УДК 517.91;517.51

А. М. САМОЙЛЕНКО, чл.-корр. АН Украины,
С. И. ТРОФИМЧУК, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О пространствах кусочно-непрерывных почти периодических функций и почти периодических множеств на прямой. I

В связи с изучением кусочно-непрерывных почти периодических функций вводится понятие числового счетного почти периодического множества. Исследованы различные его свойства; доказана, в частности, замкнутость пространства почти периодических множеств относительно операции свободного объединения.

У зв'язку з дослідженням кусково-неперервних майже періодичних функцій впроваджується визначення числової зліченної майже періодичної множини. Доведені різні властивості таких множин, наприклад, замкненість простору майже періодичних множин відносно дії вільного об'єднання.

1. Среди различных обобщений почти периодических (п. п.) функций специалисты по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием (разрывным динамическим системам) чаще всего привлекают класс кусочно-непрерывных (к. н.) п. п. функций, впервые рассмотренный Векслером [1] в связи с определением к. н. п. п. решения импульсной системы

$$dx/dt = A(t)\,x,$$
$$\Delta x|_{t_k} = c_k, \quad t_k > t_{k-1}.$$

Под свойством почти периодичности к. н. функции $x(t): R \to R$ с разрывами в точках $\{t_k\} = \{t_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ Векслер понимает следующее [1]:

H_0. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество точек τ таких, что

$$|x(t+\tau) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in R: |t - t_k| > \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что разрыв в точке t_s может быть устраним и поэтому, строго говоря, объект определения суть пара $X = (x(t), \{t_k\})$, где на последовательность $\{t_k\}$ в [1] налагается условие:

H_1. $\lim\limits_{k\to\pm\infty} t_k = \pm\infty$ и последовательности $\{t_k^j\} = \{t_{k+j} - t_k\}$ п. п. (по k) равностепенно по $j \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, к. н. п. п. функции, рассматриваемые в [1], имели дополнительные свойства H_1, H_2, следующие из ограниченности п. п. функции $A(t)$ и п. п. последовательности $\{c_k\}$:

H_2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x(t') - x(t'')| < \varepsilon,$

$$\forall t', t'' : |t' - t''| < \delta(\varepsilon), [t', t''] \cap \{t_k\} = \varnothing.$$

H_3. $x(t)$ ограничена: $|x(t)| \leqslant m \in R \ \forall t \in R$.

Как мы увидим далее, ни одно из перечисленных условий не является следствием остальных. Из H_2 следует существование пределов $\lim\limits_{t \to t_k \pm 0} x(t) = x(t_k \pm 0)$. Положим по определению функцию $x(t)$ непрерывной слева.

Свойства H_0, H_1, H_2 с с дополнительным условием $t_k > t_{k-1}$ впервые выделены и взяты как аксиомы для определения нового класса к. н. п. п. функций в [2]. В [2, 3] получены некоторые результаты, характеризующие этот класс функций. В [4, 5] предложены два различных (можно показать — и неэквивалентных) определения к. н. п. п. функций $(x(t), \{t_k\})$, эквивалентных, однако, определению [2] при $\inf\limits_k t_k^1 > 0$.

Обилие определений к. н. п. п. функций и небольшое число результатов касающихся их (не доказана даже замкнутость относительно сложения) послужили поводом для написания этой работы. Особое внимание, в частности, будет уделено к. н. п. п. функциям, удовлетворяющим (в смысле Векслера) аксиомам H_0, H_1, H_2, H_3. Класс всех таких функций обозначим через $APW(R)$.

Первая часть работы будет посвящена анализу условия H_1.

2. Пусть T — счетное множество действительных чисел, причем существуют сколь угодно большие отрицательные и положительные числа — элементы T и для любого $m > 0$ множество $\{t \in T : |t| \leqslant m\}$ конечно. Совокупность всех таких множеств обозначим через $\mathfrak{A}$. Из определения следует, что число $t \in T$ может входить в состав T лишь конечное число раз, называемое кратностью t. Величина

$$\rho(T_1, T_2) = \inf_{\varphi} \sup_{t \in T_1} |\varphi(t) - t|,$$

где нижняя грань берется по всем биекциям $\varphi : T_1 \to T_2$; $T_1, T_2 \in \mathfrak{A}$, определяет расстояние в $\mathfrak{A}$. Несложно показать, что пространство $(\mathfrak{A}, \rho)$ полно. Если $T \in \mathfrak{A}$, то для $\tau \in R$ множество $T + \tau$, элементы которого есть в точности элементы T, увеличенные на τ, также принадлежит $\mathfrak{A}$, причем $\rho(T + \tau, T) \leqslant \tau$;

$$\rho(T_1 + \tau, T_2 + \tau) = \rho(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2, T \in \mathfrak{A}, \quad \tau \in R.$$

Отображение $\theta_s : \mathfrak{A} \times R \to \mathfrak{A}$, задаваемое формулой $\theta_s(T) = T + s$, непрерывно по совокупности аргументов и, очевидно, задает динамическую систему на $(\mathfrak{A}, \rho)$, причем

$$\rho(\theta_s(T_1), \quad \theta_s(T_2)) = \rho(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2, \tau. \tag{1}$$

3. Сделаем небольшое отступление от изложения. Пусть (M, d) — полное метрическое пространство, в котором задана непрерывная динамическая система φ_s: $M \times R \to M$ со свойством: $\exists C \geqslant 1$:

$$d(\varphi_s(m_1), \varphi_s(m_2)) \leqslant C d(m_1, m_2) \quad \forall s, m_1, m_2. \tag{2}$$

Помимо обычного определения п. п. движения по Бору в такой системе (для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-сдвигов траектории) можно дать и определение почти периодичности движения $\varphi_s(m)$ по Бохнеру: для этого из любой последовательности $\{\alpha_n\}$ должна извлекаться подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ такая, что для некоторого $m_1 \in M$ выполнено $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi_{\alpha_{n_k}}(m) = m_1$.

Теорема 1. *При указанных выше условиях п. п. движения по Бору эквивалентна его п. п. по Бохнеру. Множество* $H(m) = \text{Closure}\{\varphi_s(m), s \in R\}$ *компактно тогда и только тогда, когда* $\varphi_s(m)$ *— п. п. движение, при этом* $\forall m_1 \in H(m)$ *будет* $H(m_1) = H(m)$.

Доказательство (ср. с [6, 7]). Пусть $\varphi_s(m)$ — движение, п. п. по Бохнеру, и $\{m_k\} \subset H(m)$. Тогда существует такая последовательность $\{\alpha_k\}$ действительных чисел, что $d(m_k, \varphi_{\alpha_k}(m)) < 1/k$. Выберем подпоследовательность $\{\alpha_{k_p}\} \subset \{\alpha_k\}$ такую, что $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi_{\alpha_{k_p}}(m) = \overline{m} \in H(m)$. Тогда $\lim\limits_{p\to\infty} d(m_{k_p}, \overline{m}) \leqslant \lim\limits_{p\to\infty} (d(m_{k_p}, \varphi^{(m)}_{\alpha_{k_p}}) + d(\overline{m}, \varphi^{(m)}_{\alpha_{k_p}})) = 0$ и поэтому $H(m)$ компактно. Компактность же $H(m)$ гарантирует п. п. движения $\varphi_s(m)$ по Бохнеру очевидным образом. Далее, если $m^* \in H(m_1)$, то для некоторой последовательности $\{\alpha_k\}$ будет $\lim\limits_{k\to\infty} d(\varphi_{\alpha_k}(m_1), m^*) = 0$. Выберем $\{\beta_k\}$ так, чтобы $d(\varphi_{\alpha_k}(m_1), \varphi_{\beta_k}(m)) < 1/k$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} d(\varphi_{\beta_k}(m), m^*) \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} (d(\varphi_{\beta_k}(m), \varphi_{\alpha_k}(m_1)) + d(\varphi_{\alpha_k}(m_1), m^*)) = 0$ и $m^* \in H(m)$; $H(m_1) \subseteq H(m)$. С другой стороны, если $m_1 \in H(m)$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} d(\varphi_{\alpha_k}(m), m_1) = 0$, то согласно (2) $d(\varphi_{-\alpha_k} \times \times (m_1), m) \leqslant Cd(m_1, \varphi_{\alpha_k}(m)) \to 0$ и $m \in H(m_1)$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают: $H(m) \subseteq H(m_1)$, и в итоге $H(m) = H(m_1)$.

Итак, если движение $\varphi_s(m)$ п. п. по Бохнеру, то замыкание его траектории есть компактное минимальное множество, а поэтому согласно первой теореме Биркгофа [7, с. 69] движение φ_s m рекуррентно. Так как динамическая система (M, φ_s) с учетом (2) устойчива по Ляпунову [7], то по теореме А. А. Маркова [7, с. 98] рекуррентное движение почти периодично по Бору.

Обратно, из почти периодичности по Бору движения $\varphi_s(m)$ следует его рекуррентность [7, с. 86], а согласно второй теореме Биркгофа [7, с. 70] в полном пространстве замыкание траектории рекуррентного движения есть компактное минимальное множество. Тем самым теорема 1 доказана.

4. Пространство $(\mathfrak{A}, \theta_s)$ удовлетворяет всем требованиям п. 3. и в нем справедливо утверждение теоремы 1, причем согласно (1) определения почти периодичности сводятся к следующему:

по Бору — множество $T \in \mathfrak{A}$ п. п., если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $T(\varepsilon) > 0$, что в любом интервале длины $T(\varepsilon)$ можно найти число τ такое, что $\rho(T, T + \tau) < \varepsilon$;

по Бохнеру — множество $T \in \mathfrak{A}$ п. п., если из каждой последовательности $\{h_k\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{h_{k_n}\}$ такую, что $T + h_{k_n} \to \to T_1 \in \mathfrak{A}$ при $n \to \infty$.

Следствие 1. *Если $T_0, T_1, \ldots, T_m$ — п. п. множества, то множество $T_0 \sqcup \ldots \sqcup T_m$ также п. п., если под $A \sqcup B$ понимать свободное объединение A, B.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m = 2$. Заметим вначале, что при $P, Q, R, S \in \mathfrak{A}$, $h \in R$ справедливо: а) $P \sqcup Q \in \mathfrak{A}$; б) $(P \sqcup Q) + h = (P + h) \sqcup (Q + h)$; в) $\rho(P \sqcup Q, R \sqcup S) \leqslant \max(\rho(P, R); \rho(Q, S))$. Так как T_1, T_2 — п. п. множества, то из любой последовательности $\{h_k\}$ действительных чисел можно извлечь подпоследовательность $\{h_{k_n}\}$ такую, что $T_i + h_{k_n} \to T_i^*$ при $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Пусть $T_{12} = T_1 \sqcup T_2$, $T_{12}^* = T_1^* \sqcup T_2^*$, тогда $\rho(T_{12} + h_{k_n}, T_{12}^*) = \rho((T_1 + h_{k_n}) \sqcup (T_2 + h_{k_n}), T_1^* \sqcup \sqcup T_2^*) \leqslant \max(\rho(T_1 + h_{k_n}, T_1^*); \rho(T_2 + h_{k_n}, T_2^*)) \to 0$, и поэтому множество T_{12} почти периодическое.

Определение: множество $T \in \mathfrak{A}$ будем называть сильно п. п., если его элементы можно пронумеровать таким образом: $T = \{t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, что совокупность последовательностей $\{t_n^j\}$ равностепенно по j почти периодично по n. Такую нумерацию элементов T будем называть п. п. представлением п.п. множества T.

Пример. Множество целых чисел $\mathbb{Z} \subset R$ с естественным представлением $\mathbb{Z} = \{n\}$ сильно п. п.: последовательности $\{t_n^j\} = \{j\}$ периодичны с периодом 1 $\forall j$. Любое сильно п. п. множество имеет бесконечное число п. п. представлений, например, $\mathbb{Z} = \{n + (-1)^{n+1} 2\}$, но, как покажем ниже, всегда существует такое его представление $\{t_n\}$ (единственное с точностью до сдвига номеров), что $t_n \geqslant t_{n-1}$ $\forall n$.

Теорема 2 [8]. *Множество T сильно почти периодично с п. п. представлением $\{t_n\}$ в точности тогда, когда*

$$t_n = na + c_n, \tag{3}$$

где $\{c_n\}$ — п. п. последовательность, $a \neq 0$.

Обозначим через $i(\alpha, \beta)$ число элементов сильно п. п. множества T в (α, β); теорема 2 гарантирует существование предела

$$\lim_{q \to \infty} q^{-1} i(\alpha, \alpha + q) = 1/a,$$

равномерного по α. Величину a в (3) будем называть показателем роста T.

5. Теорема 3. *Почти периодичность множества по Бору (Бохнеру) эквивалентна его сильной почти периодичности. Более того, п. п. представление п. п. множества можно получить, пронумеровав его элементы по возрастанию (с учетом кратности).*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество всех возрастающих неограниченных снизу и сверху последовательностей $\{t_n\}$ действительных чисел без конечных предельных точек, причем число $t_0 \geqslant 0$ таково, что β_1) либо $t_0 = 0$; β_2) либо $t_0 > 0$ и $(0, t_0) \not\ni t_i \forall i$. В $\mathfrak{B}$ введем расстояние d между его элементами $\{t_n^{(1)}\}, \{t_n^{(2)}\}$ (возможно, оно равно $+\infty$) следующим соотношением:

$$d(\{t_n^{(1)}\}, \{t_n^{(2)}\}) = \inf_{\varphi} \sup_{n} |\varphi(t_n^{(1)}) - t_n^{(1)}|,$$

где нижняя грань берется по всем биекциям $\varphi: \{t_n^{(1)}\} \to \{t_n^{(2)}\}$, сохраняющим порядок (любая такая биекция имеет, очевидно, следующий вид: $\forall n\ \varphi(t_n^{(1)}) = t_{n+m_0}^{(2)}$).

Лемма 1. *Пространства $(\mathfrak{A}, \rho)$ и $(\mathfrak{B}, d)$ изометричны, причем изоморфизм $\lambda: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ задается нумерацией элементов $T \in \mathfrak{A}$ в порядке возрастания (с учетом кратности) и выбором в качестве t_0 элемента T, удовлетворяющего β_1), β_2).*

Доказательство. Очевидно, отображение λ взаимно однозначно и $\rho(T_1, T_2) \leqslant d(\lambda(T_1), \lambda(T_2))$. Пусть теперь величина $\rho(T_1, T_2)$ конечна; докажем, что тогда $\rho_{12} \stackrel{\Delta}{=} \rho(T_1, T_2) = d(\lambda(T_1), \lambda(T_2))$. В силу данных выше определений для каждого $\varepsilon > 0$ существует биекция $\varphi: \lambda(T_1) \to \lambda(T_2)$ такая, что $\rho_{12} \leqslant \sup_n |\varphi(t_n^{(1)}) - t_n^{(1)}| \leqslant \rho_{12} + \varepsilon$. Построим, исходя из φ, такую биекцию $\psi: \lambda(T_1) - \lambda(T_2)$, сохраняющую порядок $(\psi(t_n^{(1)}) \leqslant \leqslant \psi(t_{n+1}^{(1)}) \Leftrightarrow t_n^{(1)} \leqslant t_{n+1}^{(1)} \forall n)$, и

$$\rho_{12} \leqslant \sup_n |\psi(t_n^{(1)}) - t_n^{(1)}| \leqslant \rho_{12} + \varepsilon \tag{4}$$

(по определению ρ_{12} нижняя грань в (4) очевидна).

Если положить $\varphi(t_j^{(1)}) = t_{\varphi^*(j)}^{(2)}$ то задание биекции $\varphi: \lambda(T_1) \to \lambda(T_2)$ эквивалентно заданию биекции $\varphi^*: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Пусть $P_0 = \{i > 0: \varphi^*(i) < < \varphi^*(0)\}$, $M_0 = \{k > 0: \varphi^*(k) > \varphi^*(0)\}$. Множество P_0 конечно, так как при $i \in P_0$

$$\varphi(t_0^{(1)}) = t_{\varphi^*(0)}^{(2)} \geqslant t_{\varphi^*(i)}^{(2)} = \varphi(t_i^{(1)}),$$

$$0 \leqslant \varphi(t_0^{(1)}) - \varphi(t_i^{(1)}) \leqslant \varphi(t_0^{(1)}) - \varphi(t_i^{(1)}) + t_i^{(1)} - t_0^{(1)} = (\varphi(t_0^{(1)}) - t_0^{(1)}) - \\ - (\varphi(t_i^{(1)}) - t_i^{(1)}) < 2(\rho_{12} + \varepsilon),$$

и при бесконечности $P_0\ \lambda(T_2) \notin \mathfrak{B}$. Аналогично, при $k \in M_0$ справедливо $\varphi(t_k^{(1)}) \geqslant \varphi(t_0^{(1)})$ и M_0 конечно. Будем считать, что

$$L \stackrel{\text{def}}{=} M_0 \cup P_0 \cup \{0\} = \{k_n < k_{n-1} < \ldots < k_1 < 0 < i_1 < \ldots < i_m\}.$$

Сужение $\varphi^*: L \to \varphi^*(L)$ заменим на отображение $\overline{\overline{\varphi}}^*: L \to \varphi^*(L)$, сохраняющее порядок ($\bar{\bar{\varphi}}^*(k_n)$ минимальное число из $\varphi^*(L)$ и т. д.). Если положить $\bar{\varphi}^*: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $\bar{\varphi}^*|_L = \bar{\bar{\varphi}}^*, \bar{\varphi}^*|_{\mathbb{Z}|L} = \varphi$; а $\bar{\varphi}: \lambda(T_1) \to \lambda(T_2)$, где $\bar{\varphi}(t_s^{(1)}) = t^{(2)}_{\bar{\varphi}^*(s)}$, то $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^*$ — биективные отображения, причем

$$|\bar{\varphi}(t_p^{(1)}) - t_p^{(1)}| < \rho_{12} + \varepsilon \quad \forall p. \qquad (5)$$

Это соотношение достаточно доказывать лишь при $p \in L$. Рассмотрим случай $m < n$ (остальные варианты: $m = n$ и $m > n$ изучаются аналогично). Если $m < n$, то $\bar{\varphi}^*(P_0 \cup \{0\}) \subset \varphi^*(M_0)$ и поэтому при $\bar{\varphi}(t_{i_k}^{(1)}) \geqslant t_{i_k}^{(1)}$ имеет место $0 \leqslant \bar{\varphi}(t_{i_k}^{(1)}) - t_{i_k}^{(1)} = t^{(2)}_{\bar{\varphi}^*(i_k)} - t_{i_k}^{(1)} = t^{(2)}_{\varphi^*(k_r)} - t_{i_k}^{(1)} = \varphi(t_{k_r}^{(1)}) - t_{i_k}^{(1)} \leqslant \varphi(t_{k_r}^{(1)}) - t_{k_r}^{(1)} < \rho_{12} + \varepsilon$; если же $\bar{\varphi}(t_{i_k}^{(1)}) < t_{i_k}^{(1)}$, то

$$0 < t_{i_k}^{(1)} - \bar{\varphi}(t_{i_k}^{(1)}) = t_{i_k}^{(1)} - t^{(2)}_{\bar{\varphi}^*(i_k)} = t_{i_k}^{(1)} - t^{(2)}_{\varphi^*(k_p)} \leqslant t_{i_k}^{(1)} - t^{(2)}_{\varphi^*(i_k)} = t_{i_k}^{(1)} - \varphi(t_{i_k}^{(1)}) < \rho_{12} + \varepsilon.$$

Далее, $\bar{\varphi}^*(\{k_n, \ldots, k_{n-m+1}\}) = \varphi^*(P_0)$, и поэтому при $\bar{\varphi}(t_\delta^{(1)}) \geqslant t_\delta^{(1)}$, $\delta \in \{k_n, \ldots, k_{n-m+1}\}$, выполнено

$$0 \leqslant \bar{\varphi}(t_\delta^{(1)}) - (t_\delta^{(1)}) = \varphi(t_{i_q}^{(1)}) - t_\delta^{(1)} \leqslant \varphi(t_\delta^{(1)}) - t_\delta^{(1)} < \rho_{12} + \varepsilon;$$

если же $\bar{\varphi}(t_\delta^{(1)}) < t_\delta^{(1)}$, то

$$0 < t_\delta^{(1)} - \bar{\varphi}(t_\delta^{(1)}) = t_\delta^{(1)} - t^{(2)}_{\bar{\varphi}^*(\delta)} = t_\delta^{(1)} - t^{(2)}_{\varphi^*(i_d)} = t_\delta^{(1)} - \varphi(t_{i_d}^{(1)}) \leqslant t_{i_d}^{(1)} - \varphi(t_{i_d}^{(1)}) < \rho_{12} + \varepsilon;$$

$$\bar{\varphi}^*(\{k_{n-m}, \ldots, k_1\}) \subset \varphi^*(M_0 \cup \{0\}).$$

При $\bar{\varphi}(t_{k_\delta}^{(1)}) \leqslant t_{k_\delta}^{(1)}$ справедлива оценка

$$0 \leqslant t_{k_\delta}^{(1)} - \bar{\varphi}(t_{k_\delta}^{(1)}) = t_{k_\delta}^{(1)} - t^{(2)}_{\varphi^*(k_\alpha)} = t_{k_\delta}^{(1)} - \varphi(t_{k_\alpha}^{(1)}) \leqslant t_0^{(1)} - \varphi(t_0^{(1)}) < \rho_{12} + \varepsilon.$$

Далее, при $\bar{\varphi}^*(k_\delta) \subset \varphi^*(M_0 \cup \{0\})$ найдется $\mu \geqslant \delta$ такое, что $\varphi^*(k_\mu) \geqslant \bar{\varphi}^*(k_\delta)$, ибо в ином случае $\forall \mu \geqslant \delta$

$$\varphi^*(k_\mu) < \bar{\varphi}^*(k_\delta), \quad \bar{\varphi}^*(\{k_n, \ldots, k_\delta\}) = \{\varphi^*(s) : s \in L, \quad \varphi^*(s) \leqslant \bar{\varphi}^*(k_\delta)\} \supset \supset \varphi^*(P_0 \cup \{0\} \cup \{k_n, \ldots, k_\delta\}).$$

Поэтому при $\bar{\varphi}(t_{k_\delta}^{(1)}) > t_{k_\delta}^{(1)}$ будет

$$0 < \bar{\varphi}(t_{k_\delta}^{(1)}) - t_{k_\delta}^{(1)} = t^{(2)}_{\bar{\varphi}^*(k_\delta)} - t_{k_\delta}^{(1)} \leqslant t^{(2)}_{\varphi^*(k_\mu)} - t_{k_\mu}^{(1)} = \varphi(t_{k_\mu}^{(1)}) - t_{k_\mu}^{(1)} < \rho_{12} + \varepsilon,$$

и тем самым (5) доказано.

Пусть теперь $j_0 = \bar{\varphi}^*(0)$, положим $\psi(t_s^{(1)}) = t^{(2)}_{j_0+s}$ и для такого ψ докажем (4). Пусть, к примеру, $s > 0$ и $j_0 + s = \bar{\varphi}^*(\alpha)$. Тогда, если $\psi(t_s^{(1)}) \geqslant t_s^{(1)}$, то

a1) при $\alpha \leqslant s$ $0 \leqslant \psi(t_s^{(1)}) - t_s^{(1)} = \bar{\varphi}(t_\alpha^{(1)}) - t_s^{(1)} = t^{(2)}_{\bar{\varphi}^*(\alpha)} - t_s^{(1)} \leqslant \bar{\varphi}(t_\alpha^{(1)}) - t_\alpha^{(1)} < \rho_{12} + \varepsilon$;

a2) при $\alpha > s$ существует положительное $\beta \leqslant s$ такое, что $\bar{\varphi}^*(\beta) \geqslant \bar{\varphi}^*(\alpha)$, иначе, учитывая $\bar{\varphi}^*(N) = \{m \in \mathbb{Z} : m > j_0\}$, будет $\bar{\varphi}^*(\beta) < \bar{\varphi}^*(\alpha)$ $\forall 0 \leqslant \beta \leqslant s$ и $\{j_0, j_0 + 1, \ldots, j_0 + s\} \supset \bar{\varphi}^*\{0, 1, \ldots, s, \alpha\}$. Поэтому $0 \leqslant \psi(t_s^{(1)}) - t_s^{(1)} = \bar{\varphi}(t_\alpha^{(1)}) - t_s^{(1)} \leqslant \bar{\varphi}(t_\beta^{(1)}) - t_\beta^{(1)} < \rho_{12} + \varepsilon$. Если же $\psi(t_s^{(1)}) < t_s^{(1)}$, то в1) при $\alpha \geqslant s$ $0 < t_s^{(1)} - \psi(t_s^{(1)}) = t_s^{(1)} - \overline{\varphi}(t_\alpha^{(1)}) \leqslant t_\alpha^{(1)} - \overline{\varphi}(t_\alpha^{(1)}) < \rho_{12} + \varepsilon$;

в2) при $\alpha < s$ существует $\beta \geqslant s$ такое, что $\overline{\varphi}^*(\beta) \leqslant \overline{\varphi}^*(\alpha)$, иначе, учитывая, что $\overline{\varphi}^*(N) = \{m \in \mathbb{Z} : m > j_0\}$, будет $\overline{\varphi}^*(\beta) > \overline{\varphi}^*(\alpha)\ \forall \beta \geqslant s$ и $\{j_0, j_0 + 1, \ldots, j_0 + s\} \subset \overline{\varphi}^*\{0, 1, \ldots, s-1\}$. Поэтому

$$0 < t_s^{(1)} - \psi(t_s^{(1)}) = t_s^{(1)} - \overline{\varphi}(t_\alpha^{(1)}) \leqslant t_\beta^{(1)} - \overline{\varphi}(t_\beta^{(1)}) < \rho_{12} + \varepsilon.$$

Аналогичное исследование случая $s < 0$ завершает доказательство оценки (4) и леммы 1.

Л е м м а 2. *Для того чтобы множество T было сильно п. п. с п. п. представлением $\{t_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\eta > 0$ множество Ω_η всех чисел ω таких, что*

$$|t_n^{h_\omega} - \omega| < \eta \tag{6}$$

для некоторого $h_\omega \in \mathbb{Z}$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, было относительно плотно на R.

Лемма 2 впервые доказана в [1] при $t_{n+1} > t_n$; доказательство ее, приводимое ниже, представляет собой соответствующую общему случаю модификацию рассуждений [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь плотности Ω_η с учетом теоремы 2 очевидна (если $h_\omega\eta$ — период для п. п. последовательности $\{c_n\}$ из (3), то (6) выполнено с $\omega = h_\omega a$).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $H_\eta = \{h_\omega, \omega \in \Omega_\eta\}$. Расположим целые числа из H_η в строго возрастающую последовательность $\{h_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$; очевидно, если положить $h_0 = 0$, то $h_i = -h_{-i}\ \forall i$. Докажем относительную плотность $\{h_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ (для этого достаточно, чтобы $\lim\limits_{i \to \pm\infty} h_i = \pm\infty$ и последовательность $\{h_{i+1} - h_i\}$ была ограничена сверху); $\lim\limits_{i \to \pm\infty} h_i = \pm\infty$, так как в противном случае ($|h_i| \leqslant m_0$, учитывая симметричность H_η) выполнено $-c \leqslant t_0^{h_\omega} \leqslant c\ \forall \omega \in \Omega_\eta$, и согласно (6) $|\omega| \leqslant c + \eta$, что противоречит относительной плотности Ω_η.

Пусть $\Omega_i = \{\omega : h_\omega = h_i\}$, докажем, что при любых $j \geqslant i$

$$\omega_j - \omega_i \geqslant -2\eta \tag{7}$$

($\omega_k \in \Omega_k$). Так как

$$t_{-h_i+s}^{h_j} - t_{-h_i+s}^{h_i} = t_{h_j - h_i + s} - t_s, \tag{8}$$

и по (j, i) всегда можно найти такое $\bar{s} = s(i, j)$, что $t_{h_j - h_i + \bar{s}} \geqslant t_{\bar{s}}$ (в ином случае $t_{h+s} < t_s\ \forall s \in \mathbb{Z}$, где $h = h_j - h_i \geqslant j - i \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} t_{nh+s} < +\infty$), то $t_{-h_i+\bar{s}}^{h_j} - t_{-h_i+\bar{s}}^{h_i} \geqslant 0$. Учитывая соотношение

$$-\eta < t_r^{h_k} - \omega_k < \eta \tag{9}$$

(справедливое при любых k и r), получаем $\omega_j - \omega_i \geqslant (t_{-h_i+\bar{s}}^{n_j} - \eta) - (t_{-h_i+\bar{s}}^{h_i} + \eta) \geqslant -2\eta$.

Далее, если $\overline{\lim\limits_{i \to \infty}}(h_{i+1} - h_i) = +\infty$, то с учетом (8) (при $s = 0$, $j = i + 1$) можно утверждать, что для любого L найдется i_0 такое, что $t_{-h_{i_0}}^{h_{i_0+1}} - t_{-h_{i_0}}^{h_{i_0}} \geqslant L + 6\eta$. Но тогда согласно (9) $\omega_{i+1} - \omega_i \geqslant L + 4\eta$, что противоречит относительной плотности $\Omega_\eta = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \Omega_i$ (на интервале $(\omega_{i_0} + 2\eta, \omega_{i_0+1} - 2\eta)$ длиной не менее L не содержится ω_k ни при каком $k \in \mathbb{Z}$ ввиду (7)).

Итак, последовательность $\{h_{i+1} - h_i\}$ ограничена и множество $H_\eta = \{h_i\}$ относительно плотно. Целое число $h_i \in H_\eta$ — 2η-почти период, общий для всех последовательностей $\{t_h^j\}$, $j \in \mathbb{Z}$ (так как $t_{n+h_i}^j - t_n^j = t_{n+j}^{h_i} - t_n^{h_i}\ \forall j, n$). Тем самым доказательство леммы 2 завершено.

Завершим теперь доказательство теоремы 3. Пусть T — множество, п. п. по Бохнеру (Бору). Тогда $\lambda(T)$ — его п. п. представление. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $T(\varepsilon) > 0$, что на любом отрезке длины $T(\varepsilon)$ можно найти такое τ, что $\rho(T, T+\tau) < \varepsilon$. Но тогда и $|-t_{n+j_0} + t_n - \tau| = d(\lambda(T), \lambda(T+\tau)) = \rho(T, T+\tau) < \varepsilon$ (тут $\lambda(T) = \{t_n\}$, $\lambda(T+\tau) = \{t_{n-j_0(\tau)} + \tau\}$). Учитывая лемму 2, получаем: T — сильно п. п. множество с п. п. представлением $\lambda(T)$.

Если же множество T сильно почти периодично, то выполнены условия леммы 2 и для каждого $\eta > 0$ существует относительно плотное множество Ω_η такое, что при $\omega \in \Omega_\eta$

$$\rho(T, T+\omega) \leqslant \sup_n |\varphi(t_n + \omega) - t_n - \omega| < \eta, \quad \varphi(t_n + \psi) = t_{n+h_\omega},$$

и поэтому T — п. п. множество по Бору. Теорема 3 полностью доказана.

Следствие 1. *Если $T_1, \ldots, T_n$ — п. п. множества с показателями роста соответственно $a_1, \ldots, a_n$, то $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ — также п. п. множество с показателем роста a, где $1/a = 1/a_1 + \ldots + 1/a_n$.*

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и замечания к теореме 2 с учетом того, что $i(\alpha, \beta) = i_1(\alpha, \beta) + \ldots + i_n(\alpha, \beta)$.

Следствие 3. (*см. теорему* 1). *Если T_0 — п. п. множество с п. п. представлением $T_0 = \{an + c_n^{(0)}\}$, то $T \in H(T_0)$ в точности тогда, когда существует п. п. представление $T = \{an + c_n + \theta\}$, где $\theta \in [0, a)$, $\{c_n\} \in H(\{c_n^{(0)}\})$.*

Доказательство. 1. Пусть $T = \{an + c_n + \theta\}$, где $\{c_n\} \in H(\{c_n^{(0)}\})$ (т. е. для некоторой последовательности целых чисел $\{m_k\}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_n |c_n - c_{n+m_k}^{(0)}| = 0$). Но $T_0 + \theta - am_k = \{an + c_n^{(0)} + \theta - am_k\} = \{an + c_{n+m_k}^{(0)} + \theta\}$ и поэтому $T_0 + \theta - am_k \to T$ при $k \to +\infty$. 2. Если $T \in H(T_0)$, то для некоторой последовательности действительных чисел $\{h_k\}_{k=1}^{+\infty}$ имеем $T_0 + h_k \to T$ при $k \to +\infty$. Положим $h_k = m_k a + \theta_k$. Тогда $T_0 + h_k = \{an + c_n^{(0)} + h_k\} = \{an + c_{n-m_k}^{(0)} + \theta_k\}$. Учитывая почти периодичность по Бохнеру последовательности $\{c_n^{(0)}\}$, из $\{m_k\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{m_{k_j}\}$ такую, что $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_n |c_{n-m_{k_j}}^{(0)} - c_n| = 0$ и $\{c_n\} \in H(\{c_n^{(0)}\})$. При этом можно считать, что $\theta_{k_j} \to \theta \in [0, a]$. Но тогда $T_0 + h_{k_j} \to \{an + c_n + \theta\}$, и поэтому $T = \{an + c_n + \theta\}$ (если $\theta = a$, то $T = \{an + c_{n-1}\}$).

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 311 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.26).
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 282 с.
4. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* Почти периодические решения нелинейных импульсных систем // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 3.— С. 291—296.
5. *Ахметов М. У.* Рекуррентные и почти периодические решения неавтономных импульсных систем // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1988.— № 3.— С. 8—10.
6. *Fink A. M.* Almost periodic differential equations // Lect. Notes Math. — 1974. — 377.— P. 336.
7. *Сибирский К. С.* Введение в топологическую динамику.— Кишинев : РИО АН МССР, 1970.— 144 с.
8. *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн.— 1991.— **43**, № 10.— С. 1409—1413.

Получено 08.02.91