B траекторий N независимых винеровских процессов с начальным распределением μ_B.

Теория точечных случайных процессов [3, 8] может рассматриваться как раздел теории случайных множеств, хотя, конечно, методы первой отличаются из-за специфики рассматриваемого объекта. Тем не менее, точечный случайный процесс есть локально-конечное СЗМ A, т. е. $\operatorname{card}(A \cap K) < \infty$ п. н. для любого компакта K. Согласно теореме Шоке, распределение точечного случайного процесса задается набором вероятностей $P\{\operatorname{card}(A \cap \cap K) = 0\}$, $K \in \mathcal{K}$. Простейшим из точечных случайных процессов является пуассоновский точечный процесс Π_Λ с мерой интенсивности Λ. Он представляет собой множество точек Π_Λ, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\operatorname{card}(A \cap K)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda(K)$, $K \in \mathcal{K}$; 2) $\operatorname{card}(A \cap K_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, независимы для непересекающихся компактов $K_1, \ldots, K_m$.

В последнее время интенсивно развивается теория многозначных функций, стимулируемая задачами негладкой оптимизации и оптимального управления [15]. Работая в рамках теории многозначных функций, легко определить СЗМ как многозначное замкнутое измеримое отображение. Важнейшим техническим средством этой теории является понятие селектора [15, 16]. Переводя это понятие на язык СЗМ, назовем селектором СЗМ A такой E-значный случайный элемент ξ такой, что $\xi \in A$ п. н. Как показано в [16], класс $S(A)$ всех селекторов СЗМ A непуст. Более того, A является замыканием некоторого счетного набора селекторов, называемого представлением Кастеня. Математическое ожидание СЗМ A определяется как семейство математических ожиданий всех его селекторов. Таким образом, $MA = \{M\xi : \xi \in S(A),\ M\xi$ существует$\}$, и есть не что иное, как интеграл Аумана от многозначной функции [15]. Математическое ожидание MA существует, если $M\|A\| < \infty$, где $\|A\| = \sup\{\|x\| : x \in A\}$. Согласно теореме Ауманна [15], MA всегда выпукло. Следовательно, MA совпадает с математическим ожиданием выпуклой оболочки $\operatorname{conv}(A)$, что, конечно, ограничивает возможные применения математического ожидания, например, в статистике СЗМ. Так, математическое ожидание стационарного СЗМ A совпадает с R^d. При этом MA определяется как предел $M(A \cap W)$ при $W \uparrow R^d$.

Математическое ожидание п. н. компактного СЗМ A может быть определено из соотношения $s(MA, u) = Ms(A, u)$, где $s(A, u) = \sup\{u(x): x \in A\}$ — опорная функция A, u принадлежит единичной сфере в сопряженном к E пространстве [17]. В [17] приведены некоторые применения математического ожидания СЗМ. Так, из классического неравенства Брунна-Минковского [18] получаем, что $\mu_d(MA)^{1/d} \geqslant M\mu_d(A)^{1/d}$, где μ_d — мера Лебега в R^d. В частности, если A_n есть выпуклая оболочка точек $X_1, \ldots \ldots, X_n$, представляющих собой выборку значений сферически симметричного стандартного гауссовского вектора в R^d, то из неравенства Маркова получаем $P\{\mu_d(A_n)\geqslant\alpha\}\leqslant\alpha_n\,(b_n/\alpha)^{1/d}$, где $\alpha>0$, b_d — объем единичного шара в R^d, a_n равно математическому ожиданию максимума независимых стандартных гауссовских случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

По аналогии с известным результатом о задании распределений случайных величин посредством математических ожиданий от максимальных порядковых статистик [19] с помощью математических ожиданий СЗМ могут быть охарактеризованы распределения случайных векторов. Именно: распределение вектора X полностью определяется последовательностью выпуклых множеств $\{MA_n,\ n\geqslant 1\}$, где A_n — выпуклая оболочка n независимых реализаций вектора X [20]. Выборки значений случайных векторов, рассматриваемые как случайные множества, исследовались в работе [21].

Отметим, что дисперсия СЗМ, определяемая как семейство дисперсий всех его селекторов, не допускает столь явной интерпретации и редко применяется в силу трудностей ее вычисления. В работе [22] найдена дисперсия СЗМ, представляющего собой случайный отрезок на прямой.

Рассмотрим теперь усиленный закон больших чисел для СЗМ, где в качестве предельного элемента появляется математическое ожидание СЗМ.

Теорема 2 [23]. *Если существует $M\|A_1\|$, и $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных СЗМ, то $(A_1\oplus\ldots\oplus A_n)/n$ сходится к MA_1 в метрике Хаусдорфа.*

Напомним, что расстояние Хаусдорфа между компактами K и K_1 определяется формулой $\rho_H(K, K_1)=\inf\{\varepsilon\geqslant 0: K\subset K_1^\varepsilon,\ K_1\subset K^\varepsilon\}$, где $K^\varepsilon = \{x: B_\varepsilon(x)\cap K\neq\varnothing\} = K\oplus B_\varepsilon(x)$, $B_\varepsilon(x)$ — шар радиуса ε в евклидовой метрике ρ с центром в x. Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Сначала показываем, что

$$\rho_H((A_1\oplus\ldots\oplus A_n)/n,\quad (\operatorname{conv}(A_1)\oplus\ldots\oplus\operatorname{conv}(A_n))/n)\to 0,$$

$n\to\infty$, т. е. СЗМ A_1 можно считать выпуклым. Выпуклое компактное СЗМ A_1 однозначно определяется своей опорной функцией $s(A_1, u)$, заданной на единичной сфере в сопряженном пространстве, т. е. на S^{d-1}. Поскольку сумма множеств по Минковскому соответствует сумма опорных функций, теорема 2 следует из у. з. б. ч. в пространстве непрерывных функций на S^{d-1}.

С помощью техники сведения к опорным функциям доказана и центральная предельная теорема для СЗМ [24]. Сложности, возникающие при формулировке центральной предельной теоремы, объясняются отсутствием обратной операции к сложению по Минковскому. Так, СЗМ с нулевым математическим ожиданием обязательно одноточечно, а с другой стороны, мы не можем центрировать сумму СЗМ с ненулевым математическим ожиданием. Следующая теорема доказывается использованием центральной предельной теоремы для опорных функций.

Теорема 3 [24]. *Если $A_1, A_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные СЗМ, $M\|A_1\|^2<\infty$, то $n^{1/2}\rho_H((A_1\oplus\ldots\oplus A_n)/n,\ MA_1)$ сходится по распределению к $\|Z\|$, где Z — выпуклое СЗМ, опорная функция которого $s(Z, u)$ есть гауссовский случайный элемент в $C(S^{d-1})$, ковариация которого совпадает с ковариацией $s(A_1, u)$.*

Естественно назвать предельное СЗМ Z гауссовским. В [25] показано, что гауссовское СЗМ имеет вид $Z = M+\xi$, где ξ — гауссовский вектор, M — неслучайный выпуклый компакт. Таким образом, с точки зрения теории СЗМ гауссовские СЗМ представляют лишь незначительный интерес, поскольку у них теряется случайность формы. Обобщения теорем 2, 3 для СЗМ в банаховых пространствах приведены в [26].

Другая операция, для которой могут быть рассмотрены предельные теоремы,— это объединение СЗМ. Сформулируем, следуя [27], предельную теорему для объединений СЗМ с мультипликативной нормировкой. Отметим, что в то время как схема суммирования по Минковскому обобщает обычное сложение случайных векторов, схема объединения СЗМ является обобщением max-суммирования случайных векторов [28].

Положим $Z_n = a_n^{-1}(A_1\cup\ldots\cup A_n)$, где $A_1, \ldots, A_n$ — независимые копии

СЗМ A, $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Понятие слабой сходимости СЗМ является частным случаем слабой сходимости случайных элементов. Можно показать, что слабая сходимость СЗМ вытекает из поточечной сходимости их сопровождающих функционалов [29, 30]. Положим

$$\mathcal{I} = \{K \in \mathcal{K} : \liminf_{x\to\infty} T_A(xK) = 0\}, \quad a_n(K) = \sup\{x : T_A(xK) \geqslant 1/n\},$$

считая $\sup \varnothing = 0$.

Теорема 4. [27]. *Если для любого $K \in \mathcal{I}$ существует (возможно бесконечный) предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(K)/a_n = q(K)$, и функция $T_A(xK)$, $x \geqslant 0$, правильно меняется в бесконечности с показателем $\alpha < 0$* [31], *то СЗМ Z_n слабо сходится к СЗМ Z с сопровождающим функционалом $\tilde{T}(K) = 1 - \exp\{-$ $- q(K)^{-\alpha}\}$ при $k \in \mathcal{I}$, и $\tilde{T}(K) = 1$ в противном случае.*

Условие теоремы 4 является необходимым, если сопровождающий функционал СЗМ Z_n сходится к $\tilde{T}$ равномерно. Предельное СЗМ является U-устойчивым, т. е. $b_n Z$ совпадает по распределению с $Z'_1 \cup \ldots \cup Z'_n$ для любого $n \geqslant 1$ и некоторого $b_n > 0$, где $Z'_1, \ldots, Z'_n$ — независимые копии СЗМ Z [6]; U-устойчивые СЗМ охарактеризованы в работе [6], где показано, что сопровождающий функционал U-устойчивого СЗМ имеет вид

$$T(K) = 1 - \exp\{-\Psi(K)\}. \tag{1}$$

Здесь $\Psi(K)$ — однородная емкость Шоке, т. е. $\Psi(sK) = s^\alpha \Psi(K)$ для некоторого $\alpha \neq 0$ и любых $s > 0$, $K \in \mathcal{K}$.

Сформулируем также один частный случай теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $A = M(\xi)$, где $M : R^m \to \mathcal{K}$ — функция, ставящая в соответствие точке $u \in R^m$ компакт в R^d, ξ — случайный вектор в R^m с плотностью распределения f из класса Π_2* [32], *$f = \varphi \cdot L$, φ — однородная функция индекса $\alpha - m$, $\alpha < 0$, L — медленно меняющаяся функция. Предположим, что функция M однородна, т. е. $M(tu) = t^\gamma M(u)$, $t > 0$, $u \neq 0$, для некоторого $\gamma > 0$. Если $a_n = \sup\{x^\gamma : x^\alpha L(xe) \geqslant 1/n\}$, то СЗМ Z_n слабо сходится к СЗМ Z с сопровождающим функционалом $\tilde{T}(K) = 1 - \exp\left\{-\int\limits_{\mathcal{L}_K} \varphi(u)\, du\right\}$ при $0 \notin K$* и *$\tilde{T}(K) = 1$ при $0 \in K$, где $\mathcal{L}_K =$ $= \{u \in R^m : M(u) \cap K \neq \varnothing\}$.*

Из теоремы 5 можно получить предельные теоремы для объединений, например, случайных треугольников (в этом случае $m=6$, $d=2$, и $M(u_1, \ldots$ $\ldots, u_6)$ есть треугольник с вершинами (u_1, u_2), (u_3, u_4), (u_5, u_6)) или случайных шаров ($m = 3$, $d = 2$, и $M(u_1, u_2, u_3)$ есть шар радиуса u_3 с центром в точке (u_1, u_2)).

Сформулируем также теорему о сходимости СЗМ Z_n почти наверное в топологии пространства $\mathcal{F}$, которая обобщает соответствующие результаты работы [21]. Сходимость в $\mathcal{F}$ определена в работах [6, 29] и эквивалентна сходимости $\rho_H(Z_n \cap K, Z \cap K)$ к нулю для любого компакта K.

Теорема 6. *Пусть $R(K) = -\ln T_A(K)$, и $\lim\limits_{t\to\infty} R(tK)/g(t) = \Lambda(K)$ для любого $K \in \mathcal{K}$, где $0 \leqslant \Lambda(K) \leqslant \infty$, $g(t)$ — правильно меняющаяся функция с положительным показателем* [31]. *Предположим, что $\Lambda(K) =$ $= \Lambda(\{sx : x \in K,\ s \geqslant 1\})$, $\Lambda(K_1) > \Lambda(K)$, если K_1 содержится во внутренности K, и $g(b_n) \sim \ln n$. Тогда $Z_n = b_n^{-1}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ сходится почти наверное в топологии $\mathcal{F}$ к неслучайному множеству $Z = R^d \setminus U\,\{\mathrm{Int}\, K:$ $K \in \mathcal{K},\ \Lambda(K) > 1\}$.*

В [6] определены безгранично делимые СЗМ, т. е. такие СЗМ, которые представимы в виде объединения n независимых СЗМ для любого $n > 1$. Показано, что любое безгранично делимое СЗМ A без фиксированных точек (т. е. удовлетворяющее условию $P\{x \in A\} < 1$ при $x \in E$) имеет сопровождающий функционал (1), в котором емкость Ψ не обязательно однородна. Такое множество представляет собой объединение точек пуассоновского процесса на $\mathcal{F}$. Последний определяется по локально-конечной мере θ на $\mathcal{F}$ (т. е. $\theta(\mathcal{F}_K) < \infty$ при $K \in \mathcal{K}$) аналогично обычному пуассоновскому процессу, в котором роль точек играют замкнутые множества. Если θ сосредоточено на $\mathcal{K} \setminus \{\varnothing\}$, то соответствующее СЗМ A называется булевой моделью [6]. Булева модель допускает эквивалентное определение

$$A = \bigcup_{x_i \in \Pi_\Lambda} (x_i + A_0^i),$$

где Π_Λ — пуассоновский точечный процесс в E, A_0^i, $i \geqslant 1$,— последовательность независимых СЗМ, эквивалентных некоторому СЗМ A_0, называемому зерном булевой модели. Если булева модель A стационарна, то процесс Π_Λ стационарен и обозначается Π_λ. Это означает, что мера интенсивности $\Lambda = \lambda\, \mu_d$, где $\lambda > 0$, μ_d — мера Лебега в R^d.

Булевы модели широко используются в прикладных исследованиях для моделирования СЗМ. В качестве зерна A_0 берут СЗМ с просто моделируемым распределением (шар случайного радиуса, случайно ориентированный эллипсоид) или даже неслучайное множество [8, 33]. Подбирая параметры булевой модели (интенсивность λ и распределение СЗМ A_0), можно получить СЗМ A достаточно сложной формы. С другой стороны, удобство булевой модели объясняется просто вычисляемым сопровождающим функционалом, который равен $T(K) = 1 - \exp\{-M\Lambda(A_0 \oplus \check{K})\}$, где $\check{K} = \{-x : x \in K\}$.

Рассмотрим некоторые свойства стационарной булевой модели A, у которой $T_A(K) = 1 - \exp\{-\Psi(K)\}$, $\Psi(K) = \lambda M \mu_d (A_0 \oplus \check{K})$. Ковариация булевой модели A, совпадающая с ковариацией соответствующего индикаторного случайного поля, определяется формулой

$$C(r) = P\{0 \in A,\ r \in A\} = 2p - 1 + (1-p)^2 \exp\{\lambda \gamma_{A_0}(r)\},$$

где $p = P\{0 \in A\}$ равно средней доли объема, занимаемого A, $\gamma_{A_0}(r) = M\mu_d(A_0 \cap A_0 - r)$. Если СЗМ A_0 изотропно (его распределение инвариантно относительно вращений) и есть случайное вращение выпуклого компакта M, т. е. $A_0 = \omega M$, ω — случайный элемент на группе вращений, то функция $g(x) = 4\pi r^2 \gamma_{A_0}(xu)/\mu_d(M)$ при $\|u\| = 1$ является плотностью распределения расстояния между двумя равномерно распределенными на M точками.

Если зерно A_0 булевой модели изотропно, то из формулы Штейнера [6, 8, 18] получаем

$$\Psi(K) = \lambda M \mu_d (A_0 \oplus \check{K}) = \lambda / b_d \sum_{k=0}^{d} C_d^k W_{d-k}(K)\, M W_k(A),$$

где K — произвольный выпуклый компакт, W_k — функционал Минковского порядка k [6, 18], b_d — объем единичного шара в R^d. В этом случае сопровождающий функционал булевой модели на классе всех выпуклых компактов полностью определяется лишь интенсивностью λ и средними значениями функционалов Минковского от зерна булевой модели (при $d = 2$ это средние значения площади и периметра).

С помощью булевой модели могут быть определены случайные меры на R^d. Например, для $B \subset R^3$ положим $S_A(B) = \mu_2((\partial A) \cap B)$, где A — булева модель в R^3, μ_2 — поверхностная лебегова мера. Таким образом, $S_A(B)$ равно площади поверхности части СЗМ A, лежащей внутри B В [6, 8] приведено подробное обсуждение свойств таких мер и их обобщений, получаемых заменой площади поверхности на различные функционалы Минковского.

Если L — линейное многообразие в R^d, то $L \cap A$ также является булевой моделью в пространстве меньшей размерности. В частности, если L — прямая, а зерно A_0 булевой модели выпукло и изотропно, то СЗМ $L \cap A$ представляет собой альтернирующий процесс восстановления, 0-фаза которого экпоненциально распределена с параметром $\lambda_1 = \lambda b_{d-1} M W_1(A_0)/b_d$.

Этот факт показывает, что булевы модели являются пространственным аналогом полумарковских случайных процессов.

Согласно [6], СЗМ A называется полумарковским, если $Q(K \cup K_1) \times \times Q(K \cap K_1) = Q(K) Q(K_1)$ для любых выпуклых K, K_1, лишь только $K \cup K_1$ выпукло. Здесь $Q(K) = 1 - T_A(K)$. Если СЗМ A полумарковское и безгранично делимое, то $T_A(K) = 1 - \exp\{-\Psi(K)\}$, причем емкость Шоке Ψ является C-аддитивной, т. е. $\Psi(K \cup K_1) + \Psi(K \cap K_1) = \Psi(K) + \Psi(K_1)$ для упомянутых выше компактов K, K_1. Из условия C-аддитивности функционала Ψ получаем, в свою очередь, что СЗМ A есть булева модель с почти наверное выпуклым зерном.

В [6] показано, что стационарное полумарковское СЗМ A в R^1 представляет собой альтернирующий процесс восстановления с экспоненциально распределенной 0-фазой. Если же A безгранично делимо, то оно представляет собой объединение замкнутых интервалов, длины которых независимы и одинаково распределены, а левые концы образуют пуассоновский точечный процесс в R^1. Это означает, что A является булевой моделью, зерно которой есть отрезок. При $d \geqslant 2$ полумарковское безгранично делимое стационарное СЗМ A представляет собой объединение $M_0 \cup \ldots \cup M_{d-1}$ независимых СЗМ, где M_0 — булева модель с п. н. выпуклым зерном, M_k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$, — объединение цилиндров, основаниями которых служат $(d-k)$-мерные булевы модели с выпуклыми зернами.

На основе булевой модели может быть построена модель роста, хорошо описывающая рост опухолей, распространение лесных пожаров, загрязнений моря и т. п. [34]. Пусть A_n — булева модель в R^d. Положим

$$A_{n+1} = \bigcup \{x_i + A^i_{0;n} : x_i \in \Pi^{(n)}_{\lambda_n} \cap A_n\},$$

где $\Pi^{(n)}_{\lambda_n}$, $n \geqslant 1$, — независимые стационарные пуассоновские точечные процессы с интенсивностями λ_n, $A^i_{0;n}$, $i \geqslant 1$, — независимые копии СЗМ $A_{0;n}$. Полученная цепь $\{A_n, n \geqslant 1\}$ представляет собой пример марковской цепи со значениями в $\mathcal{F}$ и является непрерывным обобщением «модели голосования» или контактного процесса [35].

По аналогии с булевой моделью могут быть построены процессы волокон (размерность зерна A_0 равна 1), а также процессы гиперплоскостей или прямых в R^u [6, 8].

Рассмотрим некоторые статистические задачи для СЗМ, конкретизируя их для булевой модели A. Первый вопрос, возникающий при статистическом анализе СЗМ, состоит в рациональном числовом представлении рассматриваемого геометрического объекта, т. е. семейства числовых функционалов, значения которых предполагаются известными и подвергаются дальнейшей обработке [25]. При анализе булевых моделей целесообразно в качестве таких функционалов использовать набор значений $1_{A \cap K \neq \varnothing}$ для компактов K, пробегающий некоторый класс $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$.

Имея независимые наблюдения $A_1, \ldots, A_n$ СЗМ A, определяем эмпирический сопровождающий функционал

$$T^*_n(K) = 1/n \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i \cap K \neq \varnothing}.$$

В [36] получены необходимые и достаточные условия выполнения теоремы Гливенко — Кантелли для СЗМ A, т. е. п. н. сходимости к нулю равномерного расстояния между $T^*_n(K)$ и $T_A(K)$ при $K \in \mathfrak{M}$, а в [37] охарактеризованы универсальные классы $\mathfrak{M}$, равномерная сходимость по которым имеет место для любого СЗМ A. По сравнению с известными условиями равномерной сходимости эмпирических мер условия для емкостей значительно более жесткие. Так, даже счетный набор одноточечных множеств в R^1 или класс полуплоскостей в R^2 не являются универсальными классами [37]. Функциональная предельная теорема для поля $\zeta_n(K) = n^{1/2}(T^*_n(K) - T_A(K))$ приведена в [38].

Метод оценивания параметров СЗМ соответствует методу подстановки эмпирического распределения в классической статистике [39]. Именно: если функционал $T(K;\theta)$ зависит от параметра θ, и из равенства $T(K;\theta)=t(K)$, $K\in\mathfrak{M}$, можем выразить $\theta=\Phi(t(K), K\in\mathfrak{M})$ с помощью непрерывного относительно равномерной сходимости на $\mathfrak{M}$ функционала Φ, то оценка $\theta_n^*=\Phi(T_n^*(K), K\in\mathfrak{M})$ является строго состоятельной при условии выполнения теоремы Гливенко — Кантелли по $\mathfrak{M}$.

Применим эту схему к стационарной булевой модели с зерном A_0. Предположим, что $M\max(0, \|A_0\|-t)=O(t^{-\gamma})$, $t\to\infty$, для некоторого $\gamma>0$. Поскольку в этом случае булева модель A эргодична [8, 40], сопровождающий функционал T_A может быть оценен по одной достаточно обширной реализации по формуле

$$\hat{T}_s(K)=\mu_d((A\oplus\check{K})\cap W_s)/\mu_d(W_s).$$

Здесь $W_s=sW$ — окно наблюдения, W — выпуклый компакт, внутренность которого содержит 0. Из [40, 41] следует, что для любого компакта $K_0\in\mathcal{K}$

$$\sup_{K\subset K_0, K\in\mathcal{K}}|\hat{T}_s(K)-T_A(K)|\to 0 \text{ п. н.}, \ s\to\infty,$$

если зерно A_0 п. н. совпадает с замыканием своей внутренности.

Статистические оценки параметров булевых моделей рассматривались в [8, 9, 34, 40, 41]. Простейшие оценки получаем, рассматривая в качестве $\mathfrak{M}$ класс шаров $\{B_r(0), r\geqslant 0\}$. В этом случае

$$\Psi(B_r(0))=-\ln(1-T_A(B_r(0)))=\lambda\sum_{k=0}^{d}C_d^k r^k MW_k(A_0).$$

Записав это равенство для $d+1$ значений $r=r_0, r_1, \ldots, r_d$ и решив полученную систему уравнений, можно выразить средние значения функционалов Минковского от зерна через значения $\Psi(B_{r_i}(0))$, $0\leqslant i\leqslant d$. Заменив их эмпирическими аналогами $\hat{\Psi}_s(B_{r_i}(0))=-\ln(1-\hat{T}_s(B_{r_i}(0)))$, получаем строго состоятельные оценки для $MW_k(A_0)$, $0\leqslant k\leqslant d-1$, и λ.

Путь к построению других оценок параметров зерна A_0 (например, формы неслучайного зерна) лежит в использовании невыпуклых компактов в качестве элементов $\mathfrak{M}$ [40]. Приведем здесь только оценку неслучайного зерна булевой модели. Пусть зерно A_0 есть неслучайное выпуклое множество M, совпадающее с замыканием своей внутренности. Положим для любого $\varepsilon>0$

$$M(\varepsilon)=\{x:\lambda\mu_d(M\cap M+x)\geqslant\varepsilon\}=\{x:2\Psi(\{0\})-\Psi(\{0,x\})\leqslant\varepsilon\},$$

$$\hat{M}_s(\varepsilon)=\{x:\hat{\Psi}_s(\{0\})-\hat{\Psi}_s(\{0,x\})\leqslant\varepsilon\}.$$

Из равномерной сходимости $\hat{\Psi}_s$ к Ψ следует, что для любого компакта K_0 $\rho_H(\hat{M}_s(\varepsilon)\cap K_0, M(\varepsilon)\cap K_0)\to 0$ п. н., $s\to\infty$. Множество $M(\varepsilon)$ при малых ε аппроксимирует центральную симметризацию $\tilde{M}=M\oplus\check{M}$ множества M. Применяя технику дистанционных функций [42, с. 246], получаем, что для любого $\varepsilon\leqslant\lambda\mu_d(M)$

$$(1-(\varepsilon/\lambda\mu_d(M))^{1/d})\,\tilde{M}\subset M(\varepsilon)\subset\tilde{M}.$$

Оценка $\hat{M}_s(\varepsilon)$ является примером многозначной оценки, т. е. оценки параметра, значение которого — замкнутое множество. Некоторые результаты, касающиеся общих свойств многозначных оценок, приведены в [43].

Завершая рассмотрение статистики СЗМ, отметим, что некоторые объекты классической статистики могут быть исследованы в рамках теории СЗМ. Так, в [38] рассмотрены квантили случайных векторов и исследована сходимость их оценок. При этом квантиль случайного вектора с функцией распределения $F(x)$ есть замкнутое множество $M_p = \{x : F(x) \leqslant p\}$, а его оценка — СЗМ $M_{p;n} = \{x : F_n^*(x) \leqslant p\}$, где F_n^* — эмпирическая функция распределения.

Остановимся теперь на некоторых задачах, связывающих теорию СЗМ с теорией случайных процессов. Случайные множества возникают естественным образом как графики, подграфики и уровни случайных полей. Например, если $\xi(t)$, $t \in E$, — выборочно непрерывное случайное поле, то его график $\mathrm{Gr}\,\xi = \{(t, \xi(t)) : t \in E\}$, эпиграфик $\mathrm{epi}\,\xi = \{(t, a) : t \in E,\ \xi(t) \leqslant a\}$ и уровень $A_\xi(x_0) = \{t \in E : \xi(t) = x_0\}$ являются СЗМ в соответствующем пространстве (при рассмотрении эпиграфиков предполагаем, что поле принимает значения во вполне упорядоченном пространстве). Условие непрерывности поля ξ необходимо лишь для замкнутости определяемых множеств и может быть ослаблено [11]. В частности, для замкнутости эпиграфика достаточно, чтобы поле ξ было п. н. полунепрерывно снизу.

Таким образом, ряд задач, касающихся случайных процессов, может быть естественно переформулирован и исследован на языке случайных множеств [11, 44]. С одной стороны, это прикладные задачи, интерпретирующие конструкции случайных множеств. С другой стороны, это изучение классических объектов с новой точки зрения, которая становится возможной в результате применения методов теории случайных множеств.

В первую очередь это касается вопросов сходимости случайных процессов. Положим $f_n(x) = \sin nx$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $n \geqslant 1$. Тогда функции f_n не имеют предела ни в одном из классических определений. Тем не менее, графики f_n, рассматриваемые как замкнутые подмножества полосы $[-1, 1] \times R$, сходятся в $\mathcal{F}$ к множеству $[-1, 1]^2$. Такие соображения поясняют целесообразность определения сходимости случайных процессов через сходимость их графиков в пространстве замкнутых множеств [29, 45]. Это определение сходно с определением топологии M_1 в [46], однако допускает нефункциональные предельные объекты, т. е. сходимость функций к замкнутым множествам.

Если траектории случайных процессов являются реализациями СЗМ, то можно воспользоваться условиями слабой сходимости СЗМ, выражаемыми через поточечную сходимость сопровождающих функционалов [29, 30].

Теорема 7 [29]. *Если СЗМ $A_n, A \subset R^2$, то из сходимости $T_{A_n}(K) \to T_A(K)$, $n \to \infty$, для каждого K, являющегося объединением конечного числа замкнутых и открытых ограниченных прямоугольников с вершинами из всюду плотного в R^2 множества, следует слабая сходимость A_n к СЗМ A.*

В [29, 45] этот подход применяется к последовательности процессов, моделирующих некоторые виды помех и описываемых следующим образом. Пусть $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, W — подмножество целых неотрицательных чисел Z_0^+. Положим для любого $t \in [n, n+1)$, $n \in Z_0^+$, $\xi(t) = \alpha_n$, если $n \notin W$, и $\xi(t) = \alpha_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)(t - n)$ в противном случае. Траектории процесса ξ кусочно линейны, но не обязательно непрерывны. Для $b_n \uparrow +\infty$ положим $\xi_n(t) = b_n \xi(nt)$, $t \in [0, 1]$, и рассмотрим СЗМ A_n являющееся замыканием графика ξ_n. Приведем один из результатов, принадлежащих Н. Н. Ляшенко.

Теорема 8 [45]. *Пусть* $I = (Z_0^+ \setminus W) \cap (Z_0^+ \setminus W + 1)$, $\pi_n(I) = 1/n \times \mathrm{card}(I \cap \{1, \ldots, n\})$, $\limsup \pi_n(I) < 1$. *Тогда для слабой сходимости* СЗМ A_n *к некоторому предельному СЗМ A необходимо и достаточно выполнение условий:*

1) *существует предел* $\lim \pi_n(I) = \pi(I)$;

2) $\alpha_0 > 0$ *п. н., или* $\alpha_0 < 0$ *п. н.*;

3) *существует такое всюду плотное в R^2 множество L, что* $nP\{\alpha_0 \in b_n^{-1}[x, y]^*\} \to \nu([x, y]^*)$ *для любого* $(x, y) \in L$, *где ν — мера на σ-алгебре борелевских подмножеств R,* $[x, y]^* = \mathrm{conv}([x, y] \cup \{0\})$. *Если* $\pi(I) > 0$, *и* $\nu([x, y]^*) < \infty$, *то*

$$\lim nP\{\alpha_0 \in b_n^{-1}[x, y]\} = \nu([x, y]); \tag{2}$$

4) *существует такая точка* $(x, y) \in L$, *что*

$$0 < \nu([x, y]) < \infty. \tag{3}$$

При выполнении указанных условий СЗМ A имеет сопровождающий функционал

$$T(K) = 1 - \exp\{-\pi(I)\mu(K) - (1 - \pi(I))\mu(K^*)\},$$

где $K \subset [0, 1] \times R$, μ — *произведение меры Лебега* μ_1 *и* ν, $K^* = \{(x, y) : y \in [0, z] \cup [z, 0], (x, z) \in K\}$.

В простейшем случае $W = \varnothing$, и процесс $\xi_n(t)$ является ступенчатым. Тогда для слабой сходимости достаточно выполнения условий (2), (3) [29]. Предельное СЗМ в этом случае имеет сопровождающий функционал $T(K) = 1 - \exp\{-\mu(K)\}$, т. е. является точечным пуассоновским процессом в полосе с мерой интенсивности μ. Если $W = \mathcal{I}_0^+$, то реализации предельного СЗМ A состоят из вертикальных лучей, идущих вверх из точек того же самого пуассоновского процесса. В [45] рассмотрены предельные теоремы для некоторых функционалов геометрического типа от допредельных СЗМ в схеме теоремы 8.

Одним из таких функционалов является инфинум случайного процесса на отрезке. Этот функционал возникает при решении задач стохастической оптимизации [11, 44]. Очевидно, сходимость инфинумов может обеспечиваться и более слабой топологией, чем топология сходимости графиков процессов в $\mathcal{F}$. Эта слабейшая топология может быть определена как топология сходимости эпиграфиков случайных процессов как замкнутых множеств [44]. Если почти все реализации сепарабельного процесса ξ со значениями в расширенной прямой полунепрерывны снизу, то его эпиграфик $\operatorname{epi} \xi = \{(t, x) : t \in E, \xi(t) \leqslant x\}$ есть СЗМ. Очевидно, любой непрерывный справа и имеющий пределы слева процесс имеет полунепрерывную снизу модификацию [11]. В свою очередь, если $\operatorname{epi} \xi$ есть СЗМ, то процесс ξ называют нормальным интеграндом.

Последовательность функций f_n эпи-сходится к f, если соответствующие эпиграфики сходятся как замкнутые подмножества $E \times R$. Локальная компактность $\mathcal{F}$ влечет следующий факт.

Т е о р е м а 9 [11]. *Любое семейство нормальных интеграндов предкомпактно в топологии эпи-сходимости.*

В [11] рассматривается эпи-сходимость случайных процессов по вероятности, почти наверное и по распределению. Последняя, например, определяется как слабая сходимость эпиграфиков как СЗМ в $E \times R$. Если семейство нормальных интеграндов ξ_ν равностепенно полунепрерывно снизу, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и точки $x \in E$ существует такая ее окрестность V, что для любого ν

$$\inf\{\xi_\nu(y) : y \in V\} \geqslant \min(\varepsilon^{-1}, \xi_\nu(x) - \varepsilon) \text{ п. н.},$$

то эпи-сходимость по распределению эквивалентна сходимости конечномерных распределений случайных процессов [11].

Чтобы обеспечить сходимость инфинумов по E в случае лишь локально-компактного E, необходимо более сильное условие на эпиграфики. Нормальный интегранд ξ называется inf-компактным, если для любого $\alpha \in R$ множество $\{x : \xi(x, \omega) \leqslant \alpha\}$ компактно п. н.

Т е о р е м а 10 [11]. *Если последовательность* inf-*компактных нормальных интеграндов* $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ *эпи-сходится п. н. к* ξ, *то последовательность случайных величин* $z_n = \inf\{\xi_n(x) : x \in E\}$ *сходится п. н. к случайной величине* $z = \inf\{\xi(x) : x \in E\}$.

Отметим, что операция объединения эпиграфиков соответствует взятию минимума случайных процессов. Соответственно, теоремы 4, 6 настоящей работы могут быть применены и в этой схеме.

Многие задачи в теории управляемых случайных процессов также могут быть естественно представлены с помощью техники многозначных функций и случайных множеств. Пусть $\xi(t, u, \omega)$ — управляемый случайный процесс, $u \in U(t)$ — множество возможных управлений. Тогда многозначная случайная функция $\{\xi(t, u, \omega) : u \in U(t)\}$ представляет собой множество значений процесса при всех возможных управлениях. Этот подход аналогичен тому, который применяется в теории оптимального управления и теории дифференциальных включений [15, 47]. В частности, в [48] определена слабая сходимость многозначных функций и рассмотрено предельное поведение множества значений управляемого процесса $\{\xi_\varepsilon(t, u, \omega) : u \in U_\varepsilon(t)\}$ при $\varepsilon \to 0$, где многозначная функция $U_\varepsilon(t)$, задающая управление, слабо сходится к некоторому пределу. С этим кругом задач связана проблематика случайных дифференциальных включений [49] и многозначных мартингалов [50, 51]. При этом неравенство в определении полумартингалов заменяется на включение, а условное математическое ожидание СЗМ определяется как семейство условных математических ожиданий всех его селекторов.

Рассмотрим также некоторые результаты, касающиеся уровней случайных процессов. Если $\xi(t)$, $t \geqslant 0$,— строго марковский непрерывный справа процесс, то замыкание его уровня $\bar{A}_\xi(x_0)$ есть СЗМ, которое называется строго марковским или регенеративным [52, 53]. Теория регенеративных множеств возникла в результате развития понятия рекуррентных событий, введенных В. Феллером. В рамках теории регенеративных множеств оказалось возможным записать условия на СЗМ A в $[0, +\infty)$, при выполнении которых необходимо существует строго марковский непрерывный справа процесс, уровнем (или замыканием уровня) которого оно является [54]. В качестве такого процесса можно взять линейчатый случайный процесс, множество нулей которого совпадает с A. Техника исследования строго марковских СЗМ заключается в использовании локального времени, т. е. непрерывного процесса, точки роста которого образуют данное СЗМ. Всякое строго марковское СЗМ является замыканием образа субординатора, т. е. процесса с независимыми приращениями и п. н. неубывающими траекториями, который является обратным процессом к локальному времени. Семейства уровней строго марковского процесса, т. е. «многокомпонентные» СЗМ, рассмотрены в [55]. В этом случае СЗМ представляет собой замыкание образа процесса с независимыми приращениями в случайной среде.

Описанная задача внутренней характеризации множеств уровней, т. е. условий на СЗМ в R^1, при которых оно является уровнем случайного процесса некоторого типа, решена только для строго марковских процессов. Решение этой задачи для других классов процессов (марковских, гауссовских и др.) наряду с интересом для теории случайных процессов будет служить источником новых моделей СЗМ.

Отметим, что случайные множества являются инструментом в теории марковских случайных полей, где они являются аналогами моментов остановки, при рассмотрении случайных операторов со случайной областью определения, в общей теории случайных процессов, где множества могут быть не замкнутыми, а лишь измеримыми.

1. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности.— М. : Наука, 1972.— 192 с.
2. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.— М. : Наука, 1983.— 360 с.
3. *Амбарцумян Р. В., Мекке Й., Штойян Д.* Введение в стохастическую геометрию.— М. : Наука, 1989.— 400 с.
4. *Ambartzumian R. V.* Factorization Calculus and Geometric Probability.— Cambridge: Univ. Press, 1990.— 286 p.
5. *Kendall D. G.* Foundations of a theory of random sets // Stochastic Geometry.— London: Wiley, 1973.— 318 p.
6. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия.— М. : Мир, 1978.— 318 с.
7. *Stoyan D.* Applied stochastic geometry: a survey // Biometr. J.— 1979.— **21**, N 8.— P. 693—715.
8. *Stoyan D., Kendall W. S., Mecke J.* Stochastic Geometry and Its Applications.— Berlin: Akademie-Verlag, 1987.— 345 p.
9. *Serra J.-P.* Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Acad. Press, —1982. — 610 p.
10. *Choquet G.* Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier.— 1953/54.— **5**.— P. 131—295.
11. *Salinetti G., Wets R. J.-B.* On the convergence in distribution of measurable multifunctions (random sets), normal integrands, stochastic processes and stochastic infima // Math. of Oper. Res.— 1986.— 11, N 3.— P. 385—419.

12. *Молчанов И. С.* Одно обобщение теоремы Шоке для случайных множеств с заданным классом реализаций // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1983.— Вып. 28.— С. 86—93.
13. *Ross D.* Random sets without separability // Ann. Probab.— 1986.— **14**, N 3.— P. 1064—1069.
14. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1965.— 516 с.
15. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ.— М. : Наука, 1988.— 200 с.
16. *Wagner D. H.* Survey of measurable selection theorem // SIAM J. Control Optim.—1977.— **15**.— P. 859—903.
17. *Vitale R. A.* An alternate formulation of mean value for random geometric figures // J. Microscopy.— 1988.— **151**, N 3.— P. 197—204.
18. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М. : Наука, 1966.— 416 с.
19. *Hoeffding W.* On the distribution of the expected values of the order statistics // Ann. Math. Statist.— 1953.— **24**.— P. 93—100.
20. *Vitale R. A.* Expected convex hulls, order statistics and Banach space probabilities // Acta Applicandae Math.— 1987.— **9**, N 1—2.— P. 97—102.
21. *Davis R. A., Mulrow E., Resnick S. I.* Almost sure limit sets of random samples in R^d // Adv. Appl. Probab.— 1988.— **20**, N 3.— P. 573—599.
22. *Kruse R.* On the variance of random sets // J. Math. Anal. Appl.— 1987.— **122**, N 2.— P. 469—473.
23. *Artstein Z., Vitale R. A.* A strong law of large numbers for random compact sets // Ann. Probab.— 1975.— **3**.— P. 879—882.
24. *Weil W.* An application of the central limit theorem for Banachspace-valued random variables to the theory of random sets // Z. Wahrsheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1979.— **49**, N 1.— P. 37—47.
25. *Ляшенко Н. Н.* Статистика случайных компактов в евклидовом пространстве // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1980.—**98**. — С. 115—139.
26. *Gine E., Hahn M. G., Zinn J.* Limit theorems for random sets: an application of probability in Banach space results // Lect. Notes Math.— 1983.— **990**.— P. 112—135.
27. *Молчанов И. С.* О предельных теоремах для объединений случайных замкнутых множеств // Пятая школа молодых математиков Сибири и Дальнего Востока. Тез. докл.— Новосибирск, 1990.— С. 73—74.
28. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик.— М. : Наука, 1984.— 304 с.
29. *Ляшенко Н. Н.* Слабая сходимость ступенчатых процессов в пространстве замкнутых множеств // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1983.— **130**.— С. 122—129.
30. *Norberg T.* Convergence and existence of random sets distributions // Ann. Probab.— 1984.— **12**, N 3.— P. 726—732.
31. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции.— М. : Наука, 1985.— 144 с.
32. *Якымив А. Л.* Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана-Харриса // Мат. сб.— 1981.— **115**, № 3.— С. 463—477.
33. *Cressie N., Lasleti G. M.* Random set theory and problems of modeling // SIAM Review.— 1987.— **29**, N 4.— P. 557—574.
34. *Cressie N.* Modeling sets // Lect. Notes Math.— 1984.— **1091**.— P. 138—149.
35. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием.— М. : Мир, 1989.— 550 с.
36. *Молчанов И. С.* Равномерные законы больших чисел для эмпирических сопровождающих функционалов случайных замкнутых множеств // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— **32**, № 3.— С. 612—616.
37. *Молчанов И. С.* Характеризация универсальных классов в теореме Гливенко-Кантелли для случайных замкнутых множеств // Там же. — 1989. — Вып. 41. — С. 74—78.
38. *Молчанов И. С.* Эмпирическое оценивание квантилей распределений случайных замкнутых множеств // Там же.— 1990.— **35**, № 3.— С. 586—592.
39. *Боровков А. А.* Математическая статистика.— М. : Наука, 1984.— 472 с.
40. *Molchanov I. S.* Estimation of the size distribution of spherical grains in the Boolean model // Biometr. J. — 1990.— **32**, N 7.— P. 877—886.
41. *Молчанов И. С.* О сходимости эмпирических сопровождающих функционалов стационарных случайных множеств // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1988.— Вып. 38.— С. 97—99.
42. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества.— М. : Наука, 1985.— 336 с.
43. *Meister H., Moeschlin O.* Unbiased set-valued estimators with minimal risk // J. Math. Anal. Appl.— 1988.— **130**, N 2.— P. 426—438.
44. *Salinetti G.* Stochastic optimization and stochastic processes: the epigraphical approach// Math. Res.— 1987.— **35**.— P. 344—354.
45. *Ляшенко Н. Н.* Графики случайных процессов как случайные множества // Теория вероятностей и ее применения. — 1986.— **31**, № 1.— С. 81—90.
46. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Там же.— 1956.— **1**, № 3.— С. 289—319.
47. *Обэн Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ.— М. : Мир, 1988.— 512 с.
48. *Artstein Z.* Weak convergence of set-valued functions and control // SIAM Review.— 1975.— **13**, N 4.— P. 865—878.
49. *Blasi de F. S., Myiak J.* Random differential inclusions with non-convex right-hand side // Funk. Ekvacioj.— 1987.— **30**, N 1.— P. 1—8.

50. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivar. Anal.— 1977.— 7.— P. 149—182.
51. *Herer W.* Martingales with values in closed bounded subsets of a metric space // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.— 1987.— 305, N 6.— P. 275—278.
52. *Крылов Н. В., Юшкевич А. А.* Марковские случайные множества // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1965.— 13.— С. 114—137.
53. *Kingman J. F. C.* Homecomings of Markov processes // Adv. Appl. Probab.— 1973.— 5, N 1.— P. 66—102.
54. *Hoffman-Jorgensen J.* Markov sets // Math. Scand.— 1969.— 24, N 2.— P. 145—166.
55. *Молчанов И. С.* Структура строго марковских маркированных случайных замкнутых множеств // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 74—80.

Получено 11.04.91