УДК 513.88

Л. А. САХНОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (Одес. электротехн. ин-т связи)

Интегрируемые нелинейные уравнения на полуоси

Нелинейное уравнение Шредингера и модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза рассматриваются на полуоси $0 \leqslant x < \infty$. Выделены классы решений, когда достаточно начальных данных для однозначной разрешимости соответствующей задачи. Исследуемый класс решений характеризуется в терминах функции Вейля — Титчмарша вспомогательной линейной задачи. Решение строится в явном виде, когда соответствующая функция Вейля — Титчмарша $v(t, z)$ является рациональной по z функцией.

Нелінійне рівняння Шредінгера та модифіковане рівняння Кортевега — де Фріза розглядаються на півосі $0 \leqslant x < \infty$. Виділені класи розв'язків, коли достатньо початкових даних для однозначної розв'язності відповідної задачі. Досліджуваний клас розв'язків характеризується в термінах функції Вейля — Титчмарша допоміжної лінійної задачі. Розв'язок будується у явному вигляді коли відповідна функція Вейля — Титчмарша $v(t,z)$ являється раціональною по z функцією.

1. Метод обратной задачи рассеяния эффективно применяется для исследования ряда нелинейных уравнений [1—2] в области $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$. При этом решение в начальный момент предполагается известным. Для исследования уравнений в области $0 \leqslant x < \infty$, $t \geqslant 0$ требуется, вообще говоря, к начальным данным присоединить граничные данные. Представляет интерес следующая задача: выделить случаи (уравнения и классы решений), когда в области $0 \leqslant x < \infty$, $t \geqslant 0$ достаточно начальных данных для однозначной разрешимости соответствующего уравнения.

В данной статье сформулированная задача решается для нелинейного уравнения Шредингера

$$R_t = \frac{i}{2}(R_{xx} - 2|R|^2 R), \; 0 \leqslant x < \infty, \tag{1}$$

и модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$R_t = -\frac{1}{4} R_{xxx} + \frac{3}{2}|R|^2 R_x, \; 0 \leqslant x < \infty. \tag{2}$$

При этом используются методы обратной спектральной задачи [3], а класс решений характеризуется в терминах функции Вейля — Титчмарша $v(t, z)$ вспомогательной линейной системы

$$\frac{\partial w}{\partial x} = izH(x, t)\, w, \; w(0, t, z) = E_2, \tag{3}$$

где

$$H(x, t) = A^{-1}(x, t)\, jA(x, t). \tag{4}$$

При этом матрица $A(x, t)$ и решение $R(x, t)$ соответствующего уравнения связаны соотношениями [1, 4]

$$j\frac{\partial A}{\partial x} = -\xi A, \; A(0, t) = U^*, \tag{5}$$

$$j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; \xi = \begin{bmatrix} 0 & R(x, t) \\ -\overline{R(x, t)} & 0 \end{bmatrix}, \; U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Функция Вейля — Титчмарша $v(t, z)$ системы (3) определяется с помощью неравенства

$$\int_0^\infty [1, \overline{iv(t, z)}]\, w^*(x, t, z)\,[JH(x, t)]\, w(x, t, z) \begin{bmatrix} 1 \\ -iv(t, z) \end{bmatrix} dx < \infty, \tag{7}$$

где $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\operatorname{Im} z > 0$. Если решение $R(x, t)$ уравнения (1) при некотором M удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial^k R}{\partial x^k}\right| \leqslant M; \; k = 0, 1; \; 0 \leqslant x < \infty, \; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

то соответствующая функция $v(t, z)$ удовлетворяет уравнению Риккати [4, 5]

$$\frac{dv}{dt} = [z^2 + z\operatorname{Im} a_0(t) + \frac{1}{2}|a_0(t)|^2 - \frac{1}{2}\operatorname{Re} b_0(t)] +$$

$$+[2z\operatorname{Re}a_0(t)+\operatorname{Im}b_0(t)]\,v+\Big[z^2-z\operatorname{Im}a_0(t)+$$

$$+\frac{1}{2}|a_0(t)|^2+\frac{1}{2}\operatorname{Re}b_0(t)\Big]v^2, \tag{9}$$

где

$$a_0(t)=R(0,t),\ \ b_0(t)=\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{x=0}. \tag{10}$$

В случае уравнения (2) при условии

$$\left|\frac{\partial^k R}{\partial x^k}\right|\leqslant M;\ \ k=0,1,2,\ 0\leqslant x<\infty,\ \ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{11}$$

функция $v(t, z)$ удовлетворяет уравнению Риккати [4, 5]

$$\frac{dv}{dt}=\Big(-z^3-z^2\operatorname{Im}a_0-\frac{z}{2}|a_0|^2+\frac{z}{2}\operatorname{Re}b_0+\frac{1}{4}d_0i+\frac{1}{4}\operatorname{Im}c_0\Big)+$$

$$+\Big(-2z^2\operatorname{Re}a_0-z\operatorname{Im}b_0+\frac{1}{2}\operatorname{Re}c_0\Big)v+\Big(-z^3+z^2\operatorname{Im}a_0-\frac{z}{2}|a_0|^2-$$

$$-\frac{z}{2}\operatorname{Re}b_0+\frac{1}{4}d_0i-\frac{1}{4}\operatorname{Im}c_0\Big)v^2, \tag{12}$$

где приняты обозначения

$$a_0(t)=R(0,t),\ \ b_0(t)=R_x(0,t),\ \ c_0(t)=R_{xx}(0,t)-$$

$$-2|R(0,t)|^2R(0,t),\ d_0(t)=[R_x(0,t)\overline{R(0,t)}-R(0,t)\overline{R_x(0,t)}]. \tag{13}$$

2. Далее будем предполагать, что $v(t, z)$ в окрестности $z=\infty$ допускает разложение

$$v(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)/z^k,\ \ \alpha_0(t)=i. \tag{14}$$

Будем говорить, что функция $R(x, t)$ принадлежит классу регулярности $\mathcal{P}_T$, если функция Вейля — Титчмарша $v(t, z)$ соответствующей системы (3)—(6) допускает представление (14) при $0\leqslant t\leqslant T$.

Подставляя формулу (14) в соотношение (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем

$$\alpha_k'=2i\alpha_{k+2}+i(|a_0|^2+\overline{b}_0)\alpha_k-\operatorname{Im}a_0\sum_{\substack{s+j=k+1\\ s,j\geqslant 1}}\alpha_s\alpha_j+$$

$$+\frac{1}{2}(|a_0|^2+\operatorname{Re}b_0)\sum_{\substack{s+j=k\\ s,j\geqslant 1}}\alpha_s\alpha_j+\sum_{\substack{s+j=k+2\\ s,j\geqslant 2}}\alpha_s\alpha_j,\ \ k\geqslant 1, \tag{15}$$

причем

$$\overline{a}_0=-\alpha_1,\ \ \overline{b}_0=2i\alpha_2-\alpha_1^2. \tag{16}$$

Подставляя формулу (14) в соотношение (12), получаем

$$\alpha_k'=-2i\alpha_{k+3}-i(|a_0|^2+\overline{b}_0)\alpha_{k+1}+\frac{1}{2}(\overline{c}_0-d_0)\alpha_k+$$

$$+(\operatorname{Im}a_0)\sum_{\substack{s+j=k+2\\ s,j\geqslant 1}}\alpha_s\alpha_j-\frac{1}{2}(|a_0|^2+\operatorname{Re}b_0)\sum_{\substack{s+j=k+1\\ s,j\geqslant 1}}\alpha_s\alpha_j+$$

$$+\frac{1}{4}(d_0i-\operatorname{Im}c_0)\sum_{\substack{s+j=k\\ s,j\geqslant 1}}\alpha_s\alpha_j-\sum_{\substack{s+j=k+3\\ s,j\geqslant 2}}\alpha_s\alpha_j,\ \ k\geqslant 1, \tag{17}$$

причем сохраняются соотношения (16) и

$$\bar{c}_0 = 4\alpha_3 + 2\alpha_1 (2i\alpha_2 - \alpha_1^2) + 2\mathrm{Re}\,\alpha_1 |\alpha_1|^2, \tag{18}$$

$$d_0 = (2i\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1^2)\,\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 (2i\alpha_2 - \alpha_1^2). \tag{19}$$

Будем говорить, что функции $\beta_k(t)$ мажорируют $\alpha_k(t)$, если

$$|\alpha_k^n(t)| \leqslant \beta_k^{(n)}(t), \ n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{20}$$

3. Далее отдельно рассмотрим случай уравнения (1). Запишем систему

$$\beta_k'(t) = 2\beta_{k+2} + 2(\beta_1^2 + \beta_2)\,\beta_k + \beta_1 \sum_{\substack{s+j=k+1\\ s,j\geqslant 1}} \beta_s\beta_j +$$

$$+ (\beta_1^2 + \beta_2) \sum_{\substack{s+j=k\\ s,j\geqslant 1}} \beta_s\beta_j + \sum_{\substack{s+j=k+2\\ s,j\geqslant 2}} \beta_s\beta_j, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{21}$$

$$\beta_k(0) = |\alpha_k(0)|, \ k \geqslant 0. \tag{22}$$

Легко видеть, что решения $\beta_k(t)$ системы (21), (22) мажорируют решения $\alpha_k(t)$ системы (15), (16).

Лемма 1. *Пусть функции $\beta_k(t)$ удовлетворяют системе* (21), (22), *и при некотором M справедливы неравенства*

$$|\beta_k(t)| \leqslant M^k, \ k \geqslant 0. \tag{23}$$

Тогда существуют такие A и l, что

$$|\beta_k^{(N)}(t)| \leqslant A^N M^{k+2N} \prod_{j=1}^{N} [k + l(j-1)] = m_{N,k}. \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$\sum_{\nu=0}^{N} C_N^\nu m_{\nu,j} \cdot m_{N-\nu,s} = A^N \cdot M^{k+2N} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{N} C_N^\nu \prod_{q=1}^{\nu} [s + l(q-1)] \prod_{p=1}^{N-\nu} [j + l(p-1)], \tag{25}$$

где $s + j = k$, а C_N^ν — число сочетаний из N по ν. Обозначим через D_l оператор

$$D_l y = x^{1-l} \frac{dy}{dx}$$

и воспользуемся обобщенной формулой Лейбница

$$D_l^N [x^{-(s+j)}] = \sum_{\nu=0}^{N} C_N^\nu D_l^\nu (x^{-s}) \cdot D_l^{N-\nu} (x^{-j}). \tag{26}$$

При $x = 1$ из (26) выводим

$$\prod_{r=1}^{N} [k + l(r-1)] = \sum_{\nu=0}^{N} C_N^\nu \prod_{q=1}^{\nu} [s + l(q-1)] \prod_{p=1}^{N-\nu} [j + l(p-1)]. \tag{27}$$

Из формул (25), (27) следует

$$\sum_{\nu=0}^{N} C_N^\nu m_{\nu,j} m_{N-\nu,s} = m_{N,k}, \quad k = j + s. \tag{28}$$

Предположим, что неравенства (24) верны при $0 \leqslant N \leqslant n$. Тогда в силу

(28) верны неравенства

$$|(\beta_j^p\beta_s)^{(N)}|\leqslant m_{N,s+p}. \tag{29}$$

Продифференцируем равенство (21) n раз. Учитывая (29), при некотором C получаем соотношение

$$|\beta_k^{(n+1)}(t)|\leqslant C(k+3)\,m_{n,k+2}. \tag{30}$$

Если $k\geqslant 1$, $l\geqslant 2$, $A\geqslant 4C$, то

$$C(k+3)\,m_{n,k+2}\leqslant m_{n+1,k}. \tag{31}$$

Из неравенств (30), (31) следует

$$|\beta_k^{(n+1)}(t)|\leqslant m_{n+1,k},\ k\geqslant 0. \tag{32}$$

(Справедливость (32) при $k=0$ следует из равенства $\beta_0((t)=1.)$ Из (23) и (32) вытекает утверждение леммы.

Применяя лемму 1 при $t=0$, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполнены неравенства*

$$|\alpha_k(0)|\leqslant M^k, \tag{33}$$

то верны оценки

$$|\alpha_k^{(N)}(0)|\leqslant m_{N,k},\ k\geqslant 0,\ N\geqslant 0. \tag{34}$$

Функции $\alpha_k(t)$ имеют вид

$$\alpha_k(t)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\alpha_k^{(N)}(0)}{N!}t^N. \tag{35}$$

Из формул (24) и (34) следует

$$|\alpha_k^{(N)}(0)|\leqslant A^NM^{k+2N}l^N\frac{\Gamma\left(N+\frac{k}{l}\right)}{\Gamma(k/l)},\ k\neq 0. \tag{36}$$

Пользуясь формулой Стирлинга, можем записать

$$\Gamma\left(N+\frac{k}{l}\right)/\Gamma\left(\frac{k}{l}\right)\Gamma(N+1)\leqslant C\exp\left(\frac{k}{l}+N\right),\ \ k\neq 0. \tag{37}$$

Из соотношений (35)—(37) вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Пусть верны неравенства* (33). *Тогда существуют такие числа $T>0$ и $M_T>0$, что ряды* (35) *сходятся при $0\leqslant t\leqslant T$ и справедливы неравенства*

$$|\alpha_k(t)|\leqslant M_T^k,\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{38}$$

Следствие 3. *Пусть* $\operatorname{Im} v_0(z)>0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ *и*

$$v_0(z)=i+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(0)/z^k,\ \ |z|>M_0>0. \tag{39}$$

Тогда уравнение (9) *имеет одно и только одно решение $v(t,z)$ такое, что при $0\leqslant t\leqslant T$ и $|z|>M_T$ верно представление* (14), *причем*

$$v(0,z)=v_0(z),\ \operatorname{Im} v(t,z)\geqslant 0,\ \ \operatorname{Im} z\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Действительно, в силу следствия 2 решение $v(t,z)$ уравнения (9) имеет вид (14) при $z>M_T$. Функции $a_0(t)$ и $b_0(t)$ определяются из соотношений (16). Решая теперь методом последовательных приближений уравнение (9), находим $v(t,z)$ при $|z|\leqslant M_T$. При достаточно малом T получим $\operatorname{Im} v(t, z)\geqslant 0$, когда $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

4. Аналогично лемме 1 доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $v(t, z)$ вида* (14) *удовлетворяет соотношениям* (16)—(18), *причем*

$$|\alpha_k(t)| \leqslant M^k, \ k \geqslant 0.$$

Тогда существуют такие A и l, что

$$|\alpha_k^{(N)}(t)| \leqslant A^N M^{k+3N} \prod_{j=1}^{N} [k + l(j-1)]. \tag{40}$$

Из леммы 2 выводятся аналоги следствий 1—3 для уравнения (2).

Теорема 1. *Пусть функция*

$$R(x, 0) = f(x) \tag{41}$$

такова, что соответствующая функция $v_0(z)$ допускает представление (39) *и $\operatorname{Im} v_0(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда при некотором $T > 0$ каждое из уравнений* (1) *и* (2) *имеет одно и только одно решение $R(x, t)$ $(0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T)$, принадлежащее классу $\mathcal{P}_T$ и удовлетворяющее условию* (41).

Здесь следует учесть, что функции $v(t, z)$ соответствует одно и только одно решение $R(x, t)$ [2].

Замечание 1. Описание класса начальных условий $f(x)$ в теореме 1 дано в терминах функции Вейля — Титчмарша. Такой подход использован ранее В. А. Марченко [6] для описания замыкания класса безотражательных потенциалов в задаче Штурма — Лиувилля. Как показано в [6], соответствующие функции Вейля — Титчмарша принадлежат классу (39).

5. Будем говорить, что функция $R(x, t)$ принадлежит классу регулярности $\mathcal{P}_T(N)$, если функция Вейля — Титчмарша соответствующей системы (3)—(6) допускает представление

$$v(t, z) = ip_2(t, z)/p_1(t, z), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{42}$$

где $p_1(t, z) = \prod_{k=1}^{N} [z - \nu_k(t)]$, $p_2(t, z) = \prod_{k=1}^{N} [z - \gamma_k(t)]$, причем $\operatorname{Im} \nu_k(t) < 0$, $\operatorname{Im} \gamma_k(t) < 0$, $\nu_k(t) \neq \nu_l(t)$, $\gamma_k(t) \neq \gamma_l(t)$ $(k \neq l)$.

Легко видеть, что $\mathcal{P}_T(N) \subset \mathcal{P}_T$.

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $R(x, 0) = f(x)$ такова, что соответствующая функция $v_0(z)$ допускает представление* (42) *и $\operatorname{Im} v_0(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда при некотором $T > 0$ каждое из уравнений* (1) *и* (2) *имеет одно и только одно решение $R(x, t)$ $(0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T)$, принадлежащее классу $\mathcal{P}_T(N)$ и удовлетворяющее условию* (41).

Пользуясь методами статей [7, 8], решения $R(x, t)$ из класса $\mathcal{P}_T(N)$ можно построить в явном виде. Для этого введем многочлен

$$Q(z) = \overline{p_1(t, \bar{z})}\, p_2(t, z) + p_1(t, z)\, \overline{p_2(t, \bar{z})}.$$

Как и в [7], доказывается, что коэффициенты многочлена $Q(z)$ не зависят от t. Тогда корни ω_k многочлена $Q(z)$ тоже не зависят от t. Предположим дополнительно, что все корни ω_k простые. Введем определители

$$\Delta_1(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots \omega_{2N} \\ \hline \omega_1^{N-2} & \omega_2^{N-2} & \dots \omega_{2N}^{N-2} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots \gamma_{2N} \\ \omega_1\gamma_1 & \omega_2\gamma_2 & \dots \omega_{2N}\gamma_{2N} \\ \hline \omega_1^N\gamma_1 & \omega_2^N\gamma_2 & \dots \omega_{2N}^N\gamma_{2N} \end{vmatrix}, \tag{43}$$

$$\Delta_2(x,t)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{2N} \\ \hline \omega_1^{N-1} & \omega_2^{N-1} & \ldots & \omega_{2N}^{N-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_{2N} \\ \omega_1\gamma_1 & \omega_2\gamma_2 & \ldots & \omega_{2N}\gamma_{2N} \\ \hline \omega_1^{N-1}\gamma_1 & \omega_2^{N-1}\gamma_2 & \ldots & \omega_{2N}^{N-1}\gamma_{2N} \end{vmatrix},$$

где

$$\gamma_k(x,t)=\left[\prod_{j=1}^{N}(i\omega_k+\overline{\nu_j(0)})/(i\omega_k+\nu_j(0))\right]\exp 2(\omega_k x-\Omega_k t).$$

Теорема 3. *Функция*

$$R(x,t)=-2(-1)^N\Delta_1(x,t)/\Delta_2(x,t)$$

является решением уравнения (1), *когда* $\Omega_k=-i\omega_k^2$ *и является решением уравнения* (2), *когда* $\Omega_k=\omega_k^3$.

Доказательство теоремы 3 опускаем. Оно аналогично доказательству соответствующей теоремы для уравнения Sh-Gordon [7—9].

1. *Теория* солитонов, метод обратной задачи / Ред. С. П. Новиков.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
2. *Солитоны* / Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри.— М. : Мир, 1983.— 408 с.
3. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук.— 1986.— 41, № 1.— С. 3—55.
4. *Сахнович Л. А.* Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси.— Киев, 1987.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 87.30).
5. *Sakhnovich L. A.* Procedure of solving nonlinear equations on half-axis // Nonlinear world.— 1989.— 2.— P. 314—317.
6. *Марченко В. А.* Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов.— Киев: Наук. думка, 1990.— С. 168—212.
7. *Сахнович Л. А.* Явные формулы для спектральных характеристик и решения уравнения Sh-Гордон // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1517—1523.
8. *Сахнович Л. А., Тыднюк И. Ф.* Эффективное решение уравнения Sh-Гордон.— Киев, 1990.— 28 с. — Деп. в УкрНИИНТИ № 2015—90.
9. *Сахнович Л. А. Тыднюк И. Ф.* Эффективное решение уравнения Sh-Гордон // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 9.— С. 20—25.

Получено 07.03.91